ELEKTROSTATIKA

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod

Předložené pojednání je dalším ze série studijních textů určených nejen pro řešitele fyzikální olympiády, ale i pro ostatní zájemce o fyziku v hlubším záběru, než který poskytuje střední škola. Zabývá se **elektrostatikou**, tedy oddílem fyziky popisujícím elektrické pole vyvolané elektrickými náboji, které jsou v uvažované pozorovací soustavě v klidu.

Elektrostatické pole je jednoduchou formou obecnějšího **elektromagnetického pole**, které je jedním ze čtyř dosud známých fundamentálních fyzikálních polí, resp. fyzikálních interakcí, pomocí nichž můžeme vysvětlit všechny známé jevy mezi materiálními objekty. Jsou to:

1. gravitační pole (gravitační interakce),
2. leptonové pole (slabá interakce),
3. elektromagnetické pole (elektromagnetická interakce),
4. mezonové pole (silná interakce).

Z těchto polí má první a třetí velký (prakticky neomezený) dosah, kdežto dosah druhého a čtvrtého pole je velmi nepatrný a prakticky je omezen jen na prstor jádra atomu (jeho poloměr je řádu 10^{-15} až 10^{-14} m). Pro úplnost je třeba dodat, že současné fyzice vysokých energií a jaderné fyzice se podařilo najít a experimentálně potvrdit vazbu mezi slabou a elektromagnetickou interakcí a užitím kvantové teorie pole úspěšně popsat integrovanou elektroslabou interakci. Z makroskopického hlediska však i současná fyzika pracuje s uvedenými čtyřmi interakcemi.

Srovnáme-li elektrostatickou a gravitační sílu mezi dvěma protony ve stejné vzdálenosti, zjistíme, že elektrostatická interakce je $1{,}2 \cdot 10^{36}$krát silnější než interakce gravitační. Gravitační interakce se proto může uplatnit jen u velkých makroskopických objektů (řídí např. pohyb planet Sluneční soustavy) a určuje strukturu vesmíru. Naopak elektromagnetická interakce se ve stavbě vesmíru neuplatňuje (celkový náboj vesmíru je nulový) a u makroskopických těles se uplatní, jen když se poruší rovnováha mezi kladnými a zápornými náboji. Dominantní postavení elektromagnetické interakce je až u mikroskopických objektů (určuje strukturu atomového obalu, poutá atomy v molekuly). Zbývající dvě interakce (silná a slabá) se prakticky uplatňují při stavbě jádra atomu a jeho rozpadu a při rozpadu elementárních částic. Silná interakce je 137krát větší než elektromagnetická mezi dvěma protony, kdežto slabá interakce je 10^{11}krát slabší než elektomagnetická a nemůže poutat žádné částice.

Popis elektromagnetického pole v soustavě, v níž jsou jeho zdroje – elektrické náboje – v klidu, je nejjednodušší (stejně tomu tak je i u ostatních polí). Proto výklad o těchto statických jevech podáme nejprve. Budou-li se zdrojové částice pole v pozorovací soustavě pohybovat, musíme provést relativistickou transformaci příslušných interakcí a dostaneme pole dynamické. Druhým stupněm výkladu o elektromagnetickém poli je tedy **elektrodynamika**, která bude předmětem dalšího studijního textu.

I když by se zdálo, že elektrostatické jevy jsou jednoduché a nezajímavé, není tomu tak. To pozná čtenář po prostudování předloženého textu. Z elektrostatiky je možné sestavit i řadu zajímavých úloh. Proto je studijní text doplněn 52 problémy. Z toho je 13 řešených příkladů zařazeno do textu a je zadáno 39 úloh s uvedenými výsledky řešení, případně u obtížnějších i s naznačeným nebo úplným řešením.

1 Elektrostatické pole ve vakuu

1.1 Elektrický náboj

Tělesa, která se běžně vyskytují v přírodě, jeví pouze gravitační interakci; jsou **elektricky neutrální**. Za určitých okolností však mohou na sebe vzájemně působit ještě jinými silami než gravitačními, závislými stejným způsobem na vzdálenosti, jsou-li ve stavu, který nazýváme **elektrický**. Do toho stavu přecházejí zelektrováním (např. třením nebo elektrickou indukcí). Na rozdíl od gravitačních sil mohou být elektrické síly přitažlivé i odpudivé.

Pokusy již v 17. století ukázaly, že existují dva druhy elektřiny. Elektřina, která vzniká třením tyče z olovnatého skla amalgamovanou kůží nebo hedvábím, se nazvala **kladná**. Elektřina, která vzniká třením tyče z ebonitu (tvrdého kaučuku) srstí, se nazvala **záporná**. Experimentálně lze snadno zjistit, že souhlasně nabité tyče se vzájemně odpuzují a nesouhlasně nabité tyče se vzájemně přitahují.

Ke kvantitativnímu vyjádření elektrického stavu materiálních objektů (těles nebo částic) se zavádí **elektrický náboj** jako míra vlastnosti materiálního objektu působit na jiný materiální objekt silou související s polohou vzhledem k němu a závislou na elektrickém stavu obou materiálních objektů. Protože nositelem elektromagnetické interakce je elektromagnetické pole, můžeme elektrický náboj definovat jako míru schopnosti materiálního objektu vytvářet elektrické pole. Náboj má dvojí polaritu, je **kladný** nebo **záporný**. Náboje stejné polarity se odpuzují, náboje různé polarity se přitahují.

Náboj neexistuje samostatně; je vždy **vázán na látku**, resp. na **částice**. Nositelem kladných nábojů jsou ze stabilních částic **protony** a částice α, nositelem záporných nábojů **elektrony**. U elektricky neutrálních těles se působení kladných a záporných nábojů vzájemně kompenzuje. Kladně nabité těleso obsahuje nekompenzované kladné náboje, záporně nabité těleso nekompenzované záporné náboje.

Jednotkou náboje v soustavě SI je 1 C (coulomb) = 1 A $\cdot$ s. Náboj označujeme Q, případně q.

Pro elektrické náboje platí tyto základní zákony:

1. **Zákon zachování náboje:** v izolované soustavě se celkový náboj zachovává; náboj není možné vytvořit ani zničit.

2. **Zákon kvantování náboje:** všechny náboje, kladné i záporné, jsou celist-

vými násobky dále nedělitelného [1] elementárního náboje

$$e = 1{,}602\,189\,2 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\,.$$

Nositelem kladného elementárního náboje je proton, záporného elementárního náboje elektron.

3. **Zákon invariantnosti náboje:** velikost náboje je – na rozdíl od hmotnosti – invariantní, tj. nezávislá na rychlosti pohybu nabité částice v pozorovací soustavě.

4. **Elektrický náboj vesmíru je nulový**, tj. algebraický součet všech nábojů ve vesmíru je nulový. (Žádná astronomická ani astrofyzikální pozorování nenasvědčují, že by tomu tak nemělo být.)

Při řešení problémů elektrostatiky se setkáváme s těmito modely nábojů (ve skutečnosti mají náboje diskrétní charakter a jejich nositelé konečné rozměry, i když makroskopicky zanedbatelné):

1. **Náboj bodový** – rozměry jejich nositelů (částic) zanedbáváme.

2. **Náboj čárový** – náboj uvažujeme spojitě rozložený na čáře s délkovou (lineární) hustotou
$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}\,. \tag{1}$$

3. **Náboj plošný** – náboj uvažujeme spojitě rozložený na ploše s plošnou hustotou
$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}\,. \tag{2}$$

4. **Náboj prostorový** – náboj uvažujeme spojitě rozložený v prostoru s objemovou (prostorovou) hustotou
$$\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}\,. \tag{3}$$

[1] **Kvarkový model hadronů** (tj. částic podléhajících silné interakci, mezi něž patří především proton a neutron), experimentálně potvrzený (1973), pracuje s **kvarky**. Jsou to částice, které mají třetinové elementární náboje $-e/3$, $-2e/3$, $e/3$, $2e/3$. Podle současných názorů však nelze hadrony na kvarky rozštěpit (tzv. teorie o uvěznění kvarku v hadronu).

1.2 Coulombův zákon

Interakce mezi dvěma elektricky nabitými částicemi se projevuje silově. Ve zvlášť jednoduchém případě, kdy jsou oba náboje v pozorovací soustavě v klidu, jde o **elektrickou interakci**, která je pro dva **bodové** náboje Q, q, nacházející se ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti r, popsána **Coulombovým zákonem** (1785):

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{r^2}\,\boldsymbol{r}^0\,,} \tag{4}$$

kde $\boldsymbol{F}$ je síla, kterou působí náboj Q (zdrojový) na náboj q (testovací), $\boldsymbol{r}^0$ je jednotkový vektor vedený od Q k q a

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi\{c\}^2}\ \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{N}^{-1} = 8{,}854\,187\,818\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

je permitivita vakua a $\{c\}$ je číselná hodnota rychlosti světla ve vakuu v soustavě SI. Mezi jednotkami platí vztah $\mathrm{C}^2\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{N}^{-1} = \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, kde F (farad) = $= \mathrm{C}^2\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{N}^{-1} = \mathrm{C}\cdot\mathrm{V}^{-1}$ je jednotka kapacity a V (volt) = $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{C}^{-1} = \mathrm{J}\cdot\mathrm{C}^{-1}$ je jednotka potenciálu elektrického pole.

Pro výpočet síly, kterou na sebe působí jiné náboje než bodové, je nutné nejprve vyjádřit element síly mezi elementy těchto nábojů a pak provést integraci přes uvažované nebodové náboje.

Coulombův zákon (4) jsme formulovali pro statickou soustavu bodových nábojů. Jeho platnost můžeme rozšířit i na důležitý případ, kdy zdrojový náboj Q sice zůstává v pozorovací soustavě v klidu, avšak testovací náboj q se pohybuje libovolnou rychlostí $u < c$. Vyplývá to ze zákona invariantnosti náboje a je v souladu s pozorováním (experimentálně byla tato skutečnost potvrzena s relativní přesností až 10^{-20}). Budou-li v pozorovací soustavě oba náboje v pohybu, změní se elektrostatické pole zdrojového náboje na pole elektromagnetické a síla mezi náboji na sílu *Lorentzovu* (ke Coulombově síle přistoupí síla magnetická). Výklad těchto jevů bude předmětem **elektrodynamiky**.

1.3 Intenzita elektrického pole

Interakce mezi elektrickými náboji se neděje přímo, nýbrž prostřednictvím elektromagnetického pole, které se v okolí nábojů vytváří. V pozorovací soustavě, v níž je náboj v klidu, je toto pole elektrostatické. V okolí každého elektrického náboje existuje tedy pole, o němž se můžeme jednoduše přesvědčit tím, že do uvažovaného místa umístíme jiný – testovací (zkušební, pokusný) – náboj. Na náboj bude působit elektrická síla a v místě testovacího náboje existuje elektrické pole. Toto pole lze popsat jednak silově, jednak energeticky. První popis vede k veličině intenzita elektrického pole, druhý k veličině potenciál elektrického pole.

Intenzitu elektrického pole definujeme jako sílu, kterou působí elektrické pole v uvažovaném místě na kladný jednotkový náboj. Je-li v tomto místě pole testovací náboj q, bude intenzita

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q}, \qquad [E] = \mathrm{N} \cdot \mathrm{C}^{-1} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{m}^{-1}\,.} \tag{5}$$

Aby testovací náboj q neovlivnil rozložení zdrojového náboje, je-li nebodový, definuje se intenzita vztahem

$$\boldsymbol{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{q}\,.$$

Můžeme-li zdrojový objekt považovat za bodový, bude výraz pro výpočet intenzity jednoduchý:

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}^0\,. \tag{6}$$

Pro elektrické pole platí **princip superpozice**: intenzita elektrického pole, složeného z několika dílčích polí, je dána sumací intenzit těchto polí podle pravidel vektorového součtu:

$$\boldsymbol{E} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{E}_k\,. \tag{7}$$

Je-li náboj na objektu rozložen spojitě, vyjádříme nejprve intenzitu elektrického pole jeho vhodného elementu, přičemž posuzujeme jednak velikost, jednak směr intenzity při změně jeho polohy a pak integrujeme přes celý objekt. Postupujeme zpravidla individuálně, jak vyplývá z následujících příkladů 1, 2, 3 a z některých úloh.

Příklad 1 – intenzita pole nabité kružnice

Kružnice (resp. tenký vodivý kruhový prstenec) o poloměru R je rovnoměrně nabita nábojem Q. Vypočtěte intenzitu elektrického pole na její ose totožné s osou x, přičemž počátek souřadnicové osy položte do středu kružnice.

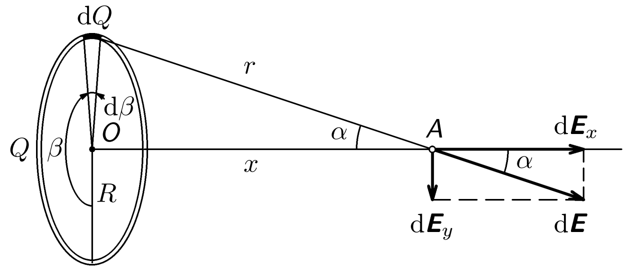
Řešení

Náboj je rozložen s délkovou hustotou $\tau = Q/2\pi R$ =konst. Na kružnici uvažujme element $R\,\mathrm{d}\beta$, na kterém je náboj

$$\mathrm{d}Q = \tau R\,\mathrm{d}\beta = Q\frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi}\,.$$

Pro jeho vzdálenost od bodu A na ose (obr. 1) a úhel α platí

$$r = \sqrt{R^2 + x^2}\,, \quad \cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\,.$$



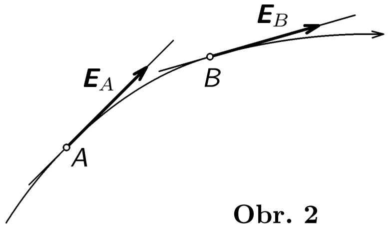
Obr. 1

Intenzitu $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ pole o velikosti $\mathrm{d}E = \mathrm{d}Q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ rozložíme na dvě kolmé složky $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$, $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$, přičemž ke každému elementu kružnice lze najít protilehlý element, pro nějž se složky $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_y$ vzájemně vyruší a složky $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_x$ o velikosti $\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\cos\alpha$ sečtou. Integrací pro celou kružnici dostaneme

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\beta}{2\pi} = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(R^2 + x^2)^3}}, \qquad E_y = 0\,. \qquad (8)$$

Pro body na ose, pro něž $x \gg R$, můžeme výsledek (8) zjednodušit do tvaru $E_x = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$. Intenzita pole je tedy stejná jako kdyby náboj Q byl soustředěn ve středu kružnice.

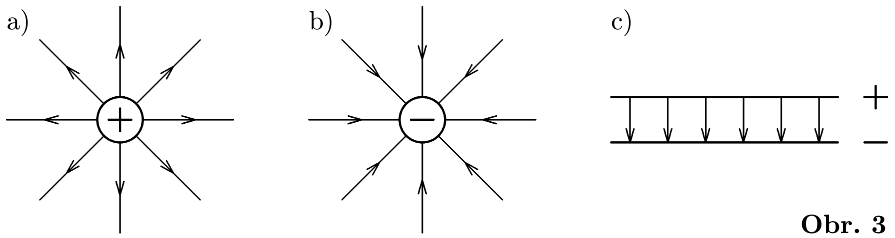
1.4 Tok intenzity elektrického pole



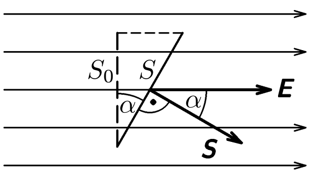
Obr. 2

Elektrické pole můžeme vhodně znázornit pomocí siločar. **Siločárou** v elektrickém poli nazýváme myšlenou orientovanou čáru vedenou tak, že tečna v kterémkoliv jejím bodě má směr vektoru intenzity elektrického pole v tomto bodě (obr. 2). Hustota čar se volí tak, aby byla úměrná velikosti intenzity v uvažovaném místě pole.

K nejjednodušším tvarům polí patří pole **radiální**, které vytváří např. osamocený bodový náboj, přičemž u kladného náboje je toto pole rozbíhavé (obr. 3a), u záporného náboje je toto pole sbíhavé (obr. 3b). Homogenní pole má rovnoběžné, stejně husté siločáry (obr. 3c).



Obr. 3



Obr. 4

Z představy siločar se zavádí **tok intenzity elektrického pole** Φ_e jako veličina, jejíž velikost je úměrná celkovému počtu siločar, které procházejí uvažovanou plochou v poli. Pro homogenní pole (obr. 4) tok rovinnou plochou S je

$$\Phi_\mathrm{e} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S} = ES\cos\alpha\,, \tag{9}$$

kde $S\cos\alpha = S_0$ je průmět plochy S do směru kolmého k siločárám. Tečkou ve výrazu (9) vyjadřujeme skalární součin dvou vektorů.

Je-li pole nehomogenní je nutné vyjádřit tok intenzity elementu plochy a provést integraci přes celou plochu:

$$\Phi_\mathrm{e} = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,. \tag{10}$$

Tok vektoru intenzity je zřejmě skalární veličina.

1.5 Gaussův zákon

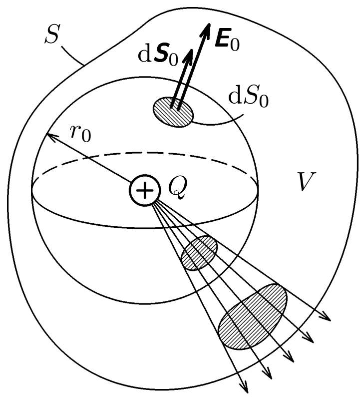
Vypočtěme nejprve tok intenzity radiálního elektrického pole uzavřenou kulovou plochou se středem v místě náboje o obsahu $S_0 = 4\pi r_0^2$ (obr. 5). Protože podle Coulombova zákona má intenzita $\boldsymbol{E}_0$ v libovolném bodě této plochy stálou velikost

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$$

a směr shodný se směrem normály v tomto bodě, bude tok intenzity uzavřenou plochou

$$\Phi_\mathrm{e} = E_0 S_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} 4\pi r_0^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,. \tag{11}$$

Tok je tedy nezávislý na poloměru r_0 a tudíž i na poloze náboje Q uvnitř kulové plochy.



Obr. 5

Zvolíme-li místo kulové plochy obecnou uzavřenou plochu kolem náboje Q, musí z ní vycházet stejný počet siločar jako z kulové plochy (obr. 5). Protože celkový tok intenzity plochou S opět nemůže záviset na poloze náboje Q, můžeme si uvnitř uzavřené plochy představit n bodových nábojů a podle principu superpozice bude celkový tok intenzity uzavřenou plochou dán algebraickým součtem (tok je skalár) toků od jednotlivých nábojů. Tedy

$$\boxed{\Phi_\mathrm{e} \equiv \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} Q_i \equiv \frac{Q}{\varepsilon_0}\,,} \tag{12}$$

kde kroužek u symbolu integrálu vyjadřuje integraci přes uzavřenou plochu S.

Náboj může být uvnitř objemu V vymezeného uzavřenou plochou S rozložen spojitě s objemovou hustotou ϱ. Pak bude mít výsledek (12) tvar

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho \,\mathrm{d}V\,.} \tag{13}$$

Bude-li náboj uvnitř objemu V rozložen spojitě na křivce délky L nebo na ploše obsahu A vypočteme jeho celkovou velikost užitím hustoty dané vztahem (1) příp. (2):

$$Q = \int_L \tau \,\mathrm{d}l\,, \quad Q = \int_A \sigma \,\mathrm{d}S\,. \tag{14}$$

Výsledky (12) a (13) vyjadřují **Gaussův zákon** elektrostatiky pro vakuum v integrálním tvaru:

Celkový tok intenzity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou se rovná celkovému náboji v prostoru, který uzavírá tato plocha, dělenému permitivitou vakua.

Gaussův zákon v integrálním (a zejména v diferenciálním) tvaru tvoří jednu ze čtyř hlavních Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. Je přímým důsledkem Coulombova zákona.

Vedle tohoto základního významu Gaussova zákona je jeho význam i pro výpočet intenzit elektrických polí některých soustav nábojů. Jde o případy, kdy známe (nebo dovedeme odhadnout) tvar řešeného pole, resp. rozložení siločar.

Pak volíme uzavřenou plochu S tak, aby procházela bodem, kde určujeme intenzitu a vedeme ji tak, aby byla kolmá na siločáry nebo rovnoběžná s nimi. Pak se snadno počítá tok intenzity uzavřenou plochou. Použití Gaussova zákona uvidíme na následujících příkladech a úlohách a posoudíme jeho přednosti.

Příklad 2 – intenzita pole nabité přímky

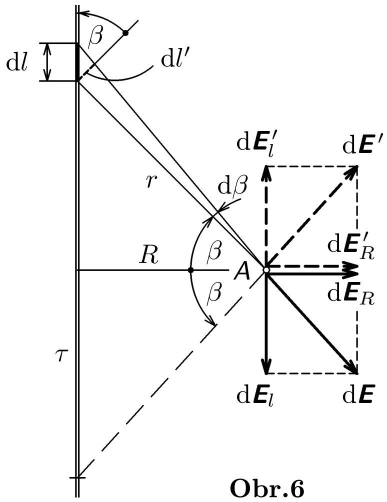
Vypočtěte intenzitu elektrického pole v bodě A ve vzdálenosti R od přímky nabité kladným nábojem rozloženým s konstantní délkovou hustotou τ

a) z definice intenzity,

b) užitím Gaussova zákona.

Řešení

a) *Užitím definice*



Obr.6

Z přímky vytkneme obecně uložený element délky $\mathrm{d}l$, na němž je náboj

$$\mathrm{d}Q = \tau\,\mathrm{d}l\,.$$

Tento náboj vyvolá v bodě A ve vzdálenosti r pole o intenzitě $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$, kterou rozložíme na složky $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_R$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_l$. Ke každému elementu na jedné polopřímce lze nalézt na druhé polopřímce souměrně položený takový element, že složka $\mathrm{d}\boldsymbol{E}'_l$ jeho intenzity $\mathrm{d}\boldsymbol{E}'$ se právě vyruší se složkou $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_l$. Složky $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_R$, $\mathrm{d}\boldsymbol{E}'_R$, se algebraicky sečtou. Pro velikost intenzity $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_R$ platí

$$\mathrm{d}E_R = \mathrm{d}E\cos\beta = \frac{\tau\,\mathrm{d}l\cos\beta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,.$$

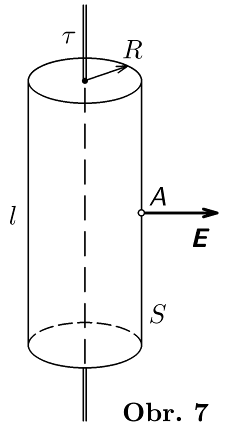
Tento výraz upravíme užitím geometrických vztahů

$$\mathrm{d}l' = \mathrm{d}l\cos\beta = r\,\mathrm{d}\beta, \quad r = \frac{R}{\cos\beta}$$

a výslednou intenzitu dostaneme integrací podle proměnného úhlu β v mezích $-\pi/2\,,\ \pi/2$:

$$E = E_R = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\beta\,\mathrm{d}\beta = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\,. \tag{15}$$

b) *Řešení užitím Gaussova zákona* je velmi jednoduché.



Obr. 7

Snadno odhadneme, že siločáry pole nabité přímky budou polopřímky, které jsou kolmé k nabité přímce a radiálně se od ní rozbíhají. Jako uzavřenou plochu bude tedy vhodné zvolit válcovou plochu o poloměru R a délce l s podstavami rovnoběžnými se siločárami. Siločáry budou také kolmé k povrchovým přímkám pláště válce (obr. 7). Celkový tok intenzity povrchem válce tedy bude $\Phi_\mathrm{e} = 2\pi RlE$. Válec uzavírá náboj τl. Použijeme-li nyní Gaussův zákon (12) dostaneme

$$2\pi RlE = \frac{1}{\varepsilon_0}\tau l$$

a odtud plyne výsledek (15).

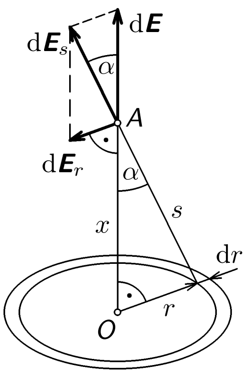
Příklad 3 – intenzita pole nabité roviny

Vypočtěte intenzitu elektrického pole vzbuzeného nábojem rovnoměrně rozděleným na rovině s plošnou hustotou σ. Řešte užitím:

a) definice intenzity,
b) Gaussova zákona.

Řešení

a) Vyjádříme nejprve intenzitu pole elementu, za který vhodně zvolíme kruhový prstenec (obr. 8) o poloměru r a šířce $\mathrm{d}r$, na kterém je náboj $\mathrm{d}Q = 2\pi r\sigma\,\mathrm{d}r$.



Obr. 8

Složky $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_r$ intenzity $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_s$ se pro celý prstenec vyruší a uplatní se jen složka $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ o velikosti

$$\mathrm{d}E = \mathrm{d}E_s\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 s^2}\cos\alpha\,. \qquad (16)$$

Za integrační proměnnou zvolíme úhel α.
Geometrické vztahy:

$$r = x\,\mathrm{tg}\,\alpha\,, \quad s = \frac{x}{\cos\alpha}\,, \quad \mathrm{d}r = \frac{x\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha}\,.$$

Po dosazení do výrazu (16) dostaneme

$$\mathrm{d}E = \frac{2\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0} x \operatorname{tg}\alpha \frac{\cos^2\alpha}{x^2} \frac{x\,\mathrm{d}\alpha}{\cos^2\alpha} \cos\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

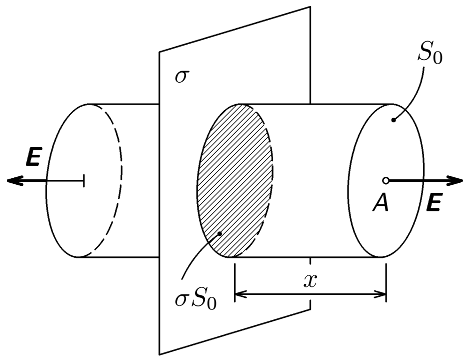
Elementy pokryjí celou rovinu pro $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Integrací tedy dostaneme

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Big[-\cos\alpha \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,. \tag{17}$$

b) Užitím Gaussova zákona dospějeme k výsledku opět rychleji. Siločáry pole jsou zřejmě kolmé k nabité rovině. Za uzavřenou plochu S výhodně zvolíme válcovou plochu protínající nabitou rovinu (obr. 9), přičemž její podstava má plošný obsah S_0. Celkový tok intenzity válcovou plochou je $\Phi_\mathrm{e} = 2S_0E$, uzavřený náboj je $Q = \sigma S_0$. Z Gaussova zákona (12) plyne

$$2S_0E = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0}.$$

Odtud přímo plyne výsledek (17). Intenzita elektrického pole v bodě A zřejmě nezávisí na jeho poloze x vzhledem k nabité rovině.



Obr. 9

Příklad 4 – intenzita pole nabité dielektrické koule

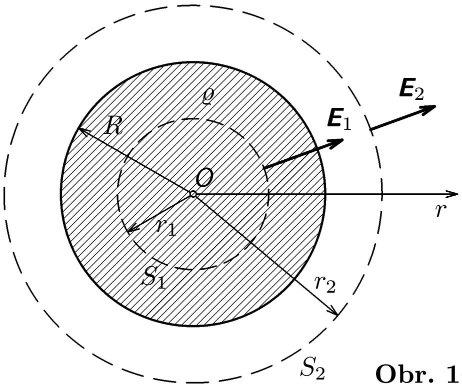
Dielektrická koule o poloměru R a permitivitě $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ je rovnoměrně nabita prostorovým nábojem Q. Vypočtěte závislost velikosti intenzity elektrického pole na vzdálenosti r od jejího středu, tj. $E = E(r)$, pro všechna r.

Řešení

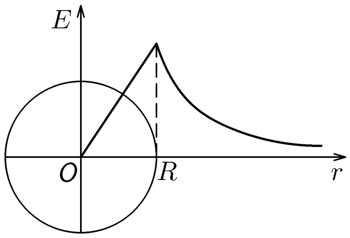
K výpočtu využijeme Gaussův zákon. Náboj je rozdělen objemovou hustotou

$$\varrho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = \text{konst.}$$

Pole soustavy je radiální, proto za uzavřenou plochu S zvolíme kulovou plochu o proměnném poloměru r. Existují dvě oblasti tohoto pole (obr. 10).



Obr. 10



Obr. 11

1. $0 \leq r \leq R$: Plocha S_1 uzavírá náboj $Q_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho$, jehož velikost vzrůstá s r. Pak podle (12) je

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho\,, \qquad \text{neboli} \qquad E_1 = \frac{\varrho}{3\varepsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r.$$

Uvnitř koule vzrůstá intenzita pole lineárně se souřadnicí r (obr. 11).

2. $r > R$: Plocha S_2 uzavírá náboj $Q_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho = Q$, který je již na r nezávislý. Pak podle (12) je

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 \varrho\,, \qquad \text{neboli} \qquad E_2 = \frac{\varrho R^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

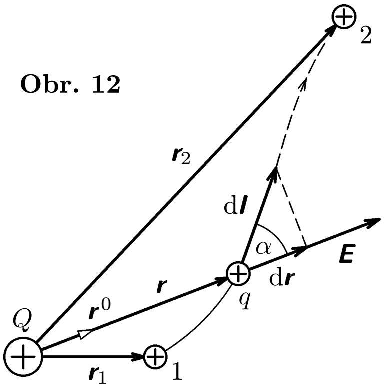
Intenzita pole vně koule klesá se druhou mocninou (viz obr. 11) podle stejného vztahu jako u bodového náboje – viz výraz (6). **Vně rovnoměrně nabité koule má tedy pole stejný tvar jako pole bodového náboje umístěného v jejím středu.**

1.6 Práce síly elektrického pole při přemísťování náboje

Protože na každý náboj q působí v elektrickém poli síla $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$, vykoná pole při jeho posunutí o $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ elementární práci $\mathrm{d}A = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.

Uvažujme nejprve elektrické pole **jednoho bodového náboje**. Toto pole je radiální – má směr průvodiče $\boldsymbol{r}$: $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{r}^0$. Pak elementární práce

Obr. 12



$$\mathrm{d}A = qE\boldsymbol{r}^0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = qE\,\mathrm{d}r,$$

kde $\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha = \boldsymbol{r}^0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ je velikost průmětu elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ trajektorie náboje do směru intenzity $\boldsymbol{E}$ v uvažované poloze náboje (obr. 12). Element práce $\mathrm{d}A$ tedy nezávisí na sklonu elementu trajektorie a celková práce, kterou pole vykoná při přemístění náboje z polohy 1 ($\boldsymbol{r}_1$) do polohy 2 ($\boldsymbol{r}_2$) je

$$\boxed{A = q\int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q\int_{r_1}^{r_2} E(r)\,\mathrm{d}r.} \tag{18}$$

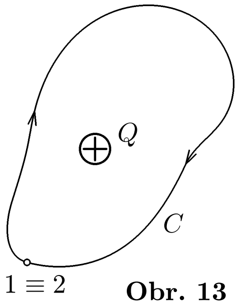
Tato práce nezávisí na tvaru trajektorie mezi body 1 a 2. Dosadíme-li do (18) za intenzitu z (6) dostaneme

$$A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{19}$$

Předchozí úvaha platila pro jeden bodový náboj. Půjde-li o **soustavu bodových nábojů** můžeme v uvažované poloze náboje q počítat elementy práce od jednotlivých zdrojových nábojů. Tyto elementy práce můžeme algebraicky sečíst, protože práce je skalární veličina. U soustav se spojitě rozloženým nábojem výše uvažované součty přecházejí v integrály.

Pole, u kterého práce mezi dvěma libovolnými body nezávisí na tvaru trajektorie přemísťované částice, se nazývá **konzervativní**. Elektrostatické pole tuto podmínku podle (18) splňuje a je tedy konzervativní. Vykonáme-li přemístění po uzavřené křivce C a bude-li tedy konečná poloha totožná s polohou výchozí (obr. 13), bude celková práce nulová:

$$A = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = q\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,,$$



Obr. 13

neboli (po dělení $q \neq 0$)

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0\,,} \tag{20}$$

kde kroužek u symbolu integrálu vyjadřuje, že jde o křivkový integrál po uzavřené křivce C.

1.7 Elektrostatická energie náboje, potenciál elektrického pole

Práci, kterou pole vykoná při přemístění náboje mezi body 1, 2 lze vyjádřit jako rozdíl hodnot jisté veličiny pole, která je funkcí pouze polohy náboje v tomto poli. Dobře to můžeme vidět na výsledku (19). Nově zavedená veličina se nazývá **potenciální (polohová) energie náboje v elektrostatickém poli** a označuje se W_e [2]. Tedy

$$A = q \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = W_{e1} - W_{e2}. \tag{21}$$

V poli bodového náboje Q má tudíž testovací náboj q v obecné poloze potenciální energii

$$W_\mathrm{e} = q\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{22}$$

Výraz (21) určuje potenciální energii až na konstantu, kterou lze vhodně volit podle okrajové podmínky pro výpočet potenciální energie. Volíme-li potenciální energii nulovou v bodě neomezeně vzdáleném, říkáme, že **potenciální energii normujeme**. To je případ výrazu (22), z něhož je zřejmé, že pro $r \to \infty$ je $W_\mathrm{e} = 0$.

Potenciální energie testovacího náboje q v elektrickém poli závisí jednak na mohutnosti zdroje (dané zdrojovým nábojem a polohou testovací částice), jednak na testovacím náboji q. Je výhodné vztáhnout tuto potenciální energii na kladný jednotkový testovací náboj a využít ji k energetickému popisu elektrického pole. Příslušná veličina se nazývá **potenciál elektrického pole** φ a definuje se jako elektrostatická energie W_e testovacího náboje v určitém

[2] Označení W pro energii se v teorii elektromagnetického pole dává přednost před označením E, aby nedocházelo ke kolizi s označením pro intenzitu elektrického pole. Práce se označuje A místo W.

bodě pole dělená tímto nábojem q. Neboli je to práce, kterou pole vykoná při vzdálení kladného jednotkového testovacího náboje z uvažovaného bodu pole do nekonečna. Tedy **normovaný potenciál**

$$\boxed{\varphi = \frac{W_\mathrm{e}}{q} = \int\limits_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\,.} \tag{23}$$

Pro normovaný potenciál **bodového náboje** užitím vztahu (22) dostaneme

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,.} \tag{24}$$

Pro soustavu bodových nábojů provedeme skalární superpozici potenciálů jednotlivých nábojů Q_k v polohách r_k od uvažovaného bodu pole a dostaneme

$$\boxed{\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{r_k}\,.} \tag{25}$$

Analogicky postupujeme, je-li zdrojový náboj spojitě rozložen na čáře, ploše nebo v prostoru s příslušnými hustotami τ, σ, resp. ϱ:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_L \frac{\tau\,\mathrm{d}l}{r}\,. \tag{26}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{\sigma\,\mathrm{d}S}{r}\,. \tag{27}$$

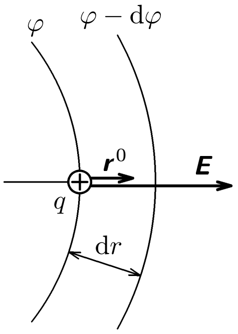
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\varrho\,\mathrm{d}V}{r}\,. \tag{28}$$

kde r je vzdálenost určitého elementu náboje od místa, kde určujeme potenciál jeho pole.

Pro znázornění pole užíváme vedle siločár i ploch stejného potenciálu neboli **ekvipotenciálních ploch**, označovaných rovněž jako **hladiny potenciálu**. Mezi dvěma libovolnými body určité hladiny je rozdíl potenciálu nulový a práce při přemístění po hladině je nulová. Pro hladinu tedy platí $qE\,\mathrm{d}s\cos\alpha = 0$, tj. $\cos\alpha = 0$ a tudíž $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Z toho tedy plyne, že $\boldsymbol{E}$ je kolmá k hladině. Siločáry jsou tedy v bodech ekvipotenciálních ploch kolmé k těmto plochám. Je zřejmé, že ekvipotenciálními plochami radiálního pole (obr. 3a, b) jsou kulové plochy a homogenního pole (obr. 3c) roviny rovnoběžné v uvažovaném případě s nabitými deskami.

Jednotka potenciálu: $[\varphi] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{C}^{-1} = \mathrm{V}$ (volt).

1.8 Souvislost potenciálu a intenzity elektrického pole



Obr. 14

Ze silového popisu elektrického pole jsme dospěli k **intenzitě** elektrického pole a z energetického popisu k **potenciálu** elektrického pole. Abychom našli souvislost mezi těmito veličinami, představme si, že na hladině potenciálu $\varphi = \varphi(r)$ je bodový testovací náboj q (obr. 14), který zde má potenciální energii $q\varphi$.
Pole působí na náboj silou $q\boldsymbol{E}$. Posune-li se náboj o $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ve směru kolmém k hladině φ na hladinu $\varphi - \mathrm{d}\varphi$, vykoná pole práci $q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, která se projeví úbytkem potenciální energie náboje. Tato energie v jeho nové poloze bude $q(\varphi - \mathrm{d}\varphi)$. Musí tedy platit

$$q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -q\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{29}$$

Vzhledem k tomu, že u radiálního pole je

$$\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{r}^0\,, \quad \text{a dále} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^0\,\mathrm{d}r\,, \quad \boldsymbol{r}^0 \cdot \boldsymbol{r}^0 = 1\,,$$

je $\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E\,\mathrm{d}r$ a ze vztahu (29) plyne

$$\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\varphi\,, \tag{30}$$

neboli

$$E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\,.$$

Po vynásobení rovnice jednotkovým vektorem $\boldsymbol{r}^0$ dostaneme hledaný vztah pro radiální pole

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\boldsymbol{r}^0\,.} \tag{31}$$

Protože $\mathrm{d}r$ je nejmenší vzdálenost mezi hladinami φ a $\varphi - \mathrm{d}\varphi$, je $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}$ největší spád (gradient) potenciálu. Vztah, který slouží k převodu mezi veličinami $\boldsymbol{E}$, φ, říká, že **intenzita elektrického pole je dána největším spádem potenciálu**, neboli záporně vzatým gradientem potenciálu.

Odvozený vztah (31) platí pro jednoduchý případ, kdy potenciál je funkcí $\varphi = \varphi(r)$, závisí-li jen na velikosti polohového vektoru $\boldsymbol{r}$. U rovinných úloh (viz např. dipól v následujícím příkladě 5) je potenciál funkcí dvou nezávisle proměnných poloh bodu, za které je vhodné volit **polární souřadnice** r, α. Pak je potenciál funkcí $\varphi = \varphi(r, \alpha)$. Z této funkce lze určit užitím parciálních derivací polární souřadnice vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$ ze vztahů, které uvádíme bez odvození (to lze najít např. v učebnici [2], str. 70):

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\,, \quad E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\,. \tag{32}$$

Potenciál lze též vyjádřit jako funkci **kartézských souřadnic** bodu pole, je-li popsán funkcí $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Při odvození hledaných výrazů vyjdeme ze vztahu (29) po dělení $q \neq 0$, kde skalární součin na levé straně vyjádříme pomocí kartézských souřadnic vektorů $\boldsymbol{E}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, rozepíšeme úplný diferenciál $\mathrm{d}\varphi$ vpravo a dostaneme

$$E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right).$$

Porovnáním koeficientů u diferenciálů $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ dostaneme kartézské souřadnice vektoru intenzity $\boldsymbol{E}$ užitím parciálních derivací potenciálu podle x, y, z:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}\,, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\,. \tag{33}$$

Vztah (31) případně (32) a (33) slouží k výpočtu intenzity známe-li potenciál elektrického pole. To je často výhodný postup, protože potenciál jako skalární veličina se snadněji počítá. Můžeme jej získat integrací některého ze vztahu (26) až (28). Vypočteme-li naopak snadněji intenzitu elektrického pole např. užitím Gaussova zákona, vypočteme potenciál integrací vztahu (29):

$$\boxed{\varphi = -\int \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + C\,,} \tag{34}$$

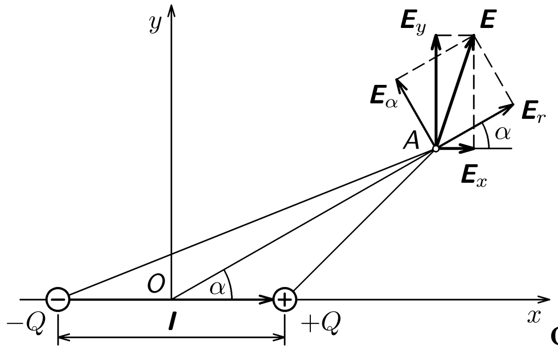
kde integrací konstantu C vypočteme z okrajové podmínky, tj. volíme pro určité r velikost potenciálu. Zpravidla volíme $\varphi = 0$ pro $r \to \infty$ (pak je potenciál normovaný), avšak podle úlohy může být volba i jiná, např. $\varphi = 0$ pro $r = 0$. Integrál ve vztahu (34) je **neurčitý**.

Přemístíme-li jednotkový náboj mezi dvěma body pole o potenciálu φ_1, φ_2 vykoná pole práci, kterou dostaneme jako rozdíl potenciálů v uvažovaných bodech. Tento **rozdíl potenciálů se označuje jako elektrické napětí** U. Vzhledem k (34) dostaneme

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.} \tag{35}$$

Příklad 5 – elektrické pole dipólu

Uvažujte elektrický dipól, tj. soustavu dvou nábojů $-Q$, $+Q$ umístěných v koncových bodech orientované úsečky $\boldsymbol{l}$, který je uložen v kartézské soustavě podle obr. 15. Vypočtěte potenciál φ v libovolném bodě A (x, y) resp. $A(r, \alpha)$ roviny (x, y). Dále uvažujte polohu bodu A, jejíž polární souřadnice $r \gg l$, a určete v něm potenciál a kartézské a polární souřadnice intenzity $\boldsymbol{E}$. Specializujte jejich hodnoty pro dvě významné polohy $y = 0$ a $x = 0$, resp. $\alpha = 0$ a $\alpha = \pi/2$.



Obr. 15

Řešení

Užitím principu superpozice pro **potenciál** v bodě A dostaneme

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{36}$$

kde pro r_1 a r_2 podle obr. 15 platí

$$r_1^2 = \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2, \quad r_2^2 = \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2.$$

Pak potenciál

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}}\right]. \tag{37}$$

V prakticky významném případě, kdy $r \gg l$, můžeme vztah (36) přepsat do tvaru

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(r_2 - r_1) \approx \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha, \tag{38}$$

neboť $r_1 - r_2 \approx l\cos\alpha$, přičemž $p = Ql$ je velikost **elektrického momentu** $\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{l}$ dipólu. Protože $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$ a $r^2 = x^2 + y^2$, můžeme výraz (38) přepsat do tvaru s kartézskými souřadnicemi:

$$\varphi = \frac{px}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{39}$$

Souřadnice vektoru $\boldsymbol{E}$ **intenzity elektrického pole** vypočteme derivací výrazů (39) a (38) užitím vzorců (33) a (32):

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{p(2x^2-y^2)}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,,\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{3pxy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}\,. \tag{40}$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{p\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\,,\quad E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{p\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,. \tag{41}$$

Pro výslednou intenzitu v bodě A užitím složek (41) dostaneme

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\alpha^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\,. \tag{42}$$

Pro $y = 0$ (bod A je na ose dipólu) je $x = r$, $\alpha = 0$ a intenzita má souřadnice

$$E_x = E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\,,\quad E_y = E_\alpha = 0\,.$$

Pro $x = 0$ (bod A je na ose souměrnosti dipólu) je $y = r$, $\alpha = \pi/2$ a intenzita má souřadnice

$$E_x = -E_\alpha = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,,\quad E_y = E_r = 0\,.$$

Příklad 6 – elektrické pole nabité kulové plochy

Vypočtěte potenciál a intenzitu elektrického pole uzavřené kulové plochy o poloměru R rovnoměrně nabité kladným nábojem o plošné hustotě $\sigma =$ konst. Funkce $\varphi = \varphi(r)$, $E = E(r)$ určete pro všechna r.

Poznámka: Popsaný případ je modelem situace u nabité vodivé koule, u níž se náboj v důsledku vzájemné odpudivosti rozloží jen na povrchu koule.

Řešení

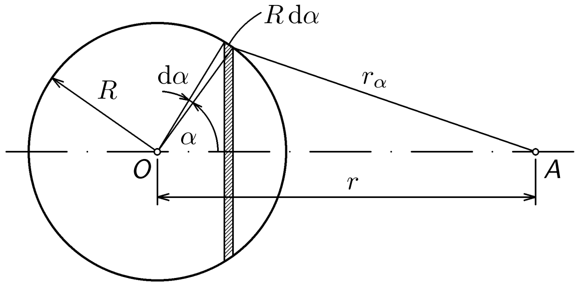
Nejprve vypočteme **potenciál** kulové plochy integrací elementu plochy užitím vztahu (27). Zvolme si bod A, v němž budeme pole určovat, nejprve *vně plochy* (obr. 16). Za element si vhodně zvolíme prstenec elementární šířky tak, aby byl kolmý k ose jdoucí středem O a bodem A. Na elementu je náboj

$$\mathrm{d}Q = \sigma(2\pi R \sin\alpha)(R\,\mathrm{d}\alpha) = 2\pi R^2 \sigma \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,. \tag{43}$$

Náboj je ve vzdálenosti r_α od bodu A, přičemž podle kosinové věty platí
$r_\alpha^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\alpha$.
Diferenciací ($r =$ konst., $R =$ konst.) dostaneme

$$2r_\alpha\,\mathrm{d}r_\alpha = 2Rr\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,. \tag{44}$$

Obr. 16



Protože za integrační proměnnou bude výhodné volit r_α, vyjádříme z (44) $\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ a dosadíme do (43):

$$\mathrm{d}Q = 2\pi\sigma\frac{R}{r}r_\alpha\,\mathrm{d}r_\alpha\,.$$

Pak potenciál prstence je

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r_\alpha} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\,\mathrm{d}r_\alpha\,.$$

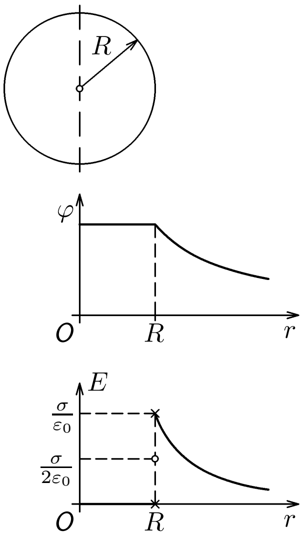
Nyní můžeme provést integraci přes celou kulovou plochu. Bude-li bod A vně kulové plochy nebo na jejím povrchu, tj. $r \geq R$, bude se r_α měnit v mezích $r - R$, $r + R$. Tedy

$$r \geq R: \quad \varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r}\int\limits_{r-R}^{r+R}\mathrm{d}r_\alpha = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,, \tag{45}$$

kde $Q = 4\pi R^2\sigma$ je celkový náboj na kulové ploše.

Bude-li bod A ležet *uvnitř plochy* ($r < R$) bude se vzdálenost r_α měnit v mezích od $R - r$ do $R + r$. Tedy

$$r < R: \quad \varphi = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 r} \int\limits_{R-r}^{R+r} \mathrm{d}r_\alpha = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\,. \tag{46}$$



Obr. 17

Z výsledku (45) je zřejmé, že vně nabité uzavřené kulové plochy vypočteme potenciál elektrického pole tak, jakoby celý její náboj byl soustředěn v jejím středu. Z výsledku (46) je vidět, že uvnitř kulové plochy je potenciál konstantní a je roven jeho velikosti na povrchu kulové plochy.

Průběh potenciálu je znázorněn na obr. 17. Je zřejmé, že potenciál je funkce spojitá, avšak v bodech $r = R$ není hladká. To ovlivňuje i intenzitu elektrického pole pro $r = R$, která pro tento bod není z matematického hlediska definována. Intenzita je podle (31) dána derivací, avšak ta pro $r = R$ neexistuje (derivace zprava se nerovná derivaci zleva). Pro velikost intenzity užitím vztahu (31) na funkce (45) a (46) dostaneme

$$E = 0 \quad \text{pro} \quad r < R, \tag{47}$$

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ pro } r > R\,. \tag{48}$$

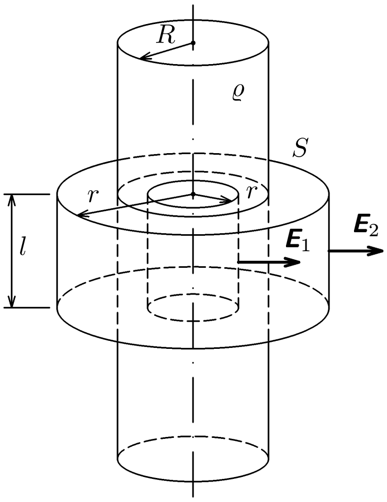
Fyzikálně můžeme dospět k velikosti intenzity pro $r = R$ touto úvahou. Plošný náboj je idealizovaným matematickým modelem, neboť ve skutečnosti je náboj vázán na částice látky konečných rozměrů. Takže, i když hovoříme o plošném náboji, je náboj rozložen v tenké vrstvě a tudíž i průběh potenciálu je popsán funkcí hladkou a intenzita pro $r = R$ bude existovat. Pro tento bod se bere jako střední hodnota intenzity zprava a zleva v blízkém okolí bodu $r = R$ (srovnej s [7], s. 65), tedy

$$E_R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pro } r = R\,. \tag{49}$$

Příklad 7 – elektrické pole nabitého dielektrického válce

Je dán dlouhý dielektrický válec o poloměru R nabitý prostorovým nábojem o hustotě ϱ =konst. a permitivitě $\varepsilon \approx \varepsilon_0$. Vypočtěte intenzitu a potenciál jeho elektrického pole pro body roviny procházející jeho středem kolmo k ose válce. Jednu okrajovou podmínku pro potenciál volte $\varphi(0) = 0$, druhá vyplyne z podmínky spojitosti funkce popisující potenciál pro $r = R$.

Řešení



Obr. 18

Protože siločáry pole jsou kolmé k ose válce, určíme intenzitu pole snadno užitím Gaussova zákona. Za uzavřenou plochu S si volíme válcovou plochu proměnného poloměru r a délky l (obr. 18). Gaussův zákon

pro $r < R$: $\quad 2\pi r l E_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\pi r^2 l \varrho\,,$

z toho $\quad E_1 = \dfrac{\varrho r}{2\varepsilon_0}\,,$

pro $r \geq R$: $\quad 2\pi r l E_2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\pi R^2 l \varrho\,,$

z toho $\quad E_2 = \dfrac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0 r}\,.$

Potenciál vypočteme užitím vztahu (34).
Pro $r < R$:

$$\varphi_1 = -\frac{\varrho}{2\varepsilon_0}\int r\,\mathrm{d}r + C_1 = -\frac{\varrho r^2}{4\varepsilon_0} + C_1,$$

pro $r \geq R$:

$$\varphi_2 = -\frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}r}{r} + C_2 = -\frac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\ln r + C_2\,.$$

Okrajové podmínky:

$\varphi_1(0) = 0, \quad$ z toho $\quad C_1 = 0,$

$\varphi_1(R) = \varphi_2(R), \quad$ neboli $\quad -\dfrac{\varrho R^2}{4\varepsilon_0} = -\dfrac{\varrho R^2}{2\varepsilon_0}\ln R + C_2,$

z toho $\quad C_2 = \dfrac{\varrho R^2}{4\varepsilon_0}(2\ln R - 1).$

Pak potenciál

pro $r < R$: $\quad \varphi_1 = -\dfrac{\varrho r^2}{4\varepsilon_0}, \qquad$ pro $r \geq R$: $\quad \varphi_2 = \dfrac{\varrho R^2}{4\varepsilon_0}(2\ln\dfrac{R}{r} - 1)\,.$

1.9 Vlastní elektrostatická energie soustavy nábojů

Mějme soustavu bodových nábojů. Každý z nich je zdrojem elektrického pole a současně i objektem, na který pole ostatních nábojů působí. Charakteristikou takové soustavy je **vlastní elektrická energie soustavy** neboli **energie elektrostatické vazby** (podobně může jít o energii vazby gravitační např. u galaxie nebo jaderné u nukleonů v jádře). Tuto energii definujeme jako rozdíl energie, kterou má soustava v dané poloze nábojů a energie, kterou by soustava měla, kdyby se vzdálenosti neomezeně zvětšily. Vlastní energie soustavy nábojů je tedy rovna normované elektrostatické energii soustavy ($W_\mathrm{e} = 0$ pro $r \to \infty$).

Velikost vlastní energie soustavy můžeme rovněž určit jako práci, kterou je třeba vykonat na rozklad soustavy do jednotlivých neomezeně vzdálených složek (elementů). Naopak při vzniku soustavy z jednotlivých složek se vlastní energie soustavy uvolňuje. **Soustava je stabilní, je-li její vlastní energie záporná a minimální.** Soustava má zápornou vlastní energii, budou-li síly mezi jednotlivými složkami přitažlivé (resp. bude-li u smíšené interakce vliv přitažlivých sil převládat).

Uvažujme pro jednoduchost nejprve dva bodové náboje $Q_1,\ Q_2$, které jsou ve vzájemné vzdálenosti $r_{12} = r_{21}$. Pak potenciální elektrostatická energie náboje Q_1 v elektrickém poli náboje Q_2 je

$$W_{12} = Q_1 \varphi_2 = Q_1 \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}\,.$$

Úvahu lze obrátit a zjišťovat elektrostatickou energii náboje Q_2 v elektrickém poli náboje Q_1:

$$W_{21} = Q_2 \varphi_1 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{21}} = W_{12}\,.$$

Vlastní elektrostatickou energii soustavy dvou bodových nábojů můžeme formálně vyjádřit vztahem

$$W = \frac{1}{2} W_{12} + \frac{1}{2} W_{21}\,,$$

který je vhodný pro další zobecnění.

Půjde-li nyní o soustavu tří nábojů, musíme brát v úvahu působení každého náboje s každým a vzít jednu polovinu vlastní energie mezi objektem $i,\ j$, neboť $W_{ij} = W_{ji}$. Tak můžeme psát

$$W = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{13} + W_{21} + W_{23} + W_{31} + W_{32})\,.$$

Výpočet vlastní elektrostatické energie můžeme nyní zobecnit na n bodových nábojů. Vzájemnou vzdálenost náboje Q_i a náboje Q_j označme $r_{ij} = r_{ji}$.

Pak **vlastní elektrostatická energie soustavy** je

$$\boxed{W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} W_{ij} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}\,.} \tag{50}$$

Tento výraz lze ještě přepsat do tvaru

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i\,, \tag{51}$$

kde

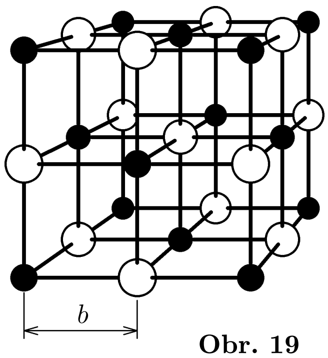
$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{Q_i}{r_{ij}}\,, \tag{52}$$

je potenciál elektrického pole soustavy bodových nábojů v místě náboje Q_i vzbuzené všemi ostatními náboji Q_j (sčítá se pouze pro $j \neq i$).

Úprava výsledku (50) do tvaru (51) umožňuje jednoduchý přechod na případ soustavy se spojitě rozděleným nábojem. Místo náboje Q_i uvažujeme jeho element $\mathrm{d}Q$, přičemž jeho energie v poli ostatních elementů bude $\varphi\,\mathrm{d}Q$, kde φ je potenciál, který v místě elementu $\mathrm{d}Q$ budí všechny ostatní elementy spojitě rozloženého náboje. Celková vlastní elektrostatická energie soustavy je pak dána integrací přes celý náboj soustavy, tedy

$$W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int_Q \varphi\;\mathrm{d}Q\,. \tag{53}$$

Příklad 8 – energie elektrostatické vazby krystalové mříže



Obr. 19

K významným a jednoduchým iontovým krystalům patří krystal chloridu sodného (NaCl), jehož zjednodušený elektrický model je na obr. 19. Sestává se z iontů nesoucích po jednom elementárním náboji e: z kladných iontů Na^+ (vyznačených černými kuličkami) a záporných iontů Cl^- (vyznačených bílými kuličkami) pravidelně uspořádaných s cyklujícím znaménkem náboje ve vrcholech krychle o straně b a tvořících prostorovou krystalovou mříž s mřížkovou konstantou $b = 2{,}82 \cdot 10^{-10}$ m. Vypočtěte energii elektrostatické vazby připadající na jeden ion krystalu.

Řešení

Teoreticky jde o složitou úlohu, neboť jeden makroskopický krystal NaCl obsahuje okolo 10^{20} atomů. Při řešení je však možné očekávat, že ionty na jednom konci makroskopického krystalu budou mít jen velmi nepatrný vliv na ionty na jeho opačném konci. Lze se proto při sestavování řady omezit jen na určitý počet členů řady podle požadavku přesnosti výpočtu jejího součtu.

Další zjednodušení problému spočívá ve zjištění, že uspořádání záporných iontů v okolí určitého kladného iontu je analogické uspořádání kladných iontů v okolí určitého záporného iontu (obr. 19). Proto můžeme přijmout jeden ion, lhostejné zda kladného či záporného znaménka, za centrální a vypočítat jeho elektrostatickou energii v poli ostatních iontů a získanou energii vynásobit počtem N iontů a koeficientem $\frac{1}{2}$, protože každý pár iontů je při výpočtu energie uvažován dvakrát. Tak místo obecnějšího výrazu (50) dostaneme

$$W_\mathrm{e} = \frac{N}{2}\, Q_1 \sum_{j=2}^{N} \varphi_j = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} N \sum_{j=2}^{N} \frac{Q_1 Q_j}{r_{1j}}\,, \tag{54}$$

kde φ_j je potenciál, který v místě centrálního iontu o náboji Q_1 (námi tak libovolně zvoleného a označeného indexem 1) způsobuje ion o náboji Q_j, přičemž $|Q_1| = |Q_j| = e$ je elementární náboj a r_{1j} jsou vzdálenosti zvoleného centrálního iontu od ostatních iontů v makroskopickém krystalu. Energie vazby připadající na jeden ion určená z (54) pro nejbližší okolí centrálního iontu je

$$W_{e1} = \frac{W_\mathrm{e}}{N} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{6e^2}{b} + \frac{12e^2}{b\sqrt{2}} - \frac{8e^2}{b\sqrt{3}} + \dots\right). \tag{55}$$

První člen řady v závorce je úměrný energii od šesti nejbližších iontů ve vzdálenosti b, druhý člen energii dvanácti iontů ve vzdálenosti stranové úhlopříčky $b\sqrt{2}$, třetí člen energii osmi iontů ve vzdálenosti prostorové úhlopříčky $b\sqrt{3}$. Přidáním dalších členů řady a výpočtem jejího součtu na počítači dostaneme po vytknutí e^2/b pro numerickou hodnotu součtu v závorce číslo $-1{,}7476$. Vazbová energie připadající na jeden ion pak je

$$W_{e1} = -0{,}06953 \frac{e^2}{\varepsilon_0 b}\,. \tag{56}$$

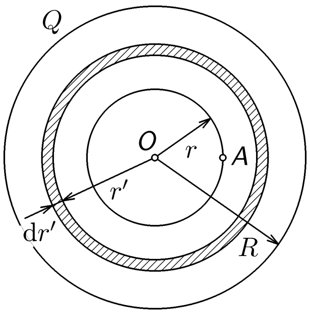
Po dosazení za konstanty dostaneme numerickou hodnotu energie vazby

$$W_{e1} = -7{,}15 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = -4{,}46\ \mathrm{eV}.$$

Příklad 9 – vlastní elektrostatická energie nabité koule

Vypočtěte vlastní elektrostatickou energii dielektrické koule o poloměru R a permitivitě $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ nabité prostorovým nábojem Q o hustotě $\varrho =$konst.

Řešení



Obr.20

K výpočtu vlastní energie užijeme výraz (53). Nejprve je nutné vypočíst normovaný potenciál pro body uvnitř koule. Potenciál budeme počítat v bodě A (obr. 20), který leží na myšlené kouli o poloměru r opsané ze středu O. Tato koule dělí náboj koule na dvě části. Pro náboj Q_1, který je uvnitř této koule, je bod A bodem vnějším a účinek tohoto náboje je takový, jako by Q_1 byl soustředěn v bodě O. Potenciál od náboje Q_1 tedy je

$$\varphi_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\varrho r^2}{3\varepsilon_0}.$$

Pro náboj Q_2, který je vně vnitřní koule o poloměru r, je bod A bodem vnitřním. V příkladě 6 jsme ukázali, že pole uvnitř duté koule má konstantní potenciál. Tedy v bodě A bude mít pole od vnější duté koule (vnitřního poloměru r a vnějšího poloměru R) stejný potenciál jako od této koule ve středu O. Stanovíme nyní tento potenciál φ_2. Z vnější části koule vytkneme elementární kulovou vrstvu o poloměru r' a tloušťce $\mathrm{d}r'$, která nese náboj $\mathrm{d}Q_2 = 4\pi r'^2 \varrho\,\mathrm{d}r'$. Vyjádříme element potenciálu $\mathrm{d}\varphi_2 = \dfrac{\mathrm{d}Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r'}$ a integrujeme v mezích r, R, tedy

$$\varphi_2 = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}\int_r^R r'\,\mathrm{d}r' = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}(R^2 - r^2)\,.$$

Celkový potenciál v bodě A je dán superpozicí

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\varrho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)\,, \tag{57}$$

kde Q je náboj koule.

Tento výsledek můžeme dostat také přímým výpočtem užitím vztahu (23), který přepíšeme do tvaru

$$\varphi = \int_r^\infty E\,\mathrm{d}r = \int_r^R E\,\mathrm{d}r + \int_R^\infty E\,\mathrm{d}r\,,$$

kde podle příkladu 4 pro intenzitu v našem případě platí

$$E = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \quad \text{pro} \quad r \le R \qquad \text{a} \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{pro} \quad r > R\,.$$

Pak

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int\limits_r^R \frac{r\,\mathrm{d}r}{R^3} + \int\limits_R^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$$

Nyní přistoupíme k výpočtu vlastní energie podle vztahu (53). Uvnitř koule si vytkneme elementární kulovou vrstvu o obecném poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}r$, která nese náboj $\mathrm{d}Q = 4\pi r^2 \varrho\,\mathrm{d}r$. Dosadíme do (53), využijeme výsledku (57) a integrujeme přes celou kouli:

$$W_\mathrm{e} = \frac{\pi\varrho^2}{3\varepsilon_0}\int\limits_0^R (3R^2r^2 - r^4)\mathrm{d}r =$$

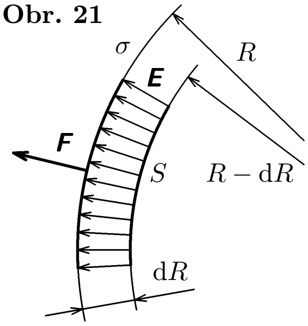
$$= \frac{\pi\varrho^2}{3\varepsilon_0}\left[R^2r^3 - \frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{4\pi\varrho^2}{15\varepsilon_0}R^5 = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}\,. \tag{58}$$

Tato energie je kladná a pokud by částice koule nebyly vázány jinými interakcemi, koule by se okamžitě rozpadla.

1.10 Hustota energie elektrického pole

Nositelem elektrostatické energie nabitých těles a částic je elektrické pole, které existuje v jejich okolí. Vypočteme nyní hustotu jeho energie, tj. energii připadající na jednotkový objem.

Obr. 21



K výpočtu si zvolíme jednoduchý objekt – nabitou uzavřenou kulovou plochu o poloměru R, který můžeme měnit. Uvažujme malou část povrchu o plošném obsahu S (obr. 21), který obsahuje náboj $Q = \sigma S$ a na který působí pole silou $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{E}_R$, kde podle (49) je $E_R = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Chceme-li zmenšit poloměr kulové plochy o $\mathrm{d}R$, musí vnější síly vykonat práci $-\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}R$, která se projeví zvětšením potenciální energie pole o $\mathrm{d}W_\mathrm{e}$. Tedy

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e} = F\,\mathrm{d}R = QE_R\,\mathrm{d}R = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S\,\mathrm{d}R\,,$$

kde $S\,\mathrm{d}R = \mathrm{d}V$ je přírůstek objemu uvažovaného pole. Toto pole je již vně kulové plochy, i když v její těsné blízkosti. Jeho intenzita $\boldsymbol{E}$ se proto počítá již podle výrazu (48), protože však $\mathrm{d}R \to 0$, je $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Pak **objemová hustota**

energie elektrického pole je

$$w_\mathrm{e} = \frac{\mathrm{d}W_\mathrm{e}}{\mathrm{d}V} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\,.$$

Tento výraz po zavedení intenzity $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ nabývá obecnější tvar

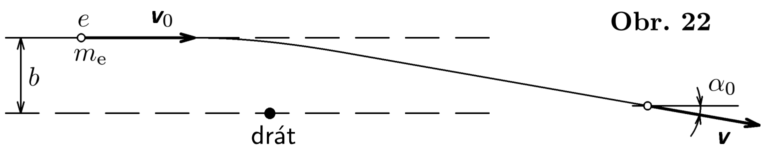
$$\boxed{w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,.} \tag{59}$$

Hustotu elektrického pole můžeme také podobným postupem odvodit úvahou o elektrickém poli dvou rozlehlých rovinných desek nabitých stejnými náboji opačného znaménka (viz čl. 3.3 této brožury nebo knihu [8], s. 73).

Příklad 10 – ohyb svazku elektronů na nabitém drátě

Tenký svazek elektronů urychlených ve vakuu napětím U na rychlost $\boldsymbol{v}_0$ prochází elektrickým polem vytvořeným kladně nabitým tenkým drátem, který je kolmý k rovině trajektorie elektronů (obr. 22). Je dána lineární hustota náboje τ =konst. Vypočtěte celkový úhel α_0, o který pole drátu změní směr trajektorie elektronů (tedy úhel ohybu dostatečně dlouhého svazku). Posuďte, zda tento úhel závisí na parametru b, tedy na kolmé vzdálenosti tečny k trajektorii ve vzdálené poloze elektronu od osy drátu. Řešte za těchto zjednodušujících podmínek:

a) Drát je dostatečně dlouhý, aby mohl být pokládán za nabitou přímku.
b) Jsou splněny podmínky pro použití pohybových rovnic klasické mechaniky.
c) Úhel α_0 je malý a změny velikosti rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ jsou zanedbatelné.



Obr. 22

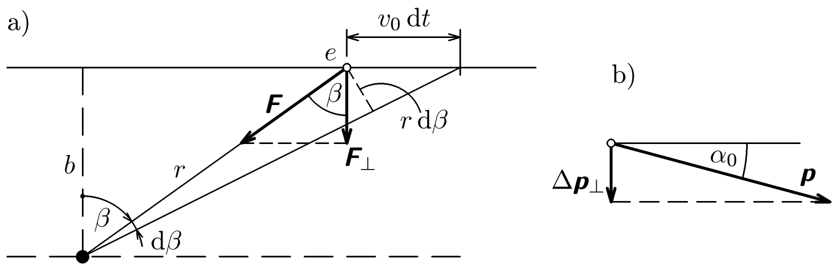
Řešení

Elektrické pole vně drátu je dáno vztahem (15), tedy $E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$ a na elektron působí síla $\boldsymbol{F}$ o velikosti

$$F = eE = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\,, \tag{60}$$

směřující k drátu kolmo k jeho ose. Směr síly tedy závisí na okamžité poloze elektronu na trajektorii. Polohu elektronu popíšeme úhlem β (obr. 23a), který pro neomezenou trajektorii bude v mezích $\beta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Síla $\boldsymbol{F}$ bude měnit hybnost $\boldsymbol{p}$ elektronů; budeme se zajímat jen o změnu směru hybnosti. Ve vzdáleném bodě trajektorie (obr. 23b) bude pro její kolmou složku platit $\Delta p_{\perp} = p \sin \alpha_0 \approx m_{\mathrm{e}} v_0 \alpha_0$. Odtud pro hledaný úhel dostaneme

$$\alpha_0 \approx \frac{\Delta p_{\perp}}{m_{\mathrm{e}} v_0}\,. \tag{61}$$



Obr. 23

Velikost složky $\Delta \boldsymbol{p}_{\perp}$ hybnosti určíme z celkového impulsu kolmé složky $\boldsymbol{F}_{\perp}$ síly $\boldsymbol{F}$, jejíž velikost je dána výrazem (60), na celé trajektorii:

$$\Delta p_{\perp} = F_{\perp} \Delta t,$$

kde

$$F_{\perp} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\beta}{r}\,.$$

Mezi proměnnými r, β a $\mathrm{d}t$ platí vztah (obr. 23 a):

$$v_0\,\mathrm{d}t \cos\beta = r\,\mathrm{d}\beta \implies \mathrm{d}t = \frac{r\,\mathrm{d}\beta}{v_0 \cos\beta}\,.$$

Element impulsu síly $\boldsymbol{F}_{\perp}$ tedy bude mít velikost

$$F_{\perp}\,\mathrm{d}t = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\beta}{r} \frac{r\,\mathrm{d}\beta}{v_0 \cos\beta} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0 v_0}\,\mathrm{d}\beta\,.$$

Celkový impuls síly $\boldsymbol{F}_{\perp}$ dostaneme integrací v mezích od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$, tedy

$$F_{\perp}\Delta t = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0 v_0}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\beta = \frac{e\tau}{2\varepsilon_0 v_0} = \Delta p_{\perp}\,.$$

Po dosazení do (61) dostaneme hledané řešení

$$\alpha_0 \approx \frac{e\tau}{2\varepsilon_0 m_\mathrm{e} v_0^2} = \frac{\tau}{4\varepsilon_0 U},$$

kde k úpravě byl použit klasický vztah

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{e}v_0^2 = eU$$

pro urychlovací napětí U. Úhel α_0 zřejmě nezávisí na vzdálenosti b.

Poznámka: Námětem pro tento příklad byla část zadání jedné úlohy na 24. MFO v USA (1993).

2 Elektrostatické pole v dielektriku

2.1 Dielektrikum a jeho polarizace

Vložíme-li do elektrického pole vytvořeného ve vakuu látkové prostředí, dojde k interakci pole a postředí. Bude-li tímto prostředím vodič, který se vyznačuje existencí volných nábojů, dojde působením pole k jejich přemisťování a vzniká elektrický proud. Druhou skupinou látek je izolující prostředí (izolant), které se z hlediska elektrického pole označuje jako **dielektrikum**. U něj jsou nabité látkové částice (elektrony a protony) víceméně vzájemně vázány a působením vloženého vnějšího pole se nemohou z tohoto místa vzdálit. Působením tohoto vnějšího pole dojde pouze k deformaci mikroskopických elektrických polí atomárních elementů dielektrika. Tento jev se nazývá **dielektrická polarizace**.

Při dielektrické polarizaci dochází ke kombinaci následujících mechanismů:

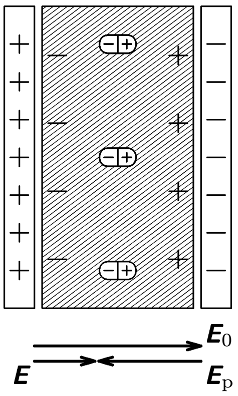
1. Posuv elektronů v obalu atomu vůči jádrům — jde o tzv. elektronovou polarizaci.

2. Posuv jader atomů vzhledem k sobě — tzv. jaderná polarizace.

3. Orientace polárních skupin nebo molekul do směru vnějšího elektrického pole — tzv. orientační polarizce.

Modelově si lze představit polarizaci dielektrika jako vznik atomárních nebo molekulárních dipólů. Jejich účinky se superponují a polarizované dielektrikum se navenek jeví jako jeden makroskopický dipól.

2.2 Vliv dielektrika na elektrické pole



Obr. 24

Polarizované dielektrikum ovlivňuje původní elektrické pole ve vakuu. Vysvětlíme si to na kondenzátoru, který nabijeme a pak mezi jeho desky vložíme dielektrikum (obr. 24). V důsledku polarizace dielektrika se na jeho krajních plochách objeví **povrchové vázané (polarizační) náboje**. Na straně přilehlé ke kladné desce vzniká záporný vázaný náboj, na straně přilehlé k záporné desce vzniká stejně velký kladný vázaný náboj. Tyto náboje jsou vázány na dielektrikum a nemohou se proto z něj odvést; nemohou se uvnitř dielektrika ani pohybovat (v dielektriku nevzniká vodivý proud). Tím se podstatně liší od **volného náboje**, který je ve vodiči volně pohyblivý a dá se z něj odvést. V příkladě znázorněném na obr. 24 je volný náboj na deskách.

Polarizční vázané náboje budí v dielektriku polarizační elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_\mathrm{p}$, které je namířeno proti intenzitě $\boldsymbol{E}_0$ původního pole ve vakuu (obr. 24). Označíme-li $\boldsymbol{E}$ intenzitu výsledného pole, můžeme intenzitu $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}$ polarizačního pole vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}} = -\varkappa_{\mathrm{p}} \boldsymbol{E}\,, \tag{62}$$

kde $\varkappa_{\mathrm{p}}$ je bezrozměrová veličina, která se nazývá **dielektrická susceptibilita**. Závisí především na druhu dielektrika, může však záviset i na intenzitě $\boldsymbol{E}$.

V našem výkladu budeme uvažovat jen izotropní **lineární dielektrika**, u nichž $\varkappa_{\mathrm{p}}$ je konstanta nezávislá na intenzitě $\boldsymbol{E}$. Pak je $\boldsymbol{E}_{\mathrm{p}}$ lineární funkcí $\boldsymbol{E}$. Z mechanismu dielektrické polarizace vyplývá, že u všech dielektrik musí být $\varkappa_{\mathrm{p}} > 0$.

Výsledná intenzita elektrického pole v dielektriku je

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{E}_0 - \varkappa_{\mathrm{p}} \boldsymbol{E}\,.$$

Z toho

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{1+\varkappa_{\mathrm{p}}} = \frac{\boldsymbol{E}_0}{\varepsilon_r}\,, \tag{63}$$

kde jsme zavedli označení

$$1 + \varkappa_{\mathrm{p}} = \varepsilon_r\,.$$

Budeme-li aplikovat výraz (63) např. na pole bodového náboje (6), můžeme psát

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\boldsymbol{r}^0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}^0\,, \tag{64}$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ je **(absolutní) pemitivita dielektrika** a

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \varkappa_{\mathrm{p}} > 1} \tag{65}$$

je **relativní permitivita dielektrika**. Pro plyny je zpravidla její odchylka od relativní permitivity vakua ($\varepsilon_r = 1$) zanedbatelná, např. pro vzduch je $\varepsilon_r = 1{,}000\,594$. Pro sklo podle jeho složení je $\varepsilon_r = 5$ až $7{,}5$, pro petrolej $\varepsilon_r = 2{,}1$, avšak pro glycerín $\varepsilon_r = 41{,}1$ a pro vodu $\varepsilon_r = 81{,}1$.

V dielektriku se síly mezi náboji zmenší $\varepsilon_r$krát. Zvlášť výrazně se projevuje tato vlastnost u vody a tím se vysvětluje i velká disociační vlastnost vody. Při rozpuštění solí, jejichž molekuly mají iontovou vazbu (např. NaCl, $CuSO_4$) se elektrická síla mezi ionty (např. Na^+, Cl^-) ve vodě zmenší 81krát, a to vyvolá rozpad molekuly na osamocené ionty. Tak vzniká elektrolyt, který je schopen volnými kladnými a zápornými ionty zprostředkovat vedení proudu.

2.3 Elektrická indukce

Intenzita elektrického pole závisí na permitivitě daného prostředí — viz např. výraz (63). Proto se často zavádí nová veličina — **elektrostatická indukce** — tak, aby její velikost nebyla ovlivněna vlastnostmi dielektrika. Pro lineární dielektrika je elektrická indukce definována vztahem

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}\,.} \tag{66}$$

Tak např. elektrické pole bodového náboje bude mít indukci

$$\boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}^0\,. \tag{67}$$

Jednotka elektrické indukce má rozměr $[D] = \mathrm{C\cdot m^{-2}} = \mathrm{A\cdot s\cdot m^{-2}}$.

Podobně jako siločáry definují se i **indukční čáry** jako orientované čáry jejichž tečny mají ve všech bodech směr vektoru elektrostatické indukce a jejichž hustota je úměrná jeho velikosti. Pro lineární dielektrika mají siločáry a indukční čáry zřejmě stejný tvar, avšak různou hustotu. Na rozhraní dvou různých dielektrik budou siločáry nespojité, kdežto indukční čáry spojité.

Analogicky toku intenzity elektrického pole (10) zavádíme **elektrický indukční tok** výrazem

$$\Psi = \int\limits_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\,. \tag{68}$$

Mezi oběma toky je pro izotropni dielektrika zřejmě vztah $\Psi = \varepsilon\Phi_\mathrm{e}$. Pak můžeme platnost výrazů (12), (13) zobecnit i pro elektrické pole v dielektriku, tedy

$$\boxed{\oint\limits_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \equiv Q\,,} \tag{69}$$

$$\boxed{\oint\limits_S \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int\limits_V \varrho\,\mathrm{d}V\,.} \tag{70}$$

Tyto vztahy reprezentují **Gaussův zákon pro elektrické pole v dielektriku** a zahrnují i elektrické pole ve vakuu (pak $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$). Náboj na pravé straně rovnic (69), (70) je **volný**. Vliv vázaného (polarizačního) náboje je již zahrnut ve veličině $\boldsymbol{D}$. Pokud nás bude zajímat intenzita polarizačního elektrického pole a velikost vázaného náboje, případně jeho hostota, je nutné řešení tohoto problému převést na vakuum, ve kterém v tomto případě existuje vedle elektrického pole volného náboje ještě indukované polarizační pole vázaného náboje.

Podobně můžeme rozšířit i platnost výrzu (59) pro **hustotu energie elektrického pole v dielektriku**:

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}\,, \tag{71}$$

kde poslední vyjádření platí i pro neizotopní dielektrika, u nichž mají obecně vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$ různý směr.

3 Kapacita vodičů

3.1 Vlastní kapacita vodiče

Mějme osamocený izolovaný vodič, na kterém je náboj Q. Kolem vodiče existuje elektrostatické pole, které jsme popsali intenzitou a potenciálem. Zvětšíme-li náboj na vodiči n krát, zvětší se rovněž intenzita a potenciál v jeho okolí i na povrchu n krát. Můžeme to snadno posoudit např. z výrazu (45), který platí pro jednoduchý vodič tvaru koule. Náboj vodiče Q a jeho potenciál φ jsou si tedy úměrné. Můžeme proto psát $Q = C_\mathrm{v}\varphi$, kde φ je **normovaný potenciál**[3] **na vodiči** a konstanta úměrnosti

$$\boxed{C_\mathrm{v} = \frac{Q}{\varphi}} \tag{72}$$

se nazývá **(vlastní) kapacita vodiče**. Má význam náboje potřebného k tomu, aby se uvažovaný vodič nabil na kladný jednotkový normovaný potenciál. Kapacita vodiče je mírou jeho schopnosti získat (nebo udržet si) elektrický náboj.

V případě zmíněného kulového vodiče pro jeho kapacitu ve vakuu užitím vztahů (45) a (72) dostaneme

$$C_\mathrm{v} = 4\pi\varepsilon_0 R. \tag{73}$$

Kapacita má jednotku o rozměru

$$[C_\mathrm{v}] = \frac{\text{coulomb}}{\text{volt}} = \mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^4\cdot\mathrm{A}^2 = \mathrm{F}(\text{farad})\,.$$

Kapacita osamělého vodiče je velmi malá. Například obrovský kulový kondenzátor o poloměru rovném poloměru Země by měl kapacitu pouhých 710 μF.

3.2 Kapacita kondenzátoru

Kapacitu (osamělého) vodiče jsme definovali z potenciálu vzbuzeného pouze jeho vlastním nábojem. Budou-li se nacházet v okolí vodiče další nabité vodiče, bude podle zákona superpozice potenciál v místě prvního vodiče dán superpozicí (algebraickým součtem) potenciálů vzbuzených prvním i ostatními vodiči. Náboj prvního vodiče se nezmění, změní se však jeho potenciál. Kapacitu osamělého vodiče můžeme proto zvětšit tím, že do jeho blízkosti umístíme opačně nabitý vodič, který sníží potenciální rozdíl mezi oběma vodiči, a tím vzroste kapacita.

[3] Potenciál je obecně určen až na konstantu – viz výraz (34). Aby valstní kapacita vodiče byla definována jednoznačně, musíme volit jednoznačně potenciál tím, že jej normujeme podle vzorce (23), resp. integrační konstantu volíme tak, aby $\varphi = 0$ v bodě nekonečně vzdáleném.

Prakticky je důležitý případ, kdy jsou blízko sebe umístěny dva vodiče, na nichž jsou stejné náboje, avšak opačných znamének. Tato soustava dvou vodičů představuje nabitý **kondenzátor**. Přibližujeme-li k sobě opačně nabité vodiče, bude se zmenšovat potenciální rozdíl mezi nimi při stejném náboji, a to tím více, čím budou vodiče blíže k sobě. Tak přicházíme k veličině **vzájemná kapacita dvou vodičů**, neboli **kapacita kondenzátoru**, kterou definujeme výrazem

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{U},} \tag{74}$$

kde Q je kladný náboj, který by přešel z prvního vodiče o potenciálu φ_1 na druhý o potenciálu $\varphi_2 < \varphi_1$ při jejich vodivém spojení a U je elektrické napětí mezi těmito vodiči.

Prostor mezi vodiči (deskami, elektrodami) kondenzátoru se vyplňuje vhodným dielektrikem. Jak jsme si ukázali, dielektrikum zmenšuje intenzitu pole. To vede při nezměněném náboji ke zmenšení napětí mezi elektrodami a to má ve shodě s (74) za následek zvětšení kapacity kondenzátoru.

Příklad 11 – kapacita deskového kondenzátoru

Vypočtěte kapacitu deskového kondenzátoru, sestávajícího ze dvou rovnoběžných desek, každá o ploše S, nacházejícím se ve vzájemné vzdálenosti d. Prostor mezi deskami je vyplněn dielektrikem o relativní permitivitě ε_r.

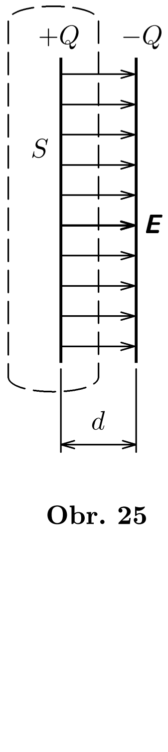
Řešení

Přivedeme-li na jednu desku náboj Q, bude se na druhé desce indukovat opačný náboj $-Q$ (obr. 25). K určení intenzity elektrického pole mezi deskami užijeme Gaussův zákon. Přitom budeme předpokládat, že vzdálenost d je relativně k rozměrům desek tak malá, že nemusíme uvažovat rozptyl pole na okraji desek (tzv. okrajový jev). Jednu z desek uzavřeme do libovolné plochy a užitím Gaussova zákona (69) dostaneme $DS = Q$, kde $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$. Tedy

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\,.$$

Protože pole mezi deskami je homogenní, bude napětí mezi deskami

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\,.$$



Obr. 25

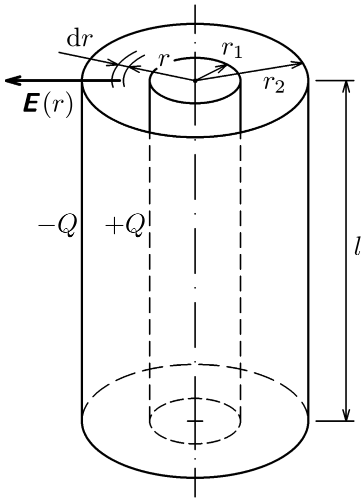
Pak kapacita deskového kondenzátoru je

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}.} \tag{75}$$

Příklad 12 – kapacita válcového kondenzátoru

Vypočtěte kapacitu válcového kondenzátoru, který sestává ze dvou souosých vodivých válcových ploch o poloměrech r_1, $r_2 > r_1$ a o délce l, mezi nimiž je dielektrikum o relativní permitivitě ε_r. Okrajový jev neuvažujte.

Řešení



Obr. 26

Na vnitřní plochu přivedeme náboj Q, na vnější ploše se bude indukovat náboj $-Q$. Elektrické pole bude soustředěno v prostoru mezi válcovými plochami (obr. 26) a jeho intenzita bude kolmá k jejich ose. K výpočtu indukce $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ pole užijeme Gaussův zákon (69), přičemž za uzavřenou plochu zvolíme souosou válcovou plochu o poloměru r ($r_1 \le r \le r_2$). Nenulový indukční tok půjde pouze pláštěm válcové plochy, tok podstavami bude nulový. Tedy

$$2\pi r l \varepsilon_0 \varepsilon_r E = Q\,.$$

Z toho

$$E = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r l r}\,.$$

Pro výpočet napětí mezi elektrodami použijeme výraz (35):

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l} \ln\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Odtud kapacita

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r l}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}. \tag{76}$$

3.3 Energie nabitého kondenzátoru

K výpočtu energie kondenzátoru můžeme vyjít z výrazu (71) pro hustotu energie elektrického pole, použít jej na objemový element pole kondenzátoru a provést integraci pro celý objem pole kondenzátoru.

Energii elektrostatického pole můžeme vypočítat rovněž jako práci potřebnou k nabití kondenzátoru o kapacitě C. Kondenzátor postupně nabíjíme elementem náboje $\mathrm{d}Q$. V určitém okamžiku nechť je na kondenzátoru náboj Q a tudíž mezi elektrodami napětí $U = Q/C$. Zvětšíme-li nyní náboj o $\mathrm{d}Q$, musíme vykonat práci

$$\mathrm{d}A = U\,\mathrm{d}Q = \frac{Q}{C}\,\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W_\mathrm{e}\,,$$

která se projeví jako přírůstek energie W_e elektrostatického pole kondenzátoru. Celková energie po nabití na náboj Q je

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{C}\int_0^Q Q\,\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2. \tag{77}$$

Nyní si můžeme naopak ověřit platnost výrazu (71) pro hustotu energie, použijeme-li odvozený vztah (77) na deskový kondenzátor, ve kterém je homogenní pole. Platí

$$W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 Sd\,,$$

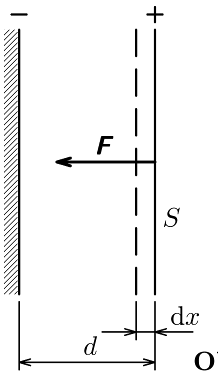
kde $Sd = V$ je objem pole kondenzátoru. Dělíme-li tento výraz tímto objemem V, dostaneme hustotu energie (71).

Příklad 13 – elektrostatický voltmetr

Podstatou elektrostatického voltmetru je deskový kondenzátor se vzduchovým dielektrikem, jehož jedna deska je pevná, druhá pohyblivá. Je spojena přes pákový mechanismus s ukazatelem, přičemž v rovnovážné poloze je udržována pružinou. Vypočtěte sílu, kterou se přitahují desky elektrostatického voltmetru při potenciálním rozdílu $U = 500$ V. Každá z desek má plochu o obsahu $S = 2500\ \mathrm{mm}^2$ a jejich vzájemná vzdálenost v rovnovážné poloze je $d = 1,20$ mm. Okrajový jev neuvažujte.

Řešení

a) *První způsob — rozborem energie*



Obr. 27

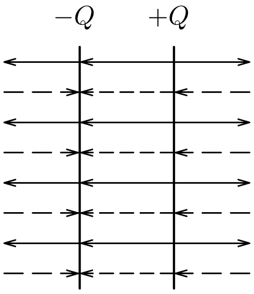
Práce, kterou pole vykoná tím, že silou $\boldsymbol{F}$ přiblíží desky o $\mathrm{d}x$ (obr. 27), je rovna úbytku energie elektrostatického pole mezi deskami. K výpočtu využijeme hustotu energie (59) a dostaneme

$$F\,\mathrm{d}x = w_\mathrm{e} S\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S\,\mathrm{d}x\,,$$

neboli

$$F = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2} = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2d^2}\,.$$

b) *Druhý způsob — rozborem silového účinku pole*



Obr. 28

Uvažujme, že v poli jedné desky, např. nabité nábojem $+Q$ (v obr. 28 jsou siločáry tohoto pole vyznačeny plnými čarami), se nachází deska s nábojem $-Q$. Pole kladně nabité desky na ni působí silou o velikosti $F = E \cdot |-Q|$, kde pro intenzitu pole použijeme výraz (17) pro nabitou rovinu, přičemž $\sigma = Q/S$. Pak

$$F = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot |-Q| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}\,,$$

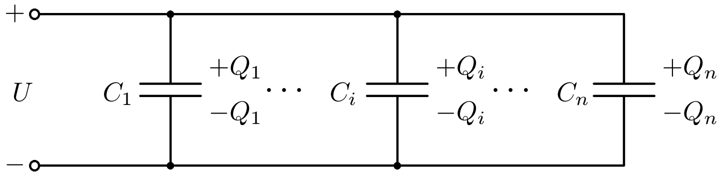
kde byl využit výraz (75) pro kapacitu deskového kondenzátoru. Numericky $F = 1{,}92 \cdot 10^{-3}$ N.

3.4 Kapacita soustavy kondenzátorů

Soustava (baterie) kondenzátorů může mít řazení paralelní, sériové nebo kombinované.

a) Paralelní řazení

Chceme-li při stejném napětí U na svorkách kondenzátoru zvětšit náboj Q kondenzátoru, musíme zvětšit jeho kapacitu C. Toho dosáhneme buď vhodnou konstrukcí kondenzátoru anebo paralelním spojením daných kondenzátorů.



Obr. 29

Při paralelním spojení jsou jedny desky všech kondenzátorů spojeny s jedním pólem a druhé desky se druhým pólem stejnosměrného zdroje (obr. 29). Napětí U je na všech kondenzátorech stejné, kdežto náboje se nahromadí v poměru kapacit:

$$Q_1 = C_1 U, \quad Q_2 = C_2 U, \ \dots \ Q_i = C_i U, \ \dots \ Q_n = C_n U\,.$$

Celkový náboj bude

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = U \sum_{i=1}^{n} C_i\,.$$

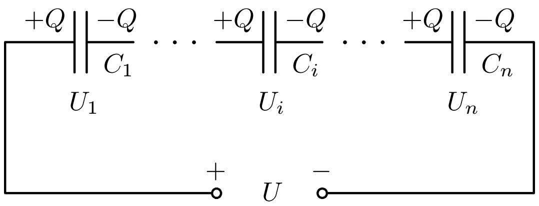
Nahradíme-li tuto řadu kondenzátorů jediným kondenzátorem, na kterém má být při napětí U tento náboj Q, musí mít kapacitu

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \sum_{i=1}^{n} C_i\,,} \tag{78}$$

která se rovná součtu kapacit jednotlivých kondenzátorů.

b) Sériové řazení

Požadujeme-li, aby se kondenzátor nabil týmž nábojem Q na vyšší napětí U, musíme zmenšit jeho kapacitu. Toho dosáhne buď vhodnou konstrukcí kondenzátoru anebo sériovým spojením daných kondenzátorů podle obr. 30.



Obr. 30

Při tomto spojení se na každém kondenzátoru nahromadí (naindukuje) stejný náboj Q. Napětí U se rozdělí na jednotlivé kondenzátory v obráceném poměru ke kapacitám:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}, \; ... \; U_i = \frac{Q}{C_i}, \; ... \; U_n = \frac{Q}{C_n}\,.$$

Součet těchto napětí musí dát vložené napětí U, tedy

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = Q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\,.$$

Nahradíme-li tuto řadu kondenzátorů jediným kondenzátorem, musí mít kapacitu C, pro jejíž převrácenou hodnotu platí

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}.} \tag{79}$$

4 Úlohy

1. Náboj kuličky

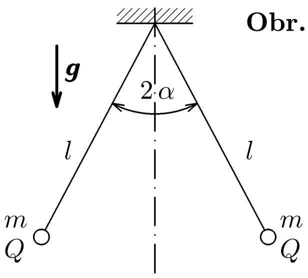
Kolik elementárních nábojů obsahuje náboj kuličky o hmotnosti $m = 1{,}2 \cdot 10^{-14}$ kg, udržuje-li se kulička v rovnováze v elektrickém poli deskového kondenzátoru s vodorovnými deskami ve vakuu vzdálenými od sebe $d = 5{,}0$ mm a je-li napětí mezi nimi $U = 92$ V?

2. Síla mezi protony a elektrony

Pro představu velikosti nábojů obou znamének (v normálním stavu látky ovšem neutralizovaných), který nesou částice látky, vypočtěte velikost přitažlivé síly, která by působila mezi protony a elektrony 1 gramu vodíku, kdyby všechny protony byly soustředěny na severním pólu Země a všechny elektrony na jižním pólu. Poloměr Země $R = 6{,}38 \cdot 10^6$ m.

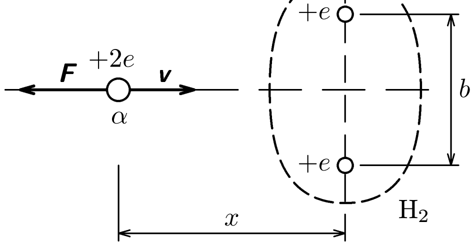
3. Měření náboje využitím tíhového pole

Náboje Q, které nesou malé kuličky o hmotnosti m zavěšené na stejných hedvábných vláknech o délce l v uspořádání podle obr. 31, lze v tíhovém poli určit změřením úhlu α, který svírají vlákna. Určete náboj Q, jsou-li známy tyto veličiny: $m = 6{,}0 \cdot 10^{-6}$ kg, $l = 7{,}0 \cdot 10^{-2}$ m, $2\alpha = 56°$, $g = 9{,}81$ m·s^{-2}.



Obr. 31

Obr. 32



4. Interakce dvou nabitých kuliček

Dvě malé vodivé kuličky jsou zavěšeny na dlouhých nevodivých vláknech stejné délky l, jejichž druhý konec je uchycen na jednom háčku. Kuličky jsou nabity stejnými náboji Q a jsou od sebe vzdáleny $r \ll l$. Co nastane, ztratí-li jedna z kuliček náboj? Do jaké vzdálenosti r_1 se nyní kuličky ustaví?

5. Interakce částice α s molekulou H_2

Částice α prolétne velkou rychlostí geometrickým středem molekuly vodíku (obr. 32) po trajektorii, která je kolmá ke spojnici protonů, jejichž rozteč je b. Pro jednoduchost uvažujte b = konst. a neuvažujte elektrické pole elektronů. Vypočtěte:

a) velikost síly $\boldsymbol{F}$ v závislosti na x,
b) pro která x bude odpudivá síla maximální.

6. Interakce dvou nabitých polokoulí

Dutá kovová koule o poloměru R s tenkými stěnami je rovnoměrně nabita nábojem Q a poté rozdělena hlavním řezem na dvě stejné polokoule, které se zřejmě budou odpuzovat. Vypočtěte velikost odpudivé síly pro případ, kdy polokoule budou těsně u sebe.

7. Dvě nabité roviny

Mějme dvě rozlehlé nabité desky (teoreticky roviny) s konstantními hustotami náboje $\sigma_1 = 6{,}0\ \mu\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$, $\sigma_2 = -4{,}0\ \mu\mathrm{C{\cdot}m^{-2}}$. Vypočtěte velikost intenzity elektrického pole rovin a nakreslete siločáry pro tyto případy:

a) Roviny jsou rovnoběžné a vzdálenost mezi nimi je $d = 30$ mm.
b) Roviny jsou na sebe kolmé.

K řešení využijte výsledků příkladu 3.

8. Elektrické pole nabitého kruhu

Tenký kruhový disk (kruh) o poloměru R je nabit kladným nábojem o plošné hustotě σ = konst. Disk leží v rovině $x = 0$ a jeho střed v počátku souřadnicové soustavy. Vypočtěte intenzitu jeho elektrického pole na ose disku v bodě o souřadnici $x > 0$.

9. Elektrické pole nabité roviny s kruhovým otvorem

Rovina je rovnoměrně nabita elektrickým nábojem s plošnou hustotou σ. V rovině je kruhový otvor o poloměru r.

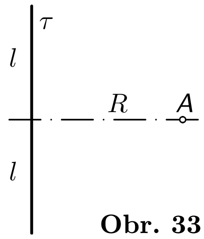
a) Vypočtěte intenzitu elektrického pole na kolmici k rovině, která prochází středem otvoru. Vzdálenost bodu, v němž počítáme pole, je y od středu otvoru.
b) Jaká je intenzita elektrického pole ve středu otvoru?

10. Elektrické pole nabité úsečky

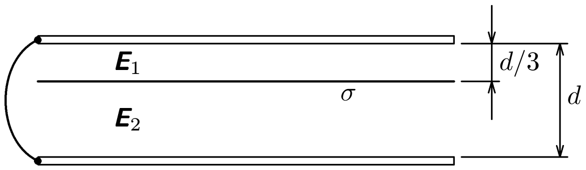
Vypočtěte intenzitu a potenciál elektrického pole úsečky délky $2l$ v bodě A, ležící na ose úsečky ve vzdálenosti R (obr. 33). Úsečka je nabita kladným nábojem s konstantní délkovou hustotou τ.

11. Elektrické pole nabité kružnice

U nabité kružnice, u níž jsme počítali intenzitu elektrického pole v příkladě 1, vypočtěte potenciál v bodě A a užitím vztahu mezi potenciálem a intenzitou ($E = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}x$) ověřte správnost výsledku pro intenzitu získaného v příkladě 1.



Obr. 33



Obr. 34

12. Potenciál nabité koule

U dielektrické koule nabité prostorovým nábojem Q, u níž jsme intenzitu elektrického pole počítali v příkladu 4, vypočtěte potenciál, přičemž pro střed koule zvolte $\varphi(0) = 0$. K řešení využijte výsledků řešení příkladu 4.

13. Elektrické pole rozlehlé kruhové desky

Vypočtěte potenciál a intenzitu elektrického pole rovnoměrně nabité kruhové desky o poloměru R v bodech na ose desky ve vzdálenosti $y \ll R$. Plošná hustota náboje je σ.

14. Mýdlová bublina

Z vodivé mýdlové bubliny o poloměru $r_1 = 25$ mm a nabité na potenciál $\varphi_1 = 1{,}2 \cdot 10^4$ V vznikne po prasknutí kapička vody o poloměru $r_2 = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ m. Jaký je potenciál φ_2 kapičky?

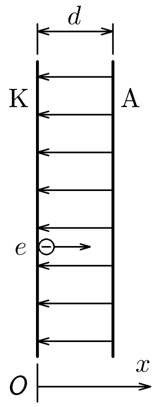
15. Rozdělení náboje

V jakém poměru se rozdělí náboj na dvě kovové koule o poloměrech $r_1 = 50$ mm a $r_2 = 10$ mm, které jsou vodivě spojeny dlouhým tenkým drátem a v jakém poměru bude plošná hustota náboje σ_1, σ_2 na těchto koulích?

16. Elektrické pole tří rovnoběžných vodivých rovin

Dvě velké kovové vzájemně rovnoběžné desky (teoreticky roviny) jsou vodivě spojeny (viz obr. 34). Mezi ně je ve vzdálenosti $d/3$ od horní desky vložena nabitá kovová fólie, přičemž plošná hustota náboje σ = konst. Vypočtěte velikost intenzit $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$.

17. Vakuová dioda



Obr. 35

Z rozžhavené deskové katody K vystupují ve vakuu k rovnoběžně instalované anodě A elektrony (obr. 35). Vzdálenost d mezi elektrodami je malá vzhledem k jejich rozměrům. Potenciál mezi deskami je popsán funkcí

$$\varphi = kx^{4/3}, \ x \in \langle 0, d \rangle.$$

a) Vypočtěte hustoty σ_K, σ_A povrchových nábojů na katodě a anodě za předpokladu $\sigma = \mathrm{konst.}$

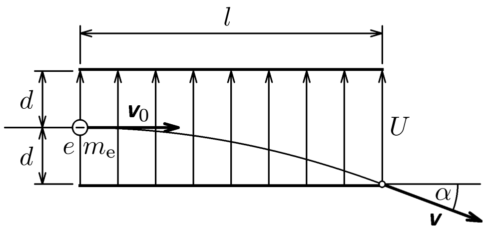
b) Jak závisí prostorová hustota ϱ nábojů mezi deskami na x?

18. Bohrův model atomu vodíku

Ve vývoji názorů na stavbu atomu zaujímá významné postavení Bohrův model atomu vodíku z r. 1913, který postuluje, že elektron se pohybuje po takových kruhových trajektoriích o poloměru r se středem v jádře – protonu, pro něž platí $2\pi m_\mathrm{e} vr = nh$, kde v je rychlost elektronu o hmotnosti m_e na příslušné trajektorii o poloměru r, h je Planckova konstanta a n přirozené číslo udávající pořadí trajektorie směrem od jádra. Odvoďte vztahy pro rychlost, poloměr trajektorie a frekvenci oběhu elektronu a vypočtěte velikost těchto veličin pro $n = 1$.

19. Svazek elektronů v příčném elektrickém poli

Svazek elektronů vstupuje do příčného elektrického pole vytvořeného rovnoběžnými nabitými deskami podle obr. 36. Je dáno: $l = 20{,}0$ mm, $d = 6{,}0$ mm, $U = 170$ V.



Obr. 36

a) Jaká je vstupní rychlost $\boldsymbol{v}_0$ elektronů, jestliže do elektrického pole vstupují kolmo na jeho siločáry, přičemž napětí U mezi deskami nastavíme tak, že elektrony na výstupu právě dopadnou na okraj spodní desky.

b) Vypočtěte velikost a směr rychlosti $\boldsymbol{v}$ elektronů při dopadu na okraj desky.

20. Interakce dvou elektronů

Dva elektrony nacházející se v klidu ve vzájemné vzdálenosti $b = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ m, jsou uvolněny z vazby. Vypočtěte:

a) elektrostatickou energii elektronů před uvolněním z vazby,
b) maximální rychlost, které elektrony dosáhnou ve vztažné soustavě, v níž se nacházely v klidu.

21. Částice v poli nabitého prstence

Tenký kovový prstenec o poloměru R byl ve vakuu nabit kladným rovnoměrně rozloženým nábojem Q. Rotační osa prstence nechť je osou x vztažné soustavy s počátkem ve středu prstence. Jak velkou počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ musíme udělit částici s kladným nábojem q a o hmotnosti m, která se nachází na ose x ve značné vzdálenosti od středu prstence ($x \gg R$), aby dosáhla středu prstence? Co nastane, bude-li počáteční rychlost nepatrně větší nebo menší než vypočtená hodnota?

22. Interakce protonu s částicí α

Proton o rychlosti $\boldsymbol{v}$ a hmotnosti m_p se přibližuje radiálně z velké vzdálenosti (teoreticky z nekonečna) k volné částici α (tj. k jádru helia), která se nachází v klidu v uvažované inerciální vztažné soustavě. Působením elektrického pole protonu se částice α uvede do pohybu.

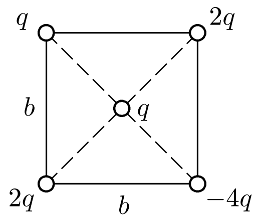
a) Vypočtěte, do jaké nejmenší vzdálenosti Δ_1 se proton přiblíží k částici α (vzdálenost měříme mezi středy částic) a jaká bude velikost v_1 rychlosti částice α v tomto okamžiku.
b) Po dosažení vzdálenost Δ_1 je proton částicí α dále brzděn, až se zastaví a začne se vracet zpět. Vypočtěte vzdálenost Δ_2 protonu od částice α v okamžiku, kdy bude jeho rychlost v pozorovací soustavě nulová. Jaká bude v tomto okamžiku velikost v_2 rychlosti částice α?
c) Stanovte poměry Δ_2/Δ_1 a v_2/v_1.

Děj probíhá ve vakuu. Pro jednoduchost předpokládejte, že $m_\alpha \approx 4m_\mathrm{p}$ a že jsou splněny podmínky pro použití klasické mechaniky, tj. $v \ll c$.

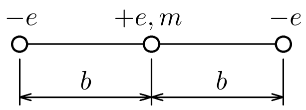
23. Elektrostatické pole soustavy čtyř nábojů

Jsou dány čtyři bodové náboje $q,\ 2q,\ -4q,\ 2q$, které jsou umístěny ve vakuu ve vrcholech čtverce o straně b podle obr. 37. Ve středu čtverce je náboj q. Vypočtěte:

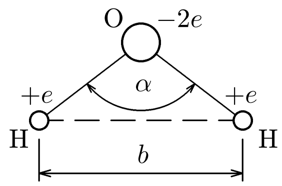
a) elektrostatickou sílu, kterou působí náboje ve vrcholech na náboj q ve středu čtverce,
b) elektrostatickou energii náboje q ve středu čtverce v poli nábojů v jeho vrcholech.



Obr. 37



Obr. 38



Obr. 39

24. Soustava tří nábojů na úsečce

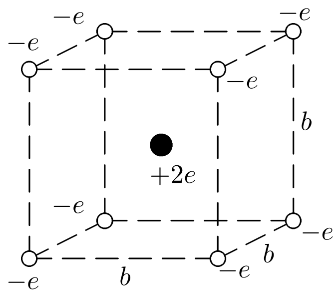
Jsou dány tři částice o nábojích $-e$, e, $-e$ rozmístěné na úsečce podle obr. 38. Vypočtěte:

a) elektrostatické síly působící na jednotlivé částice soustavy,
b) celkovou elektrostatickou energii soustavy.
c) Nechť středová částice o hmotnosti m se může pohybovat v příčném směru. Jaká bude úhlová frekvence malých vlastních kmitů částice?

25. Molekula vody

Vypočtěte vazbovou energii osamocené molekuly vody, kterou můžeme interpretovat jako celkovou elektrostatickou energii iontů molekuly: záporného iontu kyslíku o náboji $-2e$ a dvou kladných iontů vodíku (tj. protonů) o náboji $+e$ v konfiguraci podle obr. 39. Je známo $b = 1{,}54 \cdot 10^{-10}$ m, $\alpha = 105°$.

26. Elektrostatická energie soustavy nábojů



Obr.40

Uvažujme soustavu osmi částic s nábojem elektronu, které leží ve vrcholech krychle o straně b a centrální částici s nábojem dvou protonů, která leží ve středu krychle (obr. 40). Vypočtěte:

a) elektrostatickou energii centrálního náboje $2e$ v poli osmi nábojů $-e$,
b) vlastní elektrostatickou energii soustavy všech devíti nábojů.

27. Vlastní elektrostatická energie lineárního řetězce iontů

Vypočtěte vlastní elektrostatickou energii připadající na jeden ion neomezené soustavy iontů rozmístěných na přímce s roztečí $b = 3{,}00 \cdot 10^{-10}$ m tak, že ionty mají střídavě náboje $+e$, $-e$.

28. Vlastní elektrostatická energie nabité kulové plochy

Vypočtěte vlastní elektrostatickou energii uzavřené kulové plochy o poloměru R nesoucí rovnoměrně rozdělený povrchový náboj Q.

29. Model elektronu

Na začátku 20. století existovala hypotéza, že klidová hmotnost elektronu má čistě elektrostatickou povahu. Tato hypotéza získala pozornost zejména po vybudování speciální teorie relativity. Představte si elektron ve tvaru nabité koule o poloměru r_0 s konstantní objemovou hustotou náboje ϱ. Využitím výsledku řešení příkladu 9 a relativistického vztahu $W = m_e c^2$ vypočtěte poloměr elektronu. *Tento model má ovšem zjevnou závadu: elektrostatická energie vazby je kladná a kdyby v elektronu existovalo čistě elektrické pole, elektron by se okamžitě rozpadl.*

30. Vlastní elektrostatická energie jádra

Uvažujme jádro prvku o atomovém čísle Z obsahující Z protonů, které jsou spolu s neutrony více či méně rovnoměrně rozptýleny v jádře o poloměru r_0. Proveďte přibližný výpočet vlastní elektrostatické energie soustavy Z protonů v jádře. Při výpočtu budete omezení neznalostí prostorové konfigurace protonů. Orientačně předpokládejte, že jejich střední vzdálenost bude rovna r_0, i když ve skutečnosti bude – vzhledem ke konečným rozměrům protonů – jejich střední vzdálenost poněkud menší.

31. Nabitá koule při změně dielektrika

Jaký musí být poloměr koule, aby ve vakuu po nabití nábojem
$Q = 4{,}0 \cdot 10^{-6}$ C měla potenciál $\varphi = 1{,}2 \cdot 10^5$ V. Jaký bude potenciál φ koule, ponoříme-li ji nyní do vody ($\varepsilon_r = 81$) a náboj na ní se nezmění.

32. Kapacita kulového kondenzátoru

Odvoďte výraz pro kapacitu kulového kondenzátoru sestávajícího ze dvou soustředných vodivých kulových ploch: vnitřní o poloměru r_1, vnější r_2. Mezi těmito plochami je dielektrikum o permitivitě ε.

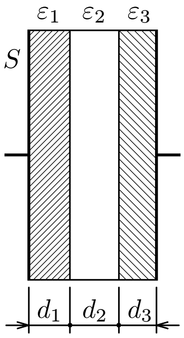
33. Kapacita lidského těla

Na základě orientačního výpočtu odhadněte kapacitu lidského těla.

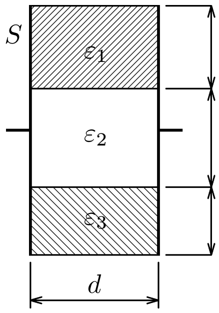
34. Deskový kondenzátor se složeným dielektrikem

Vypočtěte kapacitu deskového kondenzátoru, jehož dielektrikum je členěno:

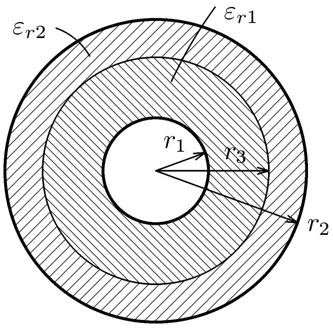
a) sériově podle obr. 41, přičemž je dáno ε_1, ε_2, ε_3, S, d_1, d_2, d_3.
b) paralelně podle obr. 42, přičemž je dáno ε_1, ε_2, ε_3, S, d, l_1, l_2, l_3 a předpokládá se, že desky mají čtvercový nebo obdélníkový tvar.



Obr. 41



Obr. 42



Obr. 43

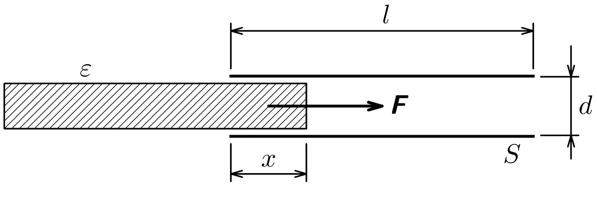
35. Kapacita válcového kondenzátoru s vrstveným dielektrikem

Vypočtěte kapacitu válcového kondenzátoru sestávajícího ze dvou vodivých válcových ploch o poloměrech r_1, r_2, mezi nimiž je vloženo vrstvené dielektrikum o relativních permitivitách $\varepsilon_{\mathrm{r}1}$, $\varepsilon_{\mathrm{r}2}$ s dělícím poloměrem r_3. Příčný řez kondenzátorem je na obr. 43. Délka kondenzátoru je l. Okrajový jev neuvažujte.

36. Kondenzátor s posuvným dielektrikem

Deskový vzduchový ($\varepsilon_{\mathrm{v}} \approx \varepsilon_0$) kondenzátor po nabití na napětí U vtahuje do prostoru mezi deskami dielektrikum, které je v uvažované situaci v poloze x (viz obr. 44). Obdélníkové desky kondenzátoru mají plošný obsah S, délku l, vzdálenost mezi sebou d a dielektrikum má permitivitu $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}$. Vypočtěte:

a) kapacitu kondenzátoru,
b) velikost síly, kterou elektrické pole kondenzátoru vtahuje dielektrikum v poloze x.



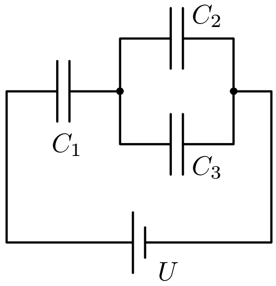
Obr. 44

37. Elektrostatická energie při paralelním spojení kondenzátorů

Kondenzátor o kapacitě C_1 má po nabití napětí U_1 a kondenzátor o kapacitě C_2 má napětí U_2. Vypočtěte:

a) celkovou elektrostatickou energii samostatných kondenzátorů (W_a),
b) celkovou elektrostatickou energii kondenzátorů po jejich paralelním spojení (W_b).
c) Vysvětlete rozdíl energií $W_a - W_b$.

38. Soustava kondenzátorů



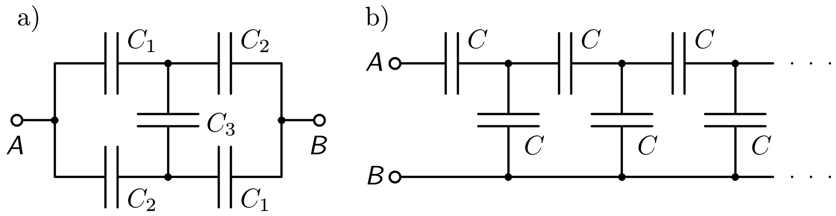
Je dána soustava kondenzátorů podle obr. 45, připojených na stejnosměrný zdroj o napětí U. Vypočtěte:

a) kapacitu soustavy,
b) náboj na každém kondenzátoru.

Obr. 45

39. Kapacita soustavy kondenzátorů

Jsou dány dvě soustavy kondenzátorů znázorněné na obr. 46a), 46b), přičemž ve druhém případě jde o nekonečnou síť stejných kondenzátorů. Vypočtěte kapacitu soustav mezi body A, B.



Obr. 46

Fyzikální konstanty pro řešení úloh

Rychlost světla ve vakuu	$c = 2{,}9979 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Planckova konstanta	$h = 6{,}6262 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$
Elementární náboj	$e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$
Permitivita vakua	$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$
	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}9876 \cdot 10^{9}\ \mathrm{F^{-1} \cdot m}$
	$\doteq 9 \cdot 10^{9}\ \mathrm{F^{-1} \cdot m}$
Permeabilita vakua	$\mu_0 = 1{,}2566 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H{\cdot}m^{-1}}$
Avogadrova konstanta	$N_\mathrm{A} = 6{,}0221 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Faradayova konstanta	$F = 9{,}6485 \cdot 10^{4}\ \mathrm{C{\cdot}mol^{-1}}$
Elektronvolt	$1\ \mathrm{eV} = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$
Klidová hmotnost elektronu	$m_\mathrm{e} = 9{,}1095 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost protonu	$m_\mathrm{p} = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost neutronu	$m_\mathrm{n} = 1{,}6750 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Klidová hmotnost částice α	$m_\alpha = 6{,}6429 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
Normální tíhové zrychlení	$g = 9{,}80665\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Rovníkový poloměr Země	$R_\mathrm{Z} = 6{,}3782 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}$
Gravitační konstanta	$\varkappa = 6{,}6726 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^{3}{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$

Řešení úloh

1. Počet elementárních nábojů $n = \dfrac{mgd}{eU} = 40\,.$

2. $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{N_{\mathrm{A}}me}{2RM_{\mathrm{H}}}\right)^2 = 5{,}14 \cdot 10^5\ \mathrm{N}\,.$

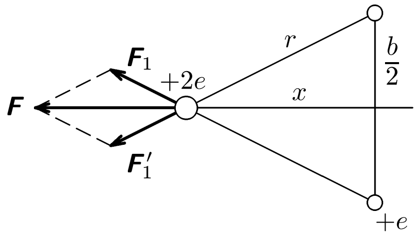
3. Výslednice elektrostatické síly a tíhové síly musí působit ve směru vlákna.

$$Q = 4l\sin\alpha\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 3{,}88\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\,.$$

4. Kuličky se dotknou, náboj Q se na nich přerozdělí tak, že každá bude mít náboj poloviční ($Q_1 = Q/2$) a kuličky se oddálí do vzdálenosti r_1. Napíšeme-li nyní podmínku rovnováhy pro výchozí a konečný stav (srovnej s řešením úlohy č. 3) dostaneme podmínku

$$4\frac{r_1}{r} = \sqrt{\frac{4l^2 - r^2}{4l^2 - r_1^2}} \approx 1 \quad \text{neboli} \quad r_1 \approx \frac{r}{4}\,.$$

5. a) **Obr.47**



$$\frac{F_1}{F} = \frac{r}{2x}\,, \quad F_1 = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,,$$

$$r^2 = x^2 + \frac{b^2}{4}\,,$$

$$F = \frac{e^2}{\pi\varepsilon_0}x\left(x^2 + \frac{b^2}{4}\right)^{-3/2}\,.$$

b) Síla bude mít extrém pro x, pro něž $\mathrm{d}F/\mathrm{d}x = 0$; to bude pro

$$1 - \frac{3x^2}{x^2 + \dfrac{b^2}{4}} = 0\,, \qquad \text{neboli} \qquad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}b \approx \pm 0{,}354\ b\,.$$

6. Pro intenzitu elektrického pole duté koule v bodech jejího povrchu užijeme výraz (49):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\,.$$

Na elementy polokoulí budou působit elementy sil $\mathrm{d}F = E\sigma\mathrm{d}S$, které mají směr normály elementů plochy. Pro odpudivé síly se uplatní průměty elementů sil do směru kolmého k rovině řezu koule. Součet těchto průmětů elementů sil bude úměrný ploše πR^2 řezu, která je průmětem plochy $2\pi R^2$ povrchu polokoule. Velikost odpudivé síly tedy bude

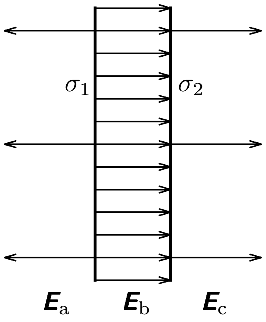
$$F = \pi R^2 \sigma E = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2} \,.$$

7. a) (Obr. 48) $E_\mathrm{a} = E_\mathrm{c} = \dfrac{\sigma_1 - |\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = 1{,}13 \cdot 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}\,,$

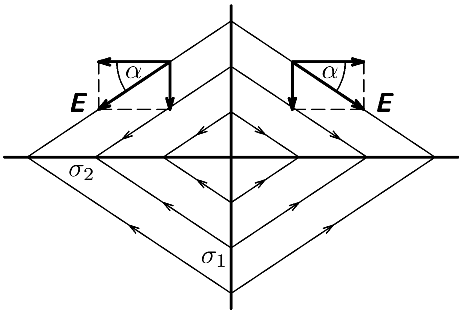
$E_\mathrm{b} = \dfrac{\sigma_1 + |\sigma_2|}{2\varepsilon_0} = 5{,}65 \cdot 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}\,,$

b) (Obr. 49) $E = \dfrac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 4{,}07 \cdot 10^5\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}\,,$

$\alpha = \mathrm{arctg}\left|\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\right| = 33^\circ 40'\,.$



Obr. 48



Obr. 49

8. K řešení využijeme výsledku pro nabitou kružnici (příklad 1). Integrací intenzit polí elementárních prstenců dostaneme

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)\,, \qquad E_y = E_z = 0\,.$$

9. a) Postup výpočtu je stejný jako při řešení elektrického pole nabité roviny. Jiná je jen dolní mez integrálu.

$$E_y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{y}{\sqrt{r^2 + y^2}}\,.$$

Tento výsledek dostaneme rovněž superpozicí pole nabité roviny a opačně nabitého kruhu (s hustotou $-\sigma$), tedy odečtením výsledku příkladu 3 a úlohy 8.

b) $E_\mathrm{o} = 0\,.$

10. Intenzita (viz příklad 2): $\mathrm{d}E = \dfrac{\tau \cos\beta \,\mathrm{d}\beta}{4\pi\varepsilon_0 R}$,

$$E = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 R} \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \cos\beta \,\mathrm{d}\beta \,, \quad \sin\beta_0 = \frac{l}{\sqrt{l^2+R^2}} \,, \quad E = \frac{\tau l}{2\pi\varepsilon_0 R\sqrt{l^2+R^2}} \,.$$

Potenciál

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} \,, \quad \varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\beta_0}^{\beta_0} \frac{\mathrm{d}\beta}{\cos\beta} = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1+\sin\beta_0}{1-\sin\beta_0} \,.$$

11. $\varphi = \dfrac{R\tau}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}} \,, \quad E = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \dfrac{R\tau x}{2\varepsilon_0\sqrt{(R^2+x^2)^3}} \,.$

12. 1. $0 \le r \le R: \ \varphi = -\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} r^2 \,.$

2. $r > R: \ \varphi = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0} \left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{3}{R} \right) .$

13. $\varphi = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2+y^2} - y \right) \approx C - \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} y \,, \quad$ kde $\quad C = \dfrac{\sigma R}{2\varepsilon_0} =$ konst.

$E = -\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ … stejný vztah jako pro nabitou rovinu.

14. Ze zákona zachování náboje plyne $\varphi_2 = \dfrac{r_1}{r_2}\varphi_1 = 6{,}0 \cdot 10^5$ V .

15. Koule mají stejnný potenciál. Pak $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{5}{1} \,, \ \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{1}{5} \,.$

16. $E_1 = \dfrac{2\sigma}{3\varepsilon_0} \,, \ E_2 = \dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0} \,.$

17. a) Užijeme vztah $E = -d\varphi/\mathrm{d}x$ a Gaussův zákon. Dostaneme

$$\sigma = -\frac{4}{3} k\varepsilon_0 x^{1/3} \,.$$

Katoda $(x = 0): \ \sigma_\mathrm{K} = 0 \,, \quad$ anoda $(x = d): \ \sigma_\mathrm{A} = -\dfrac{4}{3} k\varepsilon_0 \sqrt[3]{d} \,.$

b) Užijeme Gaussův zákon pro tenkou vrstvu nábojů o tloušťce $\mathrm{d}x$ ve vzdálenosti x od K a určíme hustotu

$$\varrho = -\frac{4}{9} \frac{k\varepsilon_0}{\sqrt[3]{x^2}} \,.$$

18. $v = \dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 hn}$, $r = \dfrac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi m_\mathrm{e} e^2}$, $f = \dfrac{m_\mathrm{e} e^4}{4\varepsilon_0^2 h^3 n^3}$,

$v_1 = 2{,}19 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $r_1 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$, $f_1 = 6{,}58 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz}$.

19. a) $v_0 = \dfrac{l}{2d}\sqrt{\dfrac{eU}{m_\mathrm{e}}} = 9{,}11 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) $v = v_0\sqrt{1 + \left(\dfrac{2d}{l}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{eU}{m_\mathrm{e}}\left[1 + \left(\dfrac{l}{2d}\right)^2\right]} = 1{,}063 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

$\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2d}{l} = 31{,}0^\circ$.

20. a) $W_\mathrm{e} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b} = 1{,}15 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J} = 7{,}20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}$.

b) Protože $W_\mathrm{e} \ll m_\mathrm{e}c^2 = 0{,}511$ MeV, můžeme použít klasickou mechaniku.

$$v = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon_0 b m_\mathrm{e}}} = 1130\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

21. Částice má v poli prstence elektrostatickou energii, kterou vypočteme užitím výrazu (23), do kterého dosadíme výsledek (8) řešení příkladu 1:

$$W_\mathrm{e} = q\int_0^\infty E\,\mathrm{d}x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}.$$

Po substituci $R^2 + x^2 = z$, $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ dostaneme

$$W_\mathrm{e} = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R^2}^\infty z^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Tento výsledek je v souladu s poznámkou o poli prstence pro $x \gg R$, uvedenou na závěr řešení příkladu 1. Má-li částice dosáhnout středu prstence, musí získat stejně velkou počáteční kinetickou energii. Budeme-li problém řešit klasickou mechanikou dostaneme

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}.$$

Bude-li počáteční rychlost nepatrně větší, částice proletí středem prstence a ve velké vzdálenosti od něj získá opět rychlost $\boldsymbol{v}_0$. Bude-li naopak rychlost částice nepatrně menší, vrátí se zpět a ve velké vzdálenosti od prstence bude mít rychlost $-\boldsymbol{v}_0$.

22. a) Přibližující se proton uvede odpudivou silou do pohybu částici α. V okamžiku největšího přiblížení bude rychlost obou částic stejná; označíme ji $\boldsymbol{v}_1$. Při ději musí být splněn zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti. Ve výchozí poloze mají částice tyto energie a hybnosti:

$$W_\mathrm{e} = 0, \quad W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 + 0 = \frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2, \quad \boldsymbol{p} = m_\mathrm{p}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = m_\mathrm{p}\boldsymbol{v}\,.$$

Při největším přiblížení částic bude

$$W_\mathrm{e1} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi\varepsilon_0\Delta_1} = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_1}, \quad W_\mathrm{k1} = (m_\mathrm{p} + m_\alpha)\frac{v_1^2}{2} = \frac{5}{2}m_\mathrm{p}v_1^2\,,$$

$$\boldsymbol{p}_1 = (m_\mathrm{p} + m_\alpha)\boldsymbol{v}_1 = 5m_\mathrm{p}\boldsymbol{v}_1\,.$$

Ze zákonů zachování energie a zachování hybnosti dostáváme soustavu rovnic

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_1} + \frac{5}{2}m_\mathrm{p}v_1^2\,, \qquad m_\mathrm{p}v = 5m_\mathrm{p}v_1\,.$$

Řešením je $\quad \Delta_1 = \dfrac{5e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{p}v^2}, \quad v_1 = \dfrac{v}{5}\,.$

b) Ve druhém stavu mají částice tyto energie a hybnosti:

$$W_\mathrm{e2} = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_2}, \quad W_\mathrm{k2} = \frac{1}{2}m_\alpha v_2^2 = 2m_\mathrm{p}v_2^2, \quad \boldsymbol{p}_2 = m_\alpha\boldsymbol{v}_2 = 4m_\mathrm{p}\boldsymbol{v}_2\,.$$

Platí opět zákony zachování (vzhledem k původnímu stavu):

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{p}v^2 = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0\Delta_2} + 2m_\mathrm{p}v_2^2\,, \quad m_\mathrm{p}v = 4m_\mathrm{p}v_2\,.$$

Řešením je $\quad \Delta_2 = \dfrac{4e^2}{3\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{p}v^2}, \quad v_2 = \dfrac{v}{4}\,.$

c) $\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} = \dfrac{16}{15}, \; \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{5}{4}\,.$

23. a) $F = \dfrac{5q^2}{2\pi\varepsilon_0 b^2}\,,\quad$ síla směřuje k náboji $-4q\,.$

b) $W_\mathrm{e} = \dfrac{q^2\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 b}\,.$

24. a) Výsledná síla působící na středovou částici má nulovou velikost. Na okrajové částice působí výsledná síla o velikosti

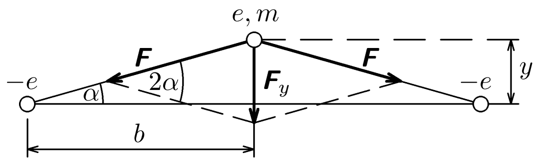
$$F_0 = \frac{3e^2}{16\pi\varepsilon_0 b^2}\,.$$

b) $W_\mathrm{e} = -\dfrac{3e^2}{8\pi\varepsilon_0 b}$.

c) Pohybovou rovnic $\boldsymbol{F}_y = m\boldsymbol{a}_y$ (obr. 50) upravíme na tvar

$$\ddot{y} + \frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 b^3 m} y = 0\,,$$

úhlová frekvence vlastních kmitů je $\Omega = e\sqrt{\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0 b^3 m}}$.



$F_y \approx \dfrac{2F}{b} y$

Obr. 50

25. $W_\mathrm{e} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b}(1 - 8\sin\dfrac{\alpha}{2}) = -8{,}01 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -50{,}0\ \mathrm{eV}$.

26. a) $W_\mathrm{e} = -\dfrac{8e^2}{\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 b} = \dfrac{e^2}{b} \cdot (-1{,}66 \cdot 10^{11})\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{F}^{-1}$.

b) $W'_\mathrm{e} = \dfrac{e^2}{\pi\varepsilon_0 b}\left(3 + \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{7}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{e^2}{b} \cdot 3{,}88 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{F}^{-1}$.

27. $\dfrac{W_\mathrm{e}}{N} = -\dfrac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 b}\left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots\right) = -\dfrac{e^2 \ln 2}{2\pi\varepsilon_0 b}$,

$\dfrac{W_\mathrm{e}}{N} = -1{,}066 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = -6{,}65\ \mathrm{eV}$.

Při řešení jsme uvážili Taylorův rozvoj funkce $\ln(1 + x)$ pro $x = 1$.

28. $W_\mathrm{e} = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.

29. Poloměr elektronu

$r_0 = \dfrac{3\mu_0 e^2}{20\pi m_\mathrm{e}}$, kde $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ je permeabilita vakua, $r_0 = 1{,}69 \cdot 10^{-15}$ m.

30. Vlastní elektrostatická energie soustavy n částic je dána vztahem (50), přičemž v našem případě je $Q_i = Q_j = e$. Indexy i, j tvoří variace 2. třídy ze Z prvků bez opakování. Z kombinatoriky je známo, že jejich celkový počet je $(Z-1)Z$. Bude-li střední vzdálenost mezi dvěma libovolnými protony r_0, bude vlastní elektrostatická energie jádra

$$W_\mathrm{e} \approx \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}(Z - 1)Z\frac{e^2}{r_0}.$$

Protože střední vzdálenost mezi protony je poněkud menší než r_0, bude ve skutečnosti vlastní elektrostatická energie jádra poněkud větší než udává odvozený vzorec. V literatuře (např. [1], s. 422) se lze setkat místo číselného koeficientu $1/8 = 0{,}125$ s koeficientem $3/20 = 0{,}15$. Vypočtená vlastní elektrostatická energie je kladná a tudíž není to ona, která tvoří pevnou strukturu jádra. V jádře je překryta zápornou energií vazby silné interakce mezi nukleony (tj. protony a neutrony), jejíž absolutní velikost mnohonásobně převyšuje elektrostatickou energii vazby mezi protony.

31. $R = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varphi_0} = 0{,}30\ \mathrm{m}, \quad \varphi = \dfrac{\varphi_0}{\varepsilon_\mathrm{r}} = 1480\ \mathrm{V}\,.$

32. $C = 4\pi\varepsilon\dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\,.$

33. Tvar těla nahradíme pro orientační výpočet tvarem koule; uvažujeme hmotnost $m \approx 80$ kg a hustotu $\varrho \approx 1 \cdot 10^3\ \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pak

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\sigma}} = 30\ \mathrm{pF}\,.$$

Tato hodnota přibližně odpovídá hodnotám získaných měřením.

34. a) K řešení použijeme Gaussův zákon, anebo problém převedeme na sériové řazení deskových kondenzátorů.

$$C_\mathrm{a} = \frac{S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d_3}{\varepsilon_3}}\,.$$

b) Problém převedeme na paralelní řazení deskových kondenzátorů.

$$C_\mathrm{b} = \frac{S}{(l_1 + l_2 + l_3)d}(\varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 + \varepsilon_3 l_3)\,.$$

35. $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 l}{\dfrac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}1}}\ln\dfrac{r_3}{r_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_{r2}}\ln\dfrac{r_2}{r_3}}\,.$

36. a) Kapacita: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}\left[1 + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\dfrac{x}{l}\right].$

b) Vzdálenost x zvětšíme na $x + \mathrm{d}x$ a vypočteme rozdíl elektrostatických energií v poloze x a $x + \mathrm{d}x$, který se musí rovnat práci síly na dráze $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}W_\mathrm{e} = \dfrac{Q_0^2}{2C} - \dfrac{Q_0^2}{2(C + \mathrm{d}C)} = F\,\mathrm{d}x$, kde $Q_0 = C_0 U = \dfrac{\varepsilon_0 SU}{d}$ je náboj pro $x = 0$.

Po dosazení dostaneme $F = \dfrac{\varepsilon_0 SU^2}{2ld}\dfrac{\varepsilon_\mathrm{r} - 1}{\left[1 + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\dfrac{x}{l}\right]^2}\,.$

37. a) $W_\mathrm{a} = \dfrac{1}{2}(C_1U_1^2 + C_2U_2^2)\,.$

b) $W_\mathrm{b} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{C_1 + C_2}\,.$

c) Rozdíl energií $W_\mathrm{a} - W_\mathrm{b} = \dfrac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}(U_1 - U_2)^2 > 0\,.$

Při spojení kondenzátorů se vyrovnalo napětí a přitom přecházel náboj (elektrický proud) z jednoho kondenzátoru na druhý. Tento přechod provázel vznik Jouleova tepla na úkor části elektrostatické energie.

38. a) $C = \dfrac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}\,.$

b) Pro náboje platí vztahy: $Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q = UC, \quad \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{Q_3}{C_3}\,.$

Řešením dostaneme

$$Q_1 = U\frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad Q_2 = U\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2 + C_3}, \quad Q_3 = U\frac{C_1C_3}{C_1 + C_2 + C_3}\,.$$

39. a) $C_\mathrm{a} = \dfrac{2C_1C_2 + C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + 2C_3}\,.$

b) Protože síť kondenzátorů je nekonečná, bude její kapacita stejná jako kapacita této sítě doplněné ještě o jeden článek (tj. jeden kondenzátor připojený paralelně a druhý sériově).

$C_\mathrm{b} = \dfrac{C}{2}(\sqrt{5} - 1)\,.$

Literatura

[1] *Fejnmanovskije lekcii po fizike: Zadači i upražněnija s otvětami i rešenijami.* Izd. Mir, Moskva 1969. (Překlad z originálu: *The Feynman Lectures on Physics. Excercises.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, London 1964-1965.)

[2] Fuka J., Havelka B.: *Elektřina a magnetismus.* 3.vydání. SPN, Praha 1979.

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fyzika.* SNTL, Praha 1961.

[4] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL/SVTL, Praha 1966, 1976, 1981.

[5] Irodov, I. E.: *Zadači po obščej fizike.* Izd. Nauka, Moskva 1988.

[6] Kružík, M.: *Sbírka úloh z fyziky.* SPN, Praha 1969.

[7] Purcell E. M.: *Električestvo i magnetizm. Berkleevskij kurs fiziki, II. tom.* Izd. Nauka, Moskva 1971. (Překlad z originálu: Purcell E. M.: *Elektricity and Magnetism. Berkley Physics Course, volume 2.* Mcgraw–hill book company.)

[8] Vybíral, B.: *Fyzikální pole z hlediska teorie relativity.* SPN, Praha 1976, SPN, Bratislava 1980.

[9] Vybíral, B.: *Teorie elektromagnetického pole.* Pedagogická fakulta v Hradci Králové, Hradec Králové 1984.