KRUHOVÝ DĚJ S IDEÁLNÍM PLYNEM

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý

Obsah

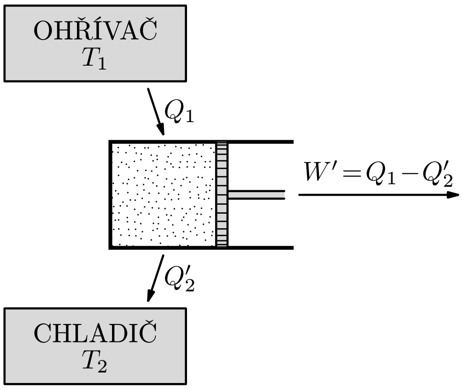
1 Základní pojmy

Tepelný motor může pracovat trvale jen cyklickým způsobem. Po proběhnutí každého cyklu se vrací do původního stavu. *Pracovní cyklus* reálného tepelného motoru můžeme často uspokojivě modelovat jako *kruhový děj* s ideálním plynem, jehož jednotlivé části jsou zvoleny ze čtyřech základních dějů – *izochorického, izobarického, izotermického* a *adiabatického.*

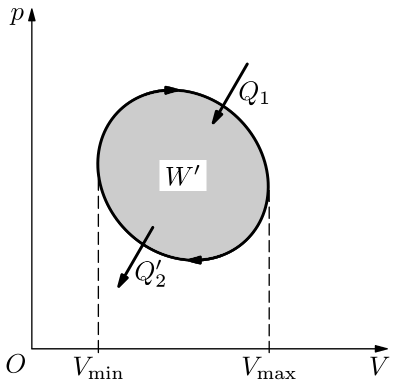
Pracovní látka, kterou je ideální plyn o látkovém množství n, přijme během kruhového děje od tělesa s vyšší teplotou – *ohřívače* – teplo Q_1 a odevzdá chladnějšímu tělesu – *chladiči* – teplo Q_2'. *Vnitřní energie* U pracovní látky je na konci cyklu stejná jako na začátku. Proto je *celková práce* W' vykonaná strojem při jednom cyklu rovna rozdílu přijatého a odevzdaného tepla (obr. 1).

$$W' = Q_1 - Q_2' \,.$$

Tato práce je číselně rovna obsahu plochy ohraničené uzavřenou křivkou, která daný kruhový děj zobrazuje v p-V diagramu (obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Kruhový děj se hodnotí z hlediska *účinnosti*

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1}.$$

Také náš studijní text je zaměřen na energetickou bilanci a na stanovení účinnosti různých kruhových dějů, zejména takových, které modelují činnost spalovacích motorů.

2 Vztahy užívané při popisu kruhových dějů s ideálním plynem

a) **Stavová rovnice** ve tvarech:

$$pV = nRT\,, \qquad \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}\,.$$

(T je termodynamická teplota, R je molární plynová konstanta.)

b) **První termodynamický zákon** ve tvarech:

$$\Delta U = Q + W\,,$$

(Změna vnitřní energie molekulové soustavy je rovna součtu přijatého tepla a spotřebované práce, tj. práce, kterou vykonají vnější síly při zmenšení objemu plynu.)

$$Q = \Delta U + W'\,.$$

(Teplo přijaté molekulovou soustavou je rovno součtu změny vnitřní energie a plynem vykonané práce.)

$$Q' = -\Delta U + W\,.$$

(Teplo odevzdané molekulovou soustavou je rovno součtu úbytku vnitřní energie a spotřebované práce.)

c) **Vnitřní energie** ideálního plynu s jednoatomovými molekulami:

$$U = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT\,,$$

s dvouatomovými molekulami:

$$U = \frac{5}{2}NkT = \frac{5}{2}nRT\,.$$

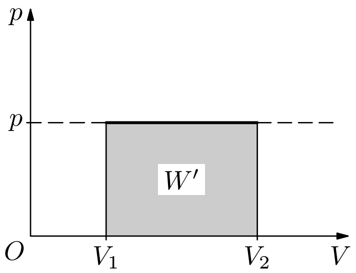
Poznámka: Tyto vztahy jsou podrobně vysvětleny v dodatku na konci studijního textu.

d) **Práce vykonaná plynem při zvětšování objemu** je číselně rovna obsahu obrazce v p-V diagramu. Při *izobarické expanzi* (obr. 3) platí

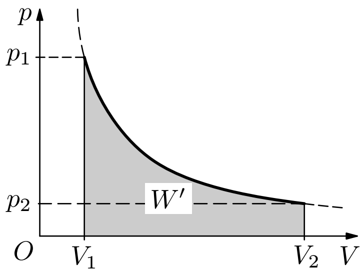
$$W' = p\Delta V = p(V_2 - V_1)\,,$$

při izochorickém ději je nulová. U ostatních dějů ji můžeme určit užitím integrálního počtu. Pro *izotermickou expanzi* (obr. 4) dostáváme:

$$W' = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V}\,\mathrm{d}V = nRT\ln\frac{V_2}{V_1} = nRT\ln\frac{p_1}{p_2}\,.$$



Obr. 3



Obr. 4

3 Přehled základních dějů v ideálním plynu s dvouatomovými molekulami

a) **Izochorické zahřátí** z teploty T_1 na teplotu T_2:

$$V = \text{konst.}, \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \Delta V = 0 \Rightarrow W' = 0\,,$$

$$Q = \Delta U = \frac{5}{2} nR\,(T_2 - T_1) = nC_V \Delta T = mc_V \Delta T\,.$$

Po dosazení ze stavové rovnice:

$$Q = \frac{5}{2}(p_2 - p_1)V\,.$$

b) **Izochorické ochlazení** z teploty T_1 na teplotu T_2:

$$V = \text{konst.}, \quad \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad \Delta V = 0 \Rightarrow W = 0\,,$$

$$Q' = -\Delta U = \frac{5}{2} nR\,(T_1 - T_2) = -nC_V \Delta T = -mc_V \Delta T\,.$$

Po dosazení ze stavové rovnice:

$$Q' = \frac{5}{2}(p_1 - p_2)V\,.$$

$C_V = \frac{5}{2}R$ je *molární tepelná kapacita při stálém objemu*, stejná pro všechny plyny s dvouatomovými molekulami.

Měrná tepelná kapacita při stálém objemu je nepřímo úměrná molární hmotnosti. U ideálního plynu s dvouatomovými molekulami

$$c_V = \frac{5}{2}\frac{R}{M_\mathrm{m}}\,.$$

c) **Izobarické zahřátí** z teploty T_1 na teplotu T_2:

$$p = \text{konst.}, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}\,, \quad W' = p\,(V_2 - V_1) = nR\,(T_2 - T_1)$$

$$Q = \Delta U + W' = \frac{5}{2}nR\,(T_2 - T_1) + nR\,(T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{7}{2}nR\Delta T = nC_p\Delta T = mc_p\Delta T\,.$$

Po dosazení ze stavové rovnice:

$$Q = \frac{7}{2}(V_2 - V_1)p\,.$$

d) **Izobarické ochlazení** z teploty T_1 na teplotu T_2:

$$p = \text{konst.}, \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}\,, \quad W = p\,(V_1 - V_2) = nR\,(T_1 - T_2)$$

$$Q' = -\Delta U + W = \frac{5}{2}nR\,(T_1 - T_2) + nR\,(T_1 - T_2) =$$

$$= \frac{7}{2}nR\Delta T = nC_p\Delta T = mc_p\Delta T\,.$$

Po dosazení ze stavové rovnice:

$$Q' = \frac{7}{2}(V_1 - V_2)p\,.$$

Molární a *měrná tepelná kapacita* při stálém tlaku jsou

$$C_p = \frac{7}{2}R\,, \quad c_p = \frac{7}{2}\frac{R}{M_\mathrm{m}}\,.$$

Molární tepelné kapacity plynu splňují jednoduchý *Mayerův vztah*:

$$C_p = C_V + R\,.$$

Poměr molárních tepelných kapacit C_p/C_V a měrných tepelných kapacit c_p/c_V je stejný a nazývá se *Poissonova konstanta* $\varkappa$. Pro plyn s dvouatomovými molekulami dostáváme $\varkappa = \frac{7}{5} = 1{,}40$.

e) **Izotermická expanze** z objemu V_1 na objem V_2:

$$T = \text{konst.}, \quad p_1V_1 = p_2V_2\,, \quad \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0\,,$$

$$Q = W' = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}\,.$$

f) **Izotermická komprese** z objemu V_1 na objem V_2:

$$T = \text{konst.}, \quad p_1V_1 = p_2V_2\,, \quad \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0\,,$$

$$Q' = W = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1V_1 \ln \frac{V_1}{V_2}\,.$$

g) **Adiabatická expanze** z objemu V_1 na objem V_2:

$$Q = 0 \Rightarrow W' = -\Delta U = \frac{5}{2} nR\,(T_1 - T_2) = -nC_V \Delta T = \frac{5}{2}\,(p_1V_1 - p_2V_2)$$

h) **Adiabatická komprese** z objemu V_1 na objem V_2:

$$Q = 0 \Rightarrow W = \Delta U = \frac{5}{2} nR\,(T_2 - T_1) = nC_V \Delta T = \frac{5}{2}\,(p_2V_2 - p_1V_1)$$

Vedle stavové rovnice platí při adiabatickém ději *Poissonův vztah* $p_1V_1^{\varkappa} = p_2V_2^{\varkappa}$. S využitím stavové rovnice snadno odvodíme další vztahy

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} = \frac{T_2}{T_1}\,, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\varkappa - 1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\varkappa}\,.$$

Úloha 1: Upravte předcházející vztahy pro použití v kruhových dějích, kde pracovní látkou je plyn s jednoatomovými molekulami.

4 Příklady jednoduchých kruhových dějů

Příklad 1. Ideální tepelný stroj, jehož pracovní látkou je plyn s dvouatomovými molekulami, pracuje v cyklu tří za sebou následujících dějů (obr. 5):

[1 → 2] – plyn adiabaticky stlačíme z původního objemu $V_1 = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ m^3, tlaku $p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa a teploty $T_1 = 300$ K tak, že objem se zmenší na třetinu.

[2 → 3] – plyn izobaricky ohřejeme tak, že se rozepne na původní objem.

[3 → 1] – plyn izochoricky ochladíme na původní teplotu.

a) Určete hodnoty stavových veličin ve stavech 2 a 3.

b) Určete teplo, práci a změnu vnitřní energie u všech tří dějů.

c) Určete účinnost stroje.

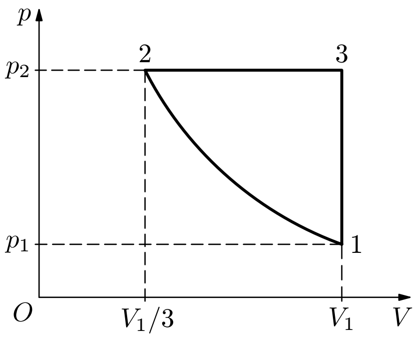
Řešení

a) Hodnoty stavových veličin určíme ze vztahů:

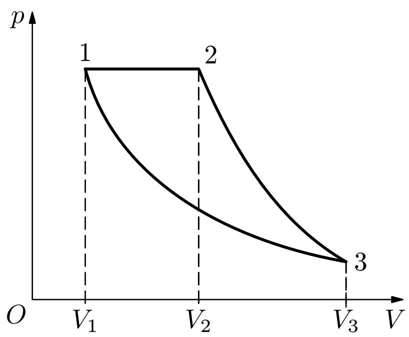
$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{\frac{V_1}{3}} \right)^{\varkappa - 1} = T_1 \cdot 3^{\varkappa - 1}\,, \quad p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{\frac{V_1}{3}} \right)^{\varkappa} = p_1 \cdot 3^{\varkappa}\,,$$

$$T_3 = T_1 \frac{p_2}{p_1} = T_1 \cdot 3^{\varkappa}\,, \qquad \varkappa = \frac{7}{5} = 1{,}4\,.$$

Po dosazení $T_2 = 466$ K, $T_3 = 1400$ K, $p_2 = 4{,}66 \cdot 10^5$ Pa.



Obr. 5



Obr. 6

b) Energetická bilance:
[1 → 2] – *adiabatická komprese* proběhne bez tepelné výměny. Vnitřní energie plynu se zvětší o spotřebovanou práci:

$$\Delta U = W = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = 138 \text{ J}.$$

[2 → 3] – *izobarické ohřátí.* Plyn vykoná práci

$$W'_{23} = p_2(V_1 - V_2) = nR(T_3 - T_2) = nRT_1 \left(3^{\varkappa} - 3^{\varkappa - 1}\right) =$$

$$= p_1 V_1 \left(3^{\varkappa} - 3^{\varkappa - 1}\right) = 310 \text{ J}$$

a jeho vnitřní energie se zvýší o

$$\Delta U = \frac{5}{2} nR(T_3 - T_2) = \frac{5}{2}(p_2 V_1 - p_2 V_2) = 780 \text{ J}.$$

Plyn tedy přijme teplo

$$Q_1 = Q_{23} = W'_{23} + \Delta U = 1090 \text{ J}.$$

[3 → 1] – *izochorické ochlazení.* Práce je nulová. Odevzdané teplo je rovno úbytku vnitřní energie:

$$Q'_2 = Q'_{31} = -\Delta U = \frac{5}{2}(p_2 V_1 - p_1 V_1) = 910 \text{ J}.$$

c) Účinnost kruhového děje určíme ze vztahu

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} \doteq 16 \text{ \%}.$$

Příklad 2. Ideální tepelný stroj, jehož pracovní látkou je ideální plyn, pracuje v cyklu tří za sebou následujících dějů (obr. 6):

[1 → 2] – plyn izobaricky ohřejeme z původního objemu V_1 a teploty T_1. Objem se třikrát zvětší.

[2 → 3] – plyn se adiabaticky rozepne tak, že jeho teplota poklesne na původní teplotu T_1.

[3 → 1] – plyn izotermicky stlačíme na původní objem V_1.

Dokažte, že účinnost tohoto kruhového děje je stejná pro plyn s jednoatomovými i dvouatomovými molekulami, a určete ji.

Řešení

Rozebereme jednotlivé části cyklu:

[$1 \to 2$] – *izobarická expanze*: Platí $T_2 = T_1 \dfrac{V_2}{V_1} = 3T_1$. Plyn vykoná práci

$$W'_{12} = p_1 (V_2 - V_1) = 2p_1 V_1 = 2nRT_1$$

a přijme teplo

$$Q_1 = nC_p (T_2 - T_1) = nC_p \cdot 2T_1 .$$

[$2 \to 3$] – *adiabatická expanze*: Probíhá bez tepelné výměny. Plyn vykoná práci, která se rovná úbytku vnitřní energie:

$$W'_{23} = -\Delta U = nC_V (T_2 - T_1) .$$

Objem se zvětší z $3V_1$ na V_3 a tlak klesne z p_1 na p_3.
Vydělením vztahů $p_1 (3V_1)^{\varkappa} = p_3 V_3^{\varkappa}$ a $p_1 V_1 = p_3 V_3$ dostaneme

$$3^{\varkappa} V_1^{\varkappa - 1} = V_3^{\varkappa - 1} , \quad \frac{V_3}{V_1} = 3^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$$

[$3 \to 1$] – *izotermická komprese*: Plyn spotřebuje práci a odevzdá stejně velké teplo:

$$W_{31} = Q'_2 = nRT_1 \ln \frac{V_3}{V_1} = nRT_1 \ln 3^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} .$$

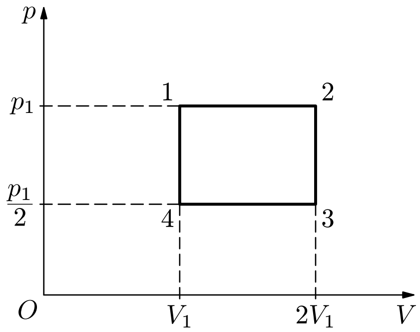
Účinnost kruhového děje určíme ze vztahu

$$\eta = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{nC_p \cdot 2T_1 - nRT_1 \ln 3^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}}{nC_p \cdot 2T_1} = \frac{2C_p - R\dfrac{\varkappa}{\varkappa - 1} \ln 3}{2C_p} =$$

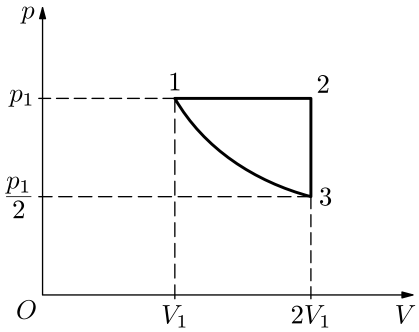
$$= \frac{2C_p - (C_p - C_V)\dfrac{\dfrac{C_p}{C_V}}{\dfrac{C_p}{C_V} - 1} \ln 3}{2C_p} = \frac{2C_p - (C_p - C_V)\dfrac{C_p}{C_p - C_V} \ln 3}{2C_p} = \frac{2 - \ln 3}{2} .$$

Výsledek zřejmě nezávisí na použitém ideálním plynu. Po dopočítání $\eta = 45\ \%$.

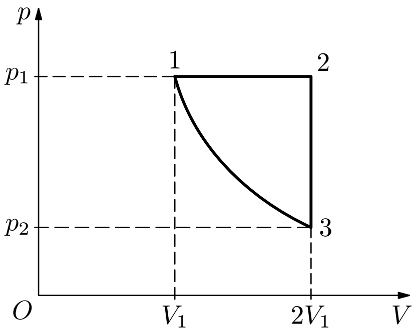
Úlohy 2. až 5.: Určete účinnost kruhových dějů v případech znázorněných na obr. 7 až 10. Pracovní látkou je ideální plyn s dvouatomovými molekulami.



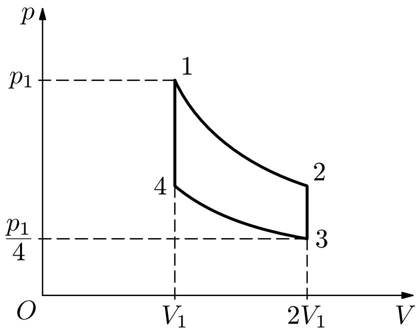
Obr. 7



Obr. 8 Děj [3 → 1] je izotermický.



Obr. 9
Děj [3 → 1] je adiabatický.



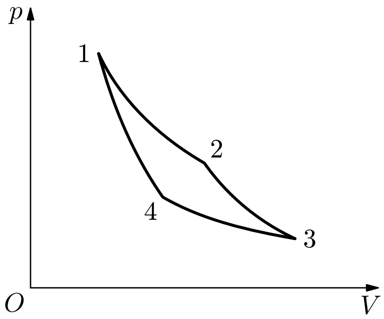
Obr. 10
Děje [1 → 2] a [3 → 4] jsou izotermické.

5 Carnotův cyklus

Carnotův cyklus se skládá z izotermické a adiabatické expanze a izotermické a adiabatické komprese (obr. 11). Počáteční stav pracovní látky o látkovém množství n je určen teplotou T_1 a objemem V_1. Rozebereme jednotlivé děje:

[1 → 2] **izotermická expanze:**
Práce W'_{12} vykonaná plynem je rovna přijatému teplu Q_1

$$W'_{12} = Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}\,.$$



Obr. 11

[2 → 3] **adiabatická expanze:**
Práce W'_{23} vykonaná plynem je rovna úbytku vnitřní energie

$$W'_{23} = -\Delta U_{23} = nC_V\,(T_1 - T_2)\ .$$

[3 → 4] **izotermická komprese:**
Práce W_{34} spotřebovaná plynem je rovna odevzdanému teplu Q'_2

$$W_{34} = Q'_2 = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}\ .$$

[4 → 1] **Adiabatická komprese:**
Práce spotřebovaná plynem W_{41} je rovna přírůstku vnitřní energie

$$W_{41} = \Delta U_{41} = nC_V\,(T_1 - T_2)\ .$$

Adiabatická expanze [2 → 3] a adiabatická komprese [4 → 1] proběhly mezi stejnými teplotami T_1 a T_2. Proto

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}\,.$$

Práce vykonaná při adiabatické expanzi je stejná jako práce spotřebovaná při adiabatické kompresi. Proto celková práce při jednom cyklu je

$$W' = W'_{12} + W'_{23} - W_{34} - W_{41} = W'_{12} - W_{34} = Q_1 - Q'_2 = nR\,(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}$$

a účinnost je

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q'_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}\,.$$

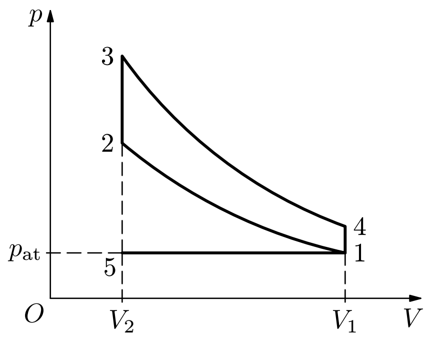
Carnotův cyklus má mezi kruhovými ději zvláštní postavení. Jeho účinnost je **horní hranicí účinnosti** tepelného stroje při teplotě T_1 ohřívače a teplotě T_2 chladiče. **Účinnost nezávisí na pracovní látce**, ale jen na poměru teplot chladiče a ohřívače. Stejný výsledek tedy dostaneme pro ideální plyn s jednoatomovými i dvouatomovými molekulami. Proto mohl být vztah pro výpočet účinnosti Carnotova cyklu použit při zavedení *termodynamické teplotní stupnice*.

6 Modely dějů ve spalovacích motorech

Příklad 3

Na obr. 12 je idealizovaný pracovní diagram modelující činnost čtyřdobého zážehového motoru. Pracovní látkou je vzduch o látkovém množství n, který můžeme přibližně považovat za ideální plyn s dvouatomovými molekulami. Kompresní poměr motoru je $\varepsilon = V_1/V_2 = 4$. Jednotlivé části kruhového děje jsou:

[1 → 2] – adiabatické stlačení vzduchu s nepatrným množstvím benzinových par,
[2 → 3] – izochorické ohřátí vzduchu spálením benzinu,
[3 → 4] – adiabatické rozepnutí zahřátého vzduchu,
[4 → 1] – izochorický pokles tlaku při výfuku.
(Izobarické děje [1 → 5] a [5 → 1] při výfuku a sání, kterými se v motoru obnoví počáteční podmínky nemusíme uvažovat.) Určete teoretickou účinnost motoru.



Obr. 12

Řešení

Celková práce během jednoho cyklu je rovna rozdílu práce vykonané plynem při adiabatické expanzi a práce spotřebované při adiabatické kompresi

$$W' = W'_{34} - W_{12} = \frac{5}{2} nR\,(T_3 - T_4) - \frac{5}{2} nR\,(T_2 - T_1)\ .$$

Plyn přijímá teplo pouze při izochorickém ohřátí, komprese a expanze probíhají bez tepelné výměny a při výfuku plyn odevzdává teplo okolním tělesům. Proto

$$Q_1 = \frac{5}{2} nR\,(T_3 - T_2)\ .$$

Pro účinnost děje platí

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} = \frac{(T_3 - T_4) - (T_2 - T_1)}{T_3 - T_2}\ .$$

Z Poissonova zákona a stavové rovnice odvodíme

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa - 1} = \varepsilon^{\varkappa - 1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{T_2}{\varepsilon^{\varkappa - 1}}\ , \quad T_4 = \frac{T_3}{\varepsilon^{\varkappa - 1}}\ .$$

Po dosazení do vztahu pro účinnost dostáváme

$$\eta = \frac{T_3 - \dfrac{T_3}{\varepsilon^{\varkappa-1}} - T_2 + \dfrac{T_2}{\varepsilon^{\varkappa-1}}}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}\,.$$

Účinnost tohoto kruhového děje závisí jen na Poissonově konstantě pracovní látky a kompresním poměru. Pro $\varkappa = \dfrac{7}{5} = 1{,}40$ a $\varepsilon = 4$ vychází $\eta = 0{,}43$.

Předcházející výsledek lze také vyjádřit ve tvaru

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}\,.$$

Nejvyšší teplota v cyklu je však T_3, nejnižší T_1. Carnotův cyklus mezi těmito teplotami by měl účinnost

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_3} > \eta\,.$$

Příklad 4 (Úloha školního kola 44. roč. FO, kat. B)
V dokumentaci motoru Škoda 781.136 pro automobil FAVORIT je uveden *zdvihový objem válce* $V_{\mathrm{zdv}} = 322\ \mathrm{cm}^3$ a *kompresní poměr* $\varepsilon = 9{,}7$. (Zdvihový objem válce je rozdíl maximálního objemu $V_{\max}$ a minimálního objemu $V_{\min}$ pracovního prostoru válce; kompresní poměr je jejich podíl.)

Děje probíhající v motoru můžeme modelovat kruhovým dějem $ABCD$, při kterém se pracovní látka (vzduch s nepatrným množstvím benzinu) nejprve adiabaticky stlačí z počátečního objemu $V_A = V_{\max}$, počátečního tlaku $p_A = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa a počáteční teploty $T_A = 300$ K na objem $V_B = V_{\min}$, tlak p_B a teplotu T_B.

Následuje zážeh a izochorické shoření malého množství benzinu rozptýleného ve vzduchu, při kterém se teplota ve válci zvýší z T_B na T_C a tlak z p_B na p_C. Předpokládejme takové množství benzinu, že $T_C = 3{,}0 \cdot T_B$.

Pak proběhne adiabatická expanze zahřátého vzduchu se spalinami na počáteční objem $V_D = V_{\max}$, při které se teplota zmenší na T_D a tlak na p_D, a nakonec se vzduch izochoricky ochladí na počáteční stav.

a) Určete maximální objem $V_{\max}$ a minimální objem $V_{\min}$ pracovního prostoru válce. Výsledky zaokrouhlete na cm^3.

b) Určete látkové množství vzduchu ve válci.

c) Vypočtěte zbývající hodnoty stavových veličin v bodech B, C a D. Nakreslete ve vhodném měřítku p-V diagram děje. Průběhy adiabat nakreslete jen „od ruky".
d) Pro každý z dějů AB, BC, CD a DA určete změnu vnitřní energie, vykonanou nebo spotřebovanou práci a přijaté nebo odevzdané teplo.
e) Určete celkovou práci při jednom proběhnutí cyklu a jeho účinnost.
f) Motor je čtyřválcový. Jaký výkon by měl za uvažovaných ideálních podmínek při frekvenci otáčení klikového hřídele $f = 3000\ \mathrm{min}^{-1}$?

Vzduch v pracovním prostoru považujte za ideální plyn s dvouatomovými molekulami.

Řešení

a) Řešením soustavy rovnic $V_{\max} - V_{\min} = V_{\mathrm{zdv}}$, $\quad \dfrac{V_{\max}}{V_{\min}} = \varepsilon$

dostaneme:

$$V_{\min} = V_B = V_C = \frac{V_{\mathrm{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 37\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3\,,$$

$$V_{\max} = V_A = V_D = \frac{\varepsilon V_{\mathrm{zdv}}}{\varepsilon - 1} = 359\ \mathrm{cm}^3 = 3{,}59 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3\,.$$

b) Vyjdeme ze stavové rovnice:

$$\frac{pV}{T} = nR\,, \qquad n = \frac{p_A V_A}{R_\mathrm{m} T_A} = 0{,}0144\ \mathrm{mol}\,.$$

c) Ze stavové rovnice a Poissonova zákona odvodíme:

$$p_B = p_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\varkappa} = p_A \cdot \varepsilon^{\varkappa} = 2{,}41\ \mathrm{MPa}\,,$$

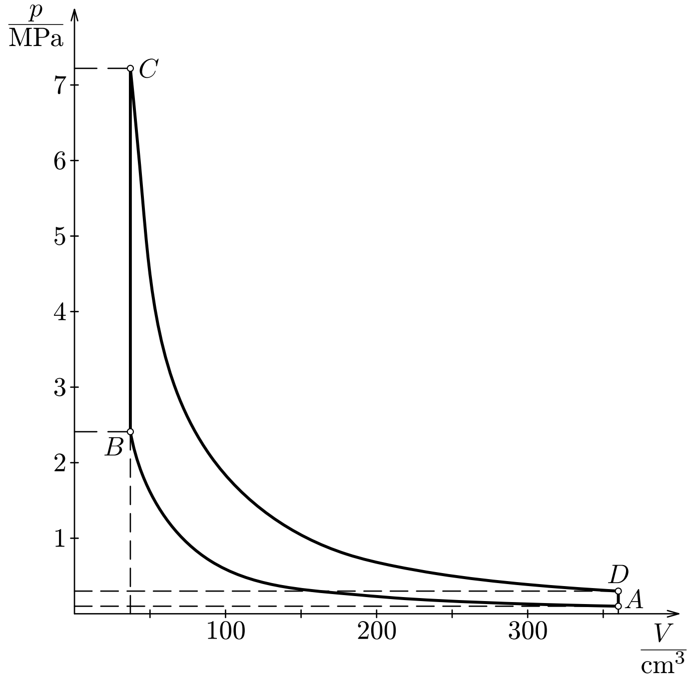
$$T_B = \frac{p_B V_B T_A}{p_A V_A} = T_A \cdot \varepsilon^{\varkappa - 1} = 744\ \mathrm{K} \qquad T_C = 3T_B = 2230\ \mathrm{K}\,.$$

$$\frac{p_B}{p_A} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{V_D}{V_C}\right)^{\varkappa} = \frac{p_C}{p_D} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_D}{p_A} = \frac{p_C}{p_B} = \frac{T_C}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}\,,$$

$$p_C = p_B \frac{T_C}{T_B} = 7{,}22\ \mathrm{MPa}\,, \quad p_D = p_A \frac{T_C}{T_B} = 300\ \mathrm{kPa}\,,$$

$$T_D = T_A \frac{T_C}{T_B} = 900\ \mathrm{K}\,.$$

p-V diagram je na obr. 13:



Obr. 13

d) Děje AB a CD jsou adiabatické:

$$Q_{AB} = 0\,, \qquad W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{5}{2} nR\,(T_B - T_A) = 133\ \mathrm{J}\,,$$

$$Q_{CD} = 0\,, \qquad W'_{CD} = -\Delta U_{CD} = \frac{5}{2} nR_{\mathrm{m}}\,(T_C - T_D) = 399\ \mathrm{J}\,.$$

Děje BC a DA jsou izochorické:

$$W_{BC} = 0 \qquad \Delta U_{BC} = Q_{BC} = \frac{5}{2} nR\,(T_C - T_B) = 445\ \mathrm{J}\,,$$

$$W_{DA} = 0 \qquad \Delta Q'_{DA} = -\Delta U_{DA} = \frac{5}{2} n\,(T_D - T_A) = 180\ \mathrm{J}\,.$$

e) Během jednoho cyklu se vykoná celková práce

$$W' = W'_{CD} - W_{AB} = Q_{BC} - Q'_{DA} = 266\ \mathrm{J}\,.$$

Účinnost cyklu je

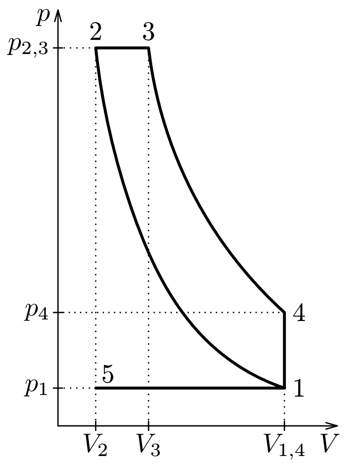
$$\eta = \frac{W'}{Q_{BC}} = \frac{Q_{BC} - Q'_{DA}}{Q_{BC}} = 60\ \%\,.$$

f) Kruhový děj ve válci proběhne během dvou otáček klikového hřídele. Protože motor je čtyřválcový, platí:

$$P = 4 \cdot 0{,}5f \cdot W = 2 \cdot 50\ \mathrm{s}^{-1} \cdot 266\ \mathrm{J} = 26{,}6\ \mathrm{kW}\,.$$

Příklad 5 (Úloha školního kola 45. roč. FO, kat A)

Činnost čtyřdobého vznětového (*Dieselova*) motoru můžeme modelovat kruhovým dějem, jehož p-V diagram je na obr. 14. Motor pracuje tak, že do vzduchu, který byl zahřát na vysokou teplotu adiabatickou kompresí [1 → 2], se při expanzi po krátkou dobu vstřikuje palivo, které izobaricky hoří [2 → → 3], načež se plyn dále rozpíná adiabaticky [3 → 4] a nakonec opustí pracovní prostor a je nahrazen novým vzduchem [4 → 1 → → 5 → 1]. Poslední část pracovního cyklu je ekvivalentní izochorickému ději [4 → 1].
Podíl $\varepsilon = V_1/V_2$ se nazývá *kompresní poměr* a podíl $\varphi = V_3/V_2$ je *plnicí poměr* motoru. Změnou plnicího poměru regulujeme výkon motoru.
U vznětového motoru osobního automobilu je $V_1 = 480\ \mathrm{cm}^3$ a $\varepsilon = 18$. Při tlaku okolního vzduchu $p_1 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, teplotě $T_1 = 300$ K a plnicím poměru $\varphi = 2{,}5$ určete:



Obr. 14

a) hodnoty stavových veličin p, T v bodech 2, 3 a 4 pracovního diagramu,
b) teplo Q_1 přijaté a teplo Q_2' odevzdané pracovní látkou během jednoho cyklu, celkovou práci W' při jednom cyklu a teoretickou účinnost cyklu,
c) celkový výkon čtyřválcového motoru, jestliže klikový hřídel vykoná 3 000 otáček za minutu.
d) Dokažte, že pro teoretickou účinnost tohoto motoru platí vztah

$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa} - 1}{\varphi - 1}\,.$$

Předpokládáme, že vzduch a produkty hoření se chovají jako ideální plyn s dvouatomovými molekulami, pro který platí stavová rovnice. Měrná tepelná kapacita takového plynu je $c_V = 2{,}5R/M$, kde R je molární plynová konstanta a M_m je molární hmotnost plynu. Pro adiabatické děje platí *Poissonův zákon* $pV^\varkappa = \text{konst}$, kde $\varkappa = c_p/c_V$ je Poissonova konstanta. V našem případě $\varkappa = 1{,}40$.

Řešení

a) Pro adiabatický děj $[1 \to 2]$ platí:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}\,, \qquad p_1V_1^\varkappa = p_2V_2^\varkappa\,, \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \varepsilon^{\varkappa-1}\,,$$

$$T_2 = T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\,, \qquad p_2 = p_1\varepsilon^\varkappa\,.$$

Pro izobarický děj $[2 \to 3]$ platí: $\dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{V_3}{V_2} = \varphi\,,$

$$T_3 = T_2\varphi = T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi\,, \qquad p_3 = p_2 = p_1\varepsilon^\varkappa\,.$$

Pro adiabatický děj $[3 \to 4]$ platí:

$$p_3V_3^\varkappa = p_4V_4^\varkappa\,, \qquad \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1} = \varphi^{\varkappa-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}}\,,$$

$$T_4 = T_3\varphi^{\varkappa-1}\varepsilon^{1-\varkappa} = T_1\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi\cdot\varepsilon^{1-\varkappa}\varphi^{\varkappa-1}\,, \qquad T_4 = T_1\varphi^\varkappa\,,$$

$$p_4 = p_3\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\varkappa = p_3\left(\frac{V_3}{V_2}\frac{V_2}{V_1}\right)^\varkappa = p_1\varepsilon^\varkappa\varphi^\varkappa\varepsilon^{-\varkappa}\,, \qquad p_4 = p_1\varphi^\varkappa\,.$$

Pro dané hodnoty:
$T_1 = 300\ \mathrm{K}\,,\ T_2 = 953\ \mathrm{K}\,,\ T_3 = 2383\ \mathrm{K}\,,\ T_4 = 1082\ \mathrm{K}\,,$
$(t_1 = 27\ ^\circ\mathrm{C}\,,\ t_2 = 680\ ^\circ\mathrm{C}\,,\ t_3 = 2110\ ^\circ\mathrm{C}\,,\ t_4 = 809\ ^\circ\mathrm{C})\,,$
$p_1 = 0{,}100\ \mathrm{MPa}\,,\ p_2 = p_3 = 5{,}72\ \mathrm{MPa}\,,\ p_4 = 0{,}361\ \mathrm{MPa}\,.$

b) Hmotnost vzduchu, který projde pracovním prostorem válce během jednoho cyklu, můžeme vyjádřit pomocí stavové rovnice:

$$m = \frac{p_1V_1M_m}{RT_1}\,. \quad \text{Z toho plyne:}\ \ mc_V = 2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}\,.$$

Během hoření paliva při ději $[2 \to 3]$ přijme pracovní látka teplo

$$Q_1 = mc_p(T_3 - T_2) = m\varkappa c_V(T_3 - T_2) = 2{,}5\varkappa\frac{p_1V_1}{T_1}(T_3 - T_2)\,.$$

Při izochorickém ději $[4 \to 1]$ odevzdá pracovní látka teplo

$$Q_2{}' = mc_V(T_4 - T_1) = 2{,}5\frac{p_1V_1}{T_1}(T_4 - T_1)\,.$$

Ostatní děje jsou adiabatické, tedy bez tepelné výměny. Celková práce při jednom cyklu je $W' = Q_1 - Q_2'$. Motor pracuje s teoretickou účinností

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2^{'}}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2^{'}}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}\,.$$

Pro dané hodnoty:
$Q_1 = 801$ J , $Q_2^{'} = 313$ J , $W' = 488$ J , $\eta = 61$ % .

c) Klikový hřídel se otáčí s frekvencí $f = 3000/(60 \text{ s}) = 50 \text{ s}^{-1}$. U čtyřválcového motoru připadají na dvě otočení klikového hřídele 4 celé cykly. Výkon motoru je

$$P = 2fW' = 49 \text{ kW}\,.$$

d) Do vztahu pro účinnost odvozeného v úloze b) dosadíme vztahy mezi teplotami odvozené v části a):

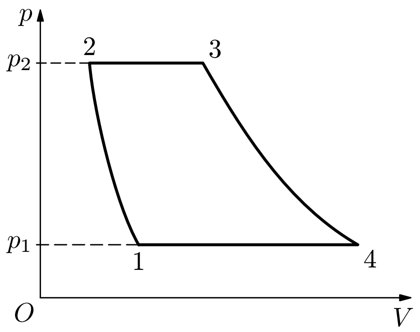
$$\eta = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\dfrac{T_4}{T_1} - 1}{\dfrac{T_3}{T_1} - \dfrac{T_2}{T_1}} = 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa} - 1}{\varepsilon^{\varkappa-1}\varphi - \varepsilon^{\varkappa-1}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\varkappa} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\varkappa-1}} \cdot \frac{\varphi^{\varkappa} - 1}{\varphi - 1}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Úloha 6

Pracovní diagram proudového motoru můžeme modelovat pomocí *Braytonova cyklu* (obr. 15). Je to kruhový děj složený z adiabatické komprese, izobarického ohřátí, adiabatické expanze a izobarického ochlazení pracovní látky – vzduchu. Vysvětlete, jak odpovídají jednotlivé části diagramu dějům v reálném proudovém motoru a určete účinnost děje, je-li kompresní poměr $p_2/p_1 = 10$. Vzduch považujte za ideální plyn s dvouatomovými molekulami.



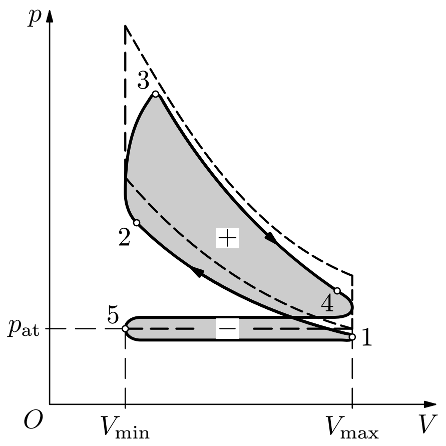
Obr. 15

7 Závěr

Naše modely dějů ve spalovacích motorech vycházely z velmi zjednodušených předpokladů a teoretické hodnoty účinnosti, které jsme určili, jsou značně „optimistické“. Podívejme se například na skutečný pracovní diagram čtyřdobého zážehového motoru na obr. 16. Komprese [1 → 2] a expanze [3 → 4] neprobíhají ve skutečnosti jako adiabatické děje, neboť válec motoru je intenzivně chlazen. Jsou to spíše *polytropické děje*, pro které platí

$$pV^n = \text{konst.} \tag{1}$$

Při kompresi $n \approx 1{,}35$, při expanzi $n \approx 1{,}5$.



Obr. 16

Hoření paliva [2 → 3] neprobíhá přesně jako izochorický děj. Při výfuku [4 → 5] a sání [5 → 1] se uplatňují odporové síly ve výfukovém a sacím potrubí. Tlak ve válci je proto při výfuku větší a při sání menší než tlak atmosférický. Pracovní diagram motoru má tvar zdeformované osmičky a celková práce pracovní látky při jednom cyklu je číselně rovna rozdílu horní a dolní části plošného obsahu obrazce ohraničeného diagramem.

Určitý díl této práce se spotřebuje na překonání smykového tření a valivého odporu pohybujících se částí motoru. Účinnost skutečných čtyřdobých zážehových motorů je tedy menší, než teoretické hodnoty, ke kterým jsme dospěli v příkladech 3 a 4, a pohybuje se mezi 20 % a 33 %. U vznětových motorů je skutečná účinnost 30 % až 42 %. Letecké proudové motory mají účinnost okolo 25 %.

Za povšimnutí stojí i to, že děje, kterými jsme modelovali činnost spalovacích motorů, tedy děje izochorické, izobarické, izotermické a adiabatické, jsou *děje vratné*. Při takovém ději prochází plyn rovnovážnými stavy, to znamená, že v celém objemu je stejný tlak a teplota. Vratné děje mohou probíhat v obou směrech, přičemž plyn přejde při obráceném ději stejnými stavy jako při ději přímém, ale v opačném pořadí. Reálné děje ve spalovacích motorech jsou nevratné. Dochází při nich k rychlým změnám a stavy plynu nejsou rovnovážné. Proto modely, se kterými jste se seznámili v tomto studijním textu, mohly vystihnout činnost spalovacích motorů jen přibližně.

Dodatek
Výpočet vnitřní energie a molárních tepelných kapacit ideálního plynu

Podle kinetické teorie plynů platí pro ideální plyn

$$pV = \frac{N m_\mathrm{m} v_\mathrm{k}^2}{3} = \frac{n N_\mathrm{A} m_\mathrm{m} v_\mathrm{k}^2}{3}\,,$$

kde m_m je hmotnost jedné molekuly a v_k je *střední kvadratická rychlost* posuvného pohybu molekul. Srovnáním se stavovou rovnicí $pV = nRT$ určíme průměrnou kinetickou energii posuvného pohybu připadající na jednu molekulu plynu:

$$E_\mathrm{ks} = \frac{1}{2} m_\mathrm{m} v_\mathrm{k}^2 = \frac{3}{2}\frac{R}{N_\mathrm{A}}T = \frac{3}{2}kT\,.$$

Vnitřní energie ideálního plynu s jednoatomovými molekulami je totožná s kinetickou energií posuvného pohybu jeho molekul. Platí tedy

$$U = NE_\mathrm{ks} = nN_\mathrm{A}\cdot\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}nRT\,.$$

$k = R/N_\mathrm{A}$ je *Boltzmannova konstanta*. Okamžitá hodnota kinetické energie posuvného pohybu náhodně zvolené molekuly je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v_x^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v_y^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v_z^2\,,$$

kde v_x, v_y a v_z jsou souřadnice okamžité rychlosti molekuly v pravoúhlé soustavě souřadnic. Kinetickou energii posuvného pohybu molekuly je tedy možno vyjádřit součtem tří kvadratických členů, které se při chaotickém pohybu molekul mění, ale jejich střední hodnoty jsou stejné, neboť všechny tři směry jsou rovnocenné. Střední hodnota každého kvadratického členu na pravé straně předcházející rovnice je

$$\frac{E_\mathrm{ks}}{3} = \frac{1}{2}kT\,.$$

Tento poznatek lze zobecnit pro libovolnou soustavu molekul, která je v rovnovážném termodynamickém stavu, jako **ekvipartiční teorém:**

Střední energie molekuly je rovnoměrně rozdělena na všechny kvadratické členy, z nichž se energie molekuly skládá. Každému kvadratickému členu přísluší střední energie $\frac{1}{2}kT$.

Počet i kvadratických členů ve výrazu určujícím kinetickou energii molekuly nazýváme **počet platných stupňů volnosti** a ekvipartiční teorém vyjadřujeme vzorcem pro střední kinetickou energii molekuly

$$E_\mathrm{ks} = \frac{i}{2}kT\,.$$

Vnitřní energie ideálního plynu, jehož molekuly mají i stupňů volnosti, je

$$U = NE_\mathrm{ks} = nN_\mathrm{A}\cdot\frac{i}{2}kT = \frac{i}{2}nRT\,.$$

Dvouatomové molekuly mají pět platných stupňů volnosti, protože v kinetické energii se kromě posuvného pohybu uplatňuje ještě rotace okolo dvou os kolmých ke spojnici obou atomů a navzájem. Při volbě souřadné soustavy podle obr. 17b platí

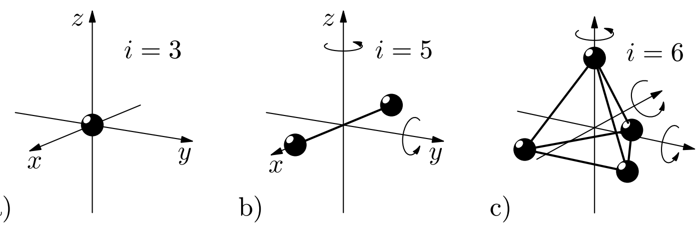
$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v^2 = \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v_x^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v_y^2 + \frac{1}{2}m_\mathrm{m}v_z^2 + \frac{1}{2}J_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}J_z\omega_z^2\,.$$

Vnitřní energie ideálního plynu s dvouatomovými molekulami je tedy

$$U = \frac{5}{2}nRT\,.$$

Tříatomovým a víceatomovým molekulám přisuzujeme šest platných stupňů volnosti, protože ke kinetické energii přispívá rotace okolo tří navzájem kolmých os (obr. 17c). Vnitřní energie plynu s takovýmito molekulami je

$$U = \frac{6}{2}nRT = 3nRT\,.$$



Obr. 17 a) b) c)

Při izochorickém ohřátí plynu je dodané teplo rovno přírůstku vnitřní energie. Platí

$$Q = nC_V\Delta T = \frac{i}{2}nR\Delta T\,.$$

Z toho

$$C_V = \frac{i}{2}R = \begin{cases} \frac{3}{2}R & \text{pro jednoatomové molekuly,} \\ \frac{5}{2}R & \text{pro dvouatomové molekuly,} \\ 3R & \text{pro víceatomové molekuly.} \end{cases}$$

Molární tepelnou kapacitu ideálních plynů určíme z *Mayerova vztahu*:

$$C_p = C_V + R = \frac{i+2}{2}R = \begin{cases} \frac{5}{2}R & \text{pro jednoatomové molekuly,} \\ \frac{7}{2}R & \text{pro dvouatomové molekuly,} \\ 4R & \text{pro víceatomové molekuly.} \end{cases}$$

Poissonovy konstanty ideálních plynů jsou

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \begin{cases} \frac{5}{3} & \text{pro jednoatomové molekuly,} \\ \frac{7}{5} & \text{pro dvouatomové molekuly,} \\ \frac{4}{3} & \text{pro víceatomové molekuly.} \end{cases}$$

Teorie, kterou jsme použili v předcházejících odstavcích, vychází ze zákonů klasické fyziky a je velmi zjednodušená. Přesto poměrně dobře vystihuje vlastnosti většiny běžných plynů při teplotách, které se vyskytují v tepelných motorech. To je zřejmé z hodnot uvedených v následující tabulce.

Tabulky

1. Molární tepelné kapacity a Poissonovy konstanty některých plynů při teplotě 25 °C

Plyn	$\frac{C_V}{\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}}$	$\frac{C_p}{\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}}$	$\frac{C_p - C_V}{\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}}$	$\frac{C_p}{C_V}$
He	12,8	20,8	8,04	1,63
Ne	12,7	20,8	8,12	1,64
Ar	12,6	20,8	8,04	1,65
Kr	12,3	20,8	8,49	1,69
teorie	(12,5)	(20,8)	(8,31)	(1,67)
H_2	20,6	28,9	8,25	1,40
N_2	20,8	29,1	8,33	1,40
O_2	21,1	29,4	8,33	1,40
Cl_2	25,7	34,2	8,46	1,33
teorie	(20,8)	(29,1)	(8,31)	(1,40)
CO_2	28,5	37,0	8,50	1,30
NH_3	28,5	37,3	8,79	1,31
C_2H_6	43,1	51,7	8,58	1,20
teorie	(24,9)	(33,2)	(8,31)	(1,33)

2. Důležité konstanty

Avogadrova konstanta	$N_\mathrm{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Molární plynová konstanta	$R = 8{,}314\ \mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$
Boltzmannova konstanta	$k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$

Výsledky úloh

1. $C_V = \dfrac{3}{2}R, \quad C_p = \dfrac{5}{2}R, \quad \varkappa = \dfrac{5}{3}$. **2.** 0,11. **3.** 0,088. **4.** 0,11. **5.** 0,18.

6. $\eta = 1 - \dfrac{1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} = 0{,}48.$