KINEMATIKA A DYNAMIKA TUHÉHO TĚLESA

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod

Mechanika je přirozeným základem fyziky, neboť podává obraz o relativním klidu a pohybu fyzikálních těles. Pokud se budeme zabývat podmínkami rovnováhy těles, použijeme metod, které nám dává **statika**. Ta byla předmětem studijního textu [11]. Bude-li nás zajímat popis pohybu těles, aniž bychom se zabývali příčinami jeho změn, použijeme metod **kinematiky**. Ta popisuje polohu, rychlost a zrychlení těles. Královnou mechaniky je **dynamika**, pomocí níž vyšetříme souvislost mezi pohybem těles a silami a jejich momenty, které na tělesa působí.

V předloženém textu se soustředíme na kinematiku a dynamiku tuhého tělesa. Mechanika obecného prostorového pohybu těles je velmi složitá, a proto se budeme podrobněji zabývat jen *obecným rovinným pohybem* tuhého tělesa. Na úvod probereme zvláštní případy pohybu - translační pohyb a rotační pohyb kolem nehybné osy. Tím se fyzikální a matematický aparát zjednoduší do té míry, že bude zvládnutelný vyspělými studenty středních škol.

V textu se využívá vektorové algebry, jednoduchých metod diferenciálního a integrálního počtu. Při řešení úloh narazíme i na jednoduché diferenciální rovnice, které se dají řešit separací proměnných. To je taková úprava diferenciální rovnice, při níž se na opačné strany rovnice od sebe oddělí (separují) nezávisle proměnná a závislé proměnná veličina a jejich diferenciály. Takovou rovnici již pak lze zpravidla integrovat.

Pokud bychom se chtěli zabývat obecným prostorovým pohybem tuhého tělesa, narazili bychom na tenzorové veličiny, na tenzorovou algebru a analýzu a na soustavy diferenciálních rovnic. Tím bychom však výrazně překročili rámec středoškolských možností.

V předloženém textu jsme se snažili o rigorozní obecný výklad, který běžné středoškolské učebnice postrádají. Použití obecných zákonitostí je ilustrováno na jedenácti řešených příkladech. Určitou zběhlost pro řešení úloh, např. ve fyzikální olympiádě, získá studující až po samostatném řešení předložených úloh, kterých je v textu čtyřicet. Pro kontrolu správnosti jsou na závěr textu uvedeny výsledky úloh.

1 Kinematika tuhého tělesa

1.1 Poloha tuhého tělesa při pohybu

Ve studijním textu [11] jsme se zabývali vyšetřováním podmínek rovnováhy tuhého tělesa. Nyní se budeme věnovat pohybu tuhého tělesa a musíme především znát, kolika nezávislými souřadnicemi bude určena poloha tuhého tělesa, tedy kolik *stupňů volnosti* má tuhé těleso. Tento problém byl vysvětlen již v úvodním textu [11], a proto si výsledky úvah jen připomeneme.

Volné tuhé těleso konající obecný prostorový pohyb má *šest stupňů volnosti*. K určení jeho polohy je tedy třeba udat šest nezávislých skalárních souřadnic, za které je z dynamického hlediska výhodné volit tři souřadnice (např. kartézské) udávající polohu hmotného středu tělesa (resp. jeho těžiště) a další tři úhlové souřadnice, které určují orientaci tělesa vzhledem ke vztažné soustavě pevně spojené s tělesem a procházející hmotným středem.

Důležitým zvláštním případem pohybu tuhého tělesa je *translační (posuvný) pohyb*. Při tomto pohybu libovolná přímka spojená s tělesem zůstává stále rovnoběžná s kteroukoli svou předchozí polohou. Proto k popisu polohy tělesa při translačním pohybu stačí udat polohu jediného jeho bodu — např. hmotného středu. Těleso při tranlačním pohybu má *tři stupně volnosti*.

Zamezíme-li pohybu jednoho bodu tělesa, odebereme mu tři stupně volnosti. Tělesu zůstanou *tři stupně volnosti* a bude vykonávat *prostorovou rotaci kolem okamžité osy rotace*, která prochází pevným bodem. Příkladem je pohyb setrvačníku.

Zamezíme-li pohybu dvou bodů tělesa, určíme tím *nehybnou osu rotace*, kolem níž bude těleso vykonávat rotační (otáčivý) pohyb. Tyto dva body jsou určeny šesti souřadnicemi, avšak mezi nimi je jeden vztah, vyjadřující stálou vzdálenost mezi těmito body. Proto je pohyb tělesa omezen pěti podmínkami a tělesu tudíž zůstane *jeden stupeň volnosti*. Polohu tělesa nejlépe určíme úhlem φ otočení kolem pevné osy.

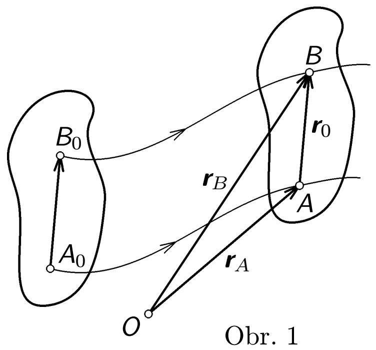
Důležitým zvláštním případem pohybu tělesa je jeho *rovinný pohyb*, při kterém body tělesa opisují rovinné trajektorie, které leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách. K popisu polohy tělesa pak stačí popsat polohu jediné úsečky v rovině. Tato poloha je zřejmě určena třemi nezávislými souřadnicemi, např. dvěma kartézskými souřadnicemi jednoho bodu úsečky a úhlem, který úsečka svírá s libovolnou přímkou v rovině pohybu. *Tuhé těleso konající rovinný pohyb má tři stupně volnosti.*

Obecný pohyb tuhého tělesa v prostoru lze rozložit na dva nezávislé pohyby: na *translační pohyb* určitého bodu tělesa, tzv. vztažného (referenčního) bodu, a na sled okamžitých *rotačních pohybů* kolem tohoto bodu, přičemž tento rozklad závisí na volbě vztažného bodu. Obecný důkaz tohoto tvrzení podal r. 1830 fancouzský matematik M. Chasles [čti Šál] a uvádí se jako Chaslesova věta (viz např. [9]).

Vzhledem k tomu, že volné tuhé těleso v prostoru má šest stupňů volnosti, je k úplnému popisu jeho pohybu třeba řešit šest složkových pohybových rovnic. Tyto rovnice obsahují jako neznámé šest veličin, které popisují pohybový stav tělesa. Pohybové rovnice dostaneme aplikací *impulsových vět*, přičemž I. impulsová věta dává popis translace tělesa a II. impulsová věta popis rotace tělesa. V případě obecného rovinného pohybu řešíme tři složkové rovnice, přičemž dvě popisují translaci a třetí rotaci tělesa.

1.2 Translační pohyb tuhého tělesa

Jak jsme si uvedli, zůstává při translačním pohybu úsečka spojující libovolné dva body tělesa stále rovnoběžná se svou výchozí polohou. Proto mají trajektorie všech bodů tělesa při jeho translaci shodný tvar a stejnou délku — trajektorie jsou shodné, vzájemně posunuté křivky. Při translačním pohybu libovolná přímka spojená s tělesem nemění svůj směr.



Obr. 1

Uvažujme dva body A, B tělesa při translačním pohybu (obr. 1). Pro jejich polohové vektory platí

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t)\,,$$

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_B(t) = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_0\,,$$

kde vektor $\boldsymbol{r}_0$ je konstantní. Proto pro rychlost a zrychlení dvou libovolných bodů tělesa dostaneme

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_A\,, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{a}_B = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_A\,. \qquad (2)$$

Všechny body tuhého tělesa se tedy při translačním pohybu pohybují *stejnou rychlostí a se stejným zrychlením*. Pohybový stav tuhého tělesa je při translačním pohybu jednoznačně určen pohybem jediného bodu, za který zpravidla volíme hmotný střed tělesa. K řešení translačního pohybu tedy použijeme poznatků pro pohyb jednoho hmotného bodu.

1.3 Rotační pohyb tuhého tělesa kolem nehybné osy

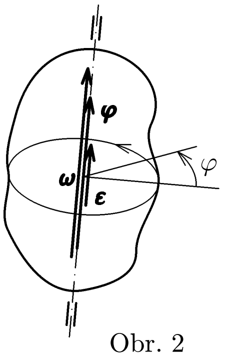
Při rotaci tuhého tělesa kolem osy nehybné v tělese i ve vztažné soustavě vykonávají všechny body tělesa (s výjimkou bodů osy) trajektorie ve tvaru kružnic ležících v rovině kolmé k ose se středem na ose. Ve zvolené inerciální vztažné soustavě je pohybový stav tělesa popsán jedinou souřadnicí — *úhlem otočení* $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, který definujeme jako vektor ležící v ose rotace (obr. 2). Jeho směr určíme nejsnáze *pravidlem pravé ruky*: ukazují-li prsty pravé ruky směr orientované trajektorie bodů tělesa, ukáže palec směr vektoru $\boldsymbol{\varphi}$. Rychlost změny úhlu otočení popisuje vektor *úhlová rychlost* $\boldsymbol{\omega}$, který definujeme výrazem

$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

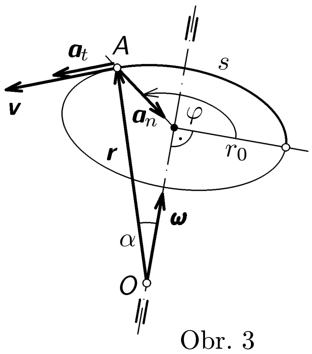
Rychlost změny úhlové rychlosti popisuje vektor *úhlové zrychlení* $\boldsymbol{\varepsilon}$, který definujeme výrazem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Oba vektory $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ leží v ose rotace (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

Nyní můžeme určit rychlost a zrychlení bodu A tělesa rotujícího kolem nehybné osy (obr. 3), která prochází počátkem O vztažné soustavy. Je zřejmé, že pro dráhu s a velikost rychlosti $\boldsymbol{v}$ bodu A platí

$$s = r_0\varphi = |\boldsymbol{r}|\varphi \sin\alpha\,,$$

$$|\boldsymbol{v}| \equiv v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r_0\omega = |\boldsymbol{\omega}||\boldsymbol{r}|\sin\alpha\,,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor bodu A. Druhý ze vztahů nás vede k výpočtu úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ jako vektoru podle Eulerova vztahu

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,.} \tag{3}$$

Jeho derivací podle času podle vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí při zachování pořadí funkcí (pro vektorový součin dvou vektorů ve vztahu (3) neplatí komutativní zákon) dostaneme pro zrychlení bodu A postupně výrazy

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\,. \tag{4}$$

První složka zrychlení v (4) má zřejmě směr tečny ke kružnici v bodě A a je tedy *tečným zrychlením* $\boldsymbol{a}_t$ bodu A. Druhá složka zrychlení v (4) má zřejmě směr normály ke kružnici v bodě A a je tedy *normálovým zrychlením* $\boldsymbol{a}_n$ bodu A. Neboli

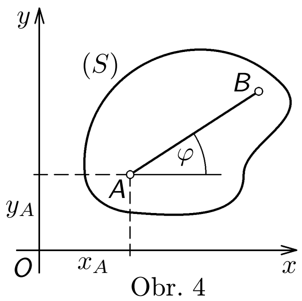
$$\boxed{\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}\,,} \tag{5}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})\,.} \tag{6}$$

1.4 Rovinný pohyb tuhého tělesa

a) Popis pohybu

Jak jsme uvedli, body tělesa při rovinném pohybu opisují rovinné trajektorie, které leží ve vzájemně rovnoběžných rovinnách. Proto pro popis rovinného pohybu postačí popisovat průmět (S) tělesa do jedné z těchto rovin, kterou volíme za *základní* (obr. 4). Tak místo trojrozměrného tělesa vyšetřujeme pohyb plošného útvaru v rovině.



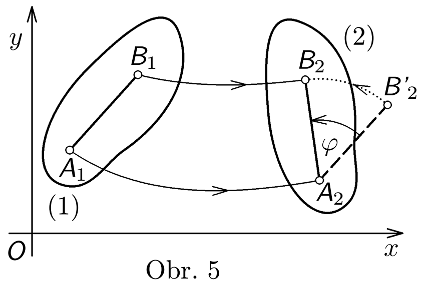
Obr. 4

Poloha tělesa při rovinném pohybu bude jednoznačně určena polohou úsečky AB ve vztažné soustavě v základní rovině, tedy polohou referenčního (vztažného) bodu (např. A) a směrem úsečky AB. Pohyb budou popisovat rovnice

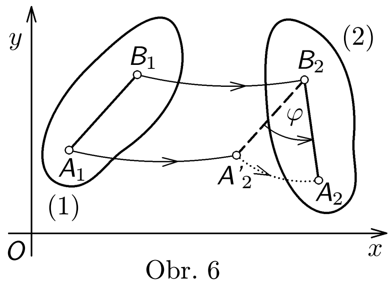
$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t)\,, \\ y_A &= y_A(t)\,, \\ \varphi &= \varphi(t)\,, \end{aligned} \tag{7}$$

v souladu s poznatkem, že těleso vykonávající rovinný pohyb má tři stupně volnosti.

S ohledem na popis pohybu rovnicemi (7) lze rovinný pohyb tělesa rozložit na *translační pohyb* referenčního bodu (A) a na *rotační pohyb* kolem referenčního bodu (A) — viz obr. 5. Přitom lze ukázat, že rotační složka rovinného pohybu nezávisí na volbě referenčního bodu. Na obr. 6 je znázorněn rozklad pohybu pro případ, že referenčním bodem je bod B.



Obr. 5



Obr. 6

b) Rychlost a zrychlení bodů tělesa při rovinném pohybu

Polohu libovolného bodu B tělesa, popsanou polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_B(t)$, lze vyjádřit ve tvaru

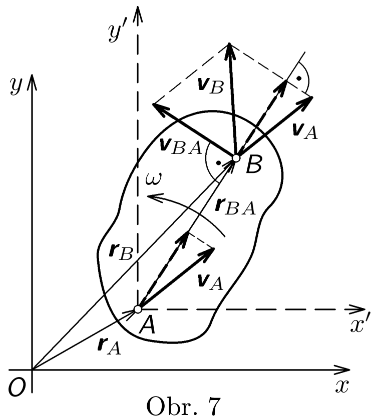
$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{BA} ,$$

kde $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t)$ je polohový vektor bodu A a $\boldsymbol{r}_{BA} = \boldsymbol{r}_{BA}(t)$ je polohový vektor bodu B vzhledem k bodu A ve vztažné soustavě, jejíž počátek je v bodě A. Derivací tohoto vztahu podle času dostaneme vztah pro rychlost bodu B:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA} , \text{ kde}$$

$$|\boldsymbol{v}_{BA}| = \omega \cdot \overline{AB} , \quad (\boldsymbol{v}_{BA} \perp \overline{AB}) .$$

Protože pohybem bodu B v soustavě $Ax'y'$ je rotace okolo bodu A, je rychlost $\boldsymbol{v}_{BA}$ kolmá k úsečce AB. Pak je zřejmé, že *při rovinném pohybu průměty rychlostí dvou libovolných bodů tělesa na přímku, která je spojuje, jsou si rovny* — **věta o průmětech rychlostí.**



Obr. 7

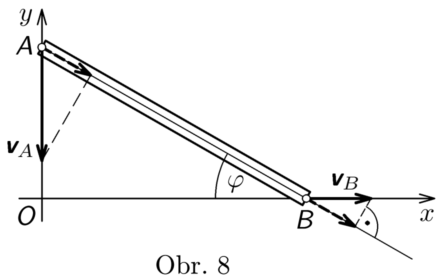
Pro zrychlení bodu B analogicky platí (srovnej s výrazem (4)):

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}) .$$

Z výrazů pro rychlost a zrychlení bodu B je zřejmý rozklad rovinného pohybu tělesa na translační pohyb referenčního bodu (A) a na rotační pohyb kolem tohoto bodu.

Příklad 1

Tyč se pohybuje tak, že její koncové body A, B se trvale nacházejí na osách x, y. Určete rychlost bodu B, je-li dána okamžitá rychlost $\boldsymbol{v}_A$ bodu A a úhel φ (obr. 8).



Obr. 8

Řešení:

Podle věty o průmětech rychlostí platí

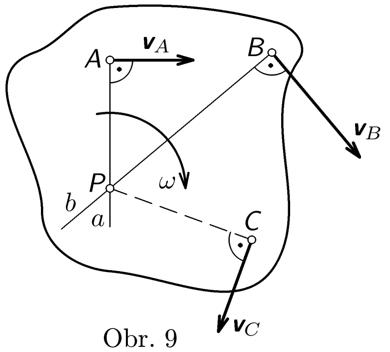
$$v_A \sin\varphi = v_B \cos\varphi\,,\ \ \varphi \in \ \langle 0\,, \frac{\pi}{2})\,.$$

Neboli

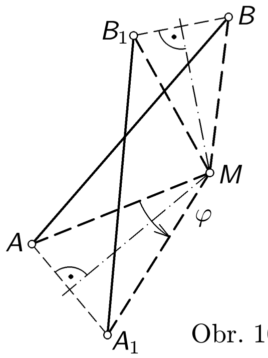
$$v_B = v_A \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = v_A \operatorname{tg}\varphi\,.$$

c) Pól rovinného pohybu tělesa

Rychlosti bodů tělesa při jeho rovinném pohybu lze jednoduše určit užitím pólu pohybu. *Pólem pohybu* neboli *okamžitým středem otáčení* se nazývá bod P průmětu tělesa do roviny pohybu, jehož rychlost je v daném okamžiku nulová: $v_P = 0$ — viz obr. 9.



Obr. 9

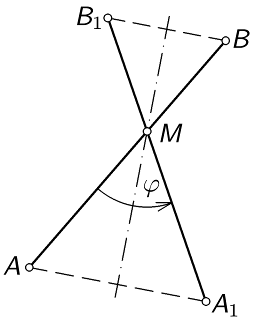


Obr. 10

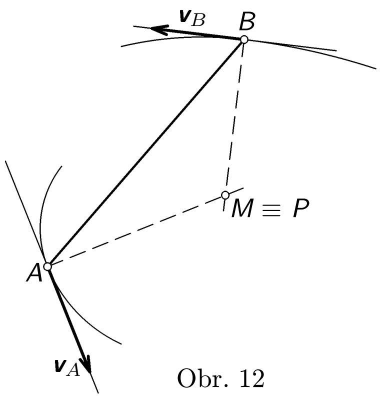
Nyní je otázkou, zda pól pohybu můžeme pro každý okamžik libovolného rovinného pohybu nalézt. Ukážeme, že ano. Uvažujme libovolnou úsečku AB v průmětu tělesa do roviny pohybu (obr. 10), která při pohybu přejde do polohy jiného směru A_1B_1. Průsečík M symetrál úseček AA_1, BB_1 je totiž bod, kolem něhož se úsečka AB otočí o úhel φ do nové polohy A_1B_1, neboť trojúhelníky ABM, A_1B_1M jsou shodné a pohyb lze považovat za otočení trojúhelníku ABM, k němuž náleží i úsečka AB, kolem bodu $M{\equiv}P$ o úhel φ. Pokud nastane zvláštní případ, že osy úseček AA_1, BB_1 splynou (obr. 11) bude bod M přímo průsečíkem úseček AB, A_1B_1.

Obr. 10 a 11 ukazuje, že každé přemístění úsečky AB do nové polohy A_1B_1, které není posunutím (pak by úsečky AB, A_1B_1 byly rovnoběžné) je otočením okolo nějakého bodu M, který v limitě $|AA_1| \to 0$, $|BB_1| \to 0$ nazýváme pól pohybu P.

Úsečky AA_1, BB_1 na obr. 10 a 11 jsou sečnami trajektorií příslušných bodů. V limitě pro každý časový interval tyto sečny přejdou v tečny (viz obr. 12) a osy úseček AA_1, BB_1 přejdou v normály trajektorií. Jejich průsečík je pól pohybu P.



Obr. 11



Obr. 12

Vraťme se nyní k popisu obecného rovinného pohybu podle obr. 9. Zvolme si body A, B, jejichž rychlosti $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ nejsou paralelní. Pak pól P je průsečíkem přímky a, která prochází bodem A kolmo k $\boldsymbol{v}_A$, a přímky b, která prochází bodem B kolmo k $\boldsymbol{v}_B$. Pak $v_P = 0$. Kdybychom předpokládali $v_P \neq 0$ musel by podle věty o průmětech rychlostí být vektor $\boldsymbol{v}_P$ současně kolmý k a i b, což není možné.

Pro velikosti rychlostí bodů A, B platí

$$v_A = \omega \cdot \overline{PA},$$

$$v_B = \omega \cdot \overline{PB},$$

neboli

$$\frac{v_A}{\overline{PA}} = \frac{v_B}{\overline{PB}} = \omega . \tag{8}$$

Velikosti rychlostí bodů tělesa při rovinném pohybu jsou úměrné jejich vzdálenosti od pólu pohybu.

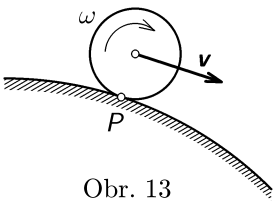
Je-li znám pól, lze určit rychlost libovolného bodu C:

$$v_C = \omega \cdot \overline{PC}\,, \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{v_A}{\overline{PA}}\,.$$

Pól nejlépe určíme *graficky* (viz příklad 2) ze znalosti neparalelních rychlostí dvou libovolných bodů tělesa.

d) Zvláštní případy polohy pólu pohybu

1. Jestliže se těleso při rovinném pohybu *odvaluje* bez skluzu, je pólem pohybu bod dotyku tělesa s podložkou (obr. 13). V daném okamžiku je $v_P = 0$, jinak by se bod P musel smykat. Poloha bodu P je však okamžitá — bod P se přesouvá jistou rychlostí po podložce. Bude-li se odvalovat koule nebo válec po rovné podložce, bude rychlost přemisťování pólu rovna rychlosti $\boldsymbol{v}$ středu tělesa. V jiných případech, například při valení oválu, budou tyto rychlosti různé.

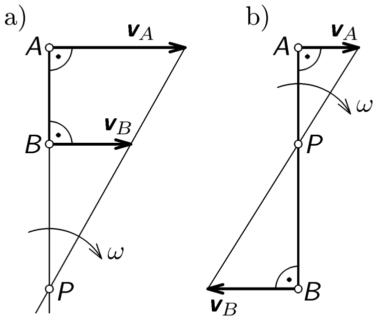


Obr. 13

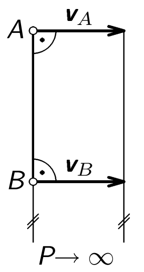
2. Jsou-li rychlosti $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ bodů A, B tělesa při rovinném pohybu vzájemně *rovnoběžné* a kolmé na úsečku $\overline{AB}$ a mají-li *různé velikosti*, leží pól P v průsečíku přímky spojující body A, B a přímky spojující koncové body vektorů $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ (obr. 14a, b).

3. Budou-li mít souhlasně rovnoběžné vektory $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, na rozdíl od případu ad2, *stejnou velikost a stejný směr* jde o limitní případ polohy pólu pohybu, který zřejmě leží v nekonečnu (obr. 15).

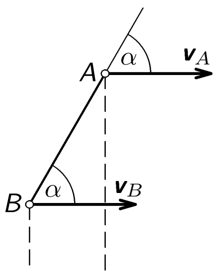
4. Jsou-li rychlosti $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, bodů A, B tělesa při rovinném pohybu souhlasně rovnoběžné vektory a nejsou-li kolmé k úsečce $\overline{AB}$ (obr. 16), tak především podle věty o průmětech rychlostí musí být $v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha$, neboli $v_A = v_B$. Z toho je pak zřejmé, že pól $P \to \infty$.



Obr. 14



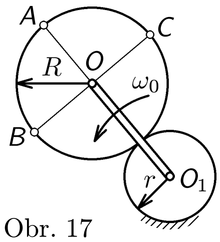
Obr. 15



Obr. 16

Příklad 2

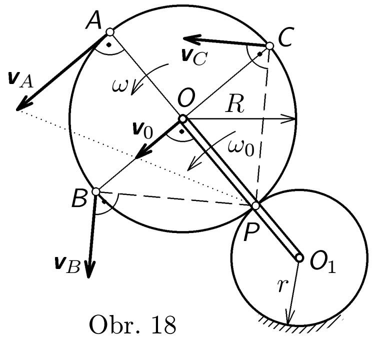
Je dáno pevné kolo o středu O_1 a poloměru r, po němž se bez skluzu odvaluje druhé kolo o středu O a poloměru R tak, že unašeč, který spojuje středy O_1, O se otáčí úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_0$ (obr. 17). Určete směr a velikosti rychlostí bodů O, A, B, C pohyblivého kola.



Obr. 17

Řešení

Problém řešíme pomocí pólu pohybu P, kterým je zřejmě bod dotyku obou kol, kolem něhož se pohyblivé kolo otáčí okamžitou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Její velikost určíme z úvahy, že bod O je společný unašeči i kolu. Proto



Obr. 18

$$v_0 = \omega_0(R + r) = \omega R\,.$$

Z toho

$$\omega = (1 + \frac{r}{R})\omega_0\,.$$

Pak

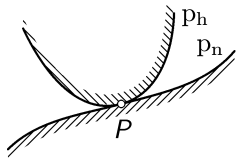
$$v_A = 2R\omega = 2(R + r)\omega_0\,,$$

$$v_B = v_C = \sqrt{2}R\omega = \sqrt{2}(R + r)\omega_0\,.$$

Směry vektorů rychlostí jsou zřejmé z obr. 18. Problém lze řešit rovněž přímo (bez výpočtu ω) užitím vztahu (8), přičemž výchozí bude rychlost v_0.

e) Polodie nehybná a polodie hybná

Při rovinném pohybu tělesa se poloha pólu obecně mění s časem. Proto se určují křivky, které jsou množinami poloh těchto bodů při pohybu a nazývají se *polodie*. Rozlišujeme polodii nehybnou a polodii hybnou podle toho, v jaké vztažné soustavě polohu pólu při pohybu určujeme.



Obr. 19

Polodie nehybná ($\mathrm{p_n}$) je množina poloh pólů určených ve vztažné soustavě nehybně spojené s rovinou, v níž se pohyb tělesa uskutečňuje. *Polodie hybná* ($\mathrm{p_h}$) je množina poloh pólů určených ve vztažné soustavě pevně spojené s tělesem. Okamžitou polohou pólu je pak bod P, ve kterém se obě polodie dotýkají (obr. 19). Při rovinném pohybu tělesa se polodie hybná odvaluje po polodii nehybné.

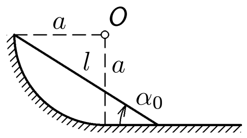
Zvlášť jednoduché je určení polodií u *valení válce nebo koule* (obr. 13). Polodií hybnou je zřejmě obvodová kružnice válce (hlavní kružnice koule), polodií nehybnou je průsečnice plochy, po níž se válec (koule) valí, s rovinou pohybu.

Příklad 3

Tyč délky l klouže po vedení, které se skládá ze čtvrtkruhové části o poloměru $a < l$ a z přímé části podle obr. 20. Výchozí poloha tyče je naznačena na obrázku. Určete nehybnou polodii:

a) graficky,

b) analyticky.



Obr. 20

Řešení

a) *Graficky* (viz obr. 21)
Při grafické konstrukci hledáme průsečík kolmic vztyčených v koncových bodech A, B tyče kolmo k tečnám trajektorie těchto bodů (obr. 21). Pro bod A tyto kolmice procházejí středem O, pro bod B jsou to rovnoběžky. Pro $\alpha \to 0$ nehybná polodie zřejmě asymptoticky ubíhá k nekonečnu.

b) *Analyticky*
Počátek kartézké vztažné soustavy položíme do bodu O, osa x bude rovnoběžná s přímou částí vedení (obr. 21). Rovnici nehybné polodie vyjádříme v polárních souřadnicích. Zřejmě platí

$$r(\varphi) = \frac{\overline{CB}}{\cos\varphi}\,,$$

kde

$$\overline{CB} = l\cos\alpha - a\cos\varphi\,,$$

přičemž

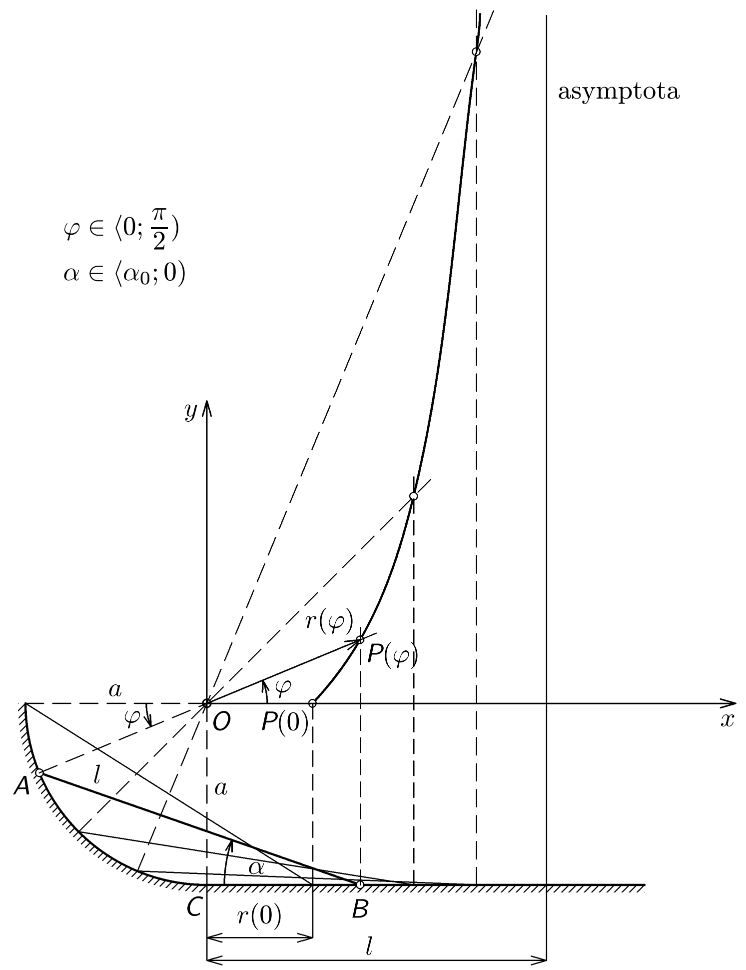
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}(1-\sin\varphi)^2}\,.$$

Pak

$$r(\varphi) = l\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi} - a = \frac{l}{\cos\varphi}\sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}(1-\sin\varphi)^2} - a\,.$$

Počáteční bod $P(0)$ má polohu

$$r(0) = \sqrt{l^2-a^2} - a\,.$$

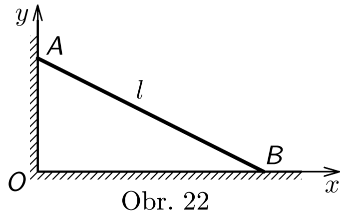


asymptota
$\varphi \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$
$\alpha \in \langle \alpha_0; 0)$
y
x
$r(\varphi)$
$P(\varphi)$
φ
a
φ
O
P(0)
A
l
a
α
C
B
r(0)
l

Obr. 21

Příklad 4

Tenká tyčka délky l klouže svými konci A, B po osách x, y kartézské soustavy souřadnic (obr. 22). Graficky najděte nehybnou polodii a hybnou polodii.

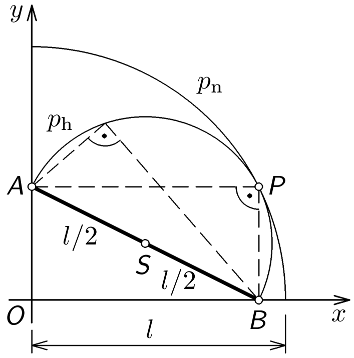


Obr. 22

Řešení (obr. 23)

Polodie nehybná je čtvrtkružnice o poloměru l se středem v počátku O.
Polodie hybná je půlkružnice o poloměru $l/2$ se středem S ve středu tyčky.
Okamžitý *pól pohybu* P je bod dotyku obou kružnic.

Poznámka: Body tyčky, s výjimkou bodů A, B a S, opisují eliptické trajektorie. Bod S se pohybuje po kružnici.



Obr. 23

2 Dynamika tuhého tělesa

2.1 Úvod

Model tuhého tělesa neuvažuje složitou mikrostrukturu reálných těles a předpokládá, že jeho hmotnost je rozložena spojitě s *hustotou*, kterou definujeme limitní hodnotou poměru hmotnosti Δm, obsažené v objemu ΔV, a tohoto objemu pro $\Delta V \to 0$, tj.

$$\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}\,.$$

Přechodem na nekonečně malé elementy a jejich následnou integrací se u veličin makroskopických těles dopouštíme jen nepatrné zcela zanedbatelné chyby, neboť průměr molekuly má velikost řádu 10^{-10} m. Hustota je obecně spojitou funkcí polohy bodu tělesa $\varrho = \varrho(x, y, z)$. Při řešení našich úloh z dynamiky budeme předpokládat $\varrho = konst.$

Při odvozování pohybových rovnic tuhého tělesa budeme vycházet z Newtonových pohybových zákonů pro hmotný bod. Z metodického hlediska budeme tuhé těleso považovat za soustavu $n \to +\infty$ hmotných bodů, které jsou podrobeny tuhým vazbám. Konečné součty pak přecházejí v nekonečné řady, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \to \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \quad - \text{ pro jednoduchost označíme } \sum_{i}\,.$$

Pro zachování lepší souvislosti a názornosti výkladu tedy ponecháme označení ve tvaru sumačních znamének, avšak bez uvedení intervalu, v němž leží hodnoty indexu n. Budeme vždy předpokládat, že sumace, resp. integrace, probíhá přes celé těleso. Rovněž pro hmotnosti hmotných bodů, resp. elementů tělesa, ponecháme označení m_i, které mají hmotnost mnohem menší než je hmotnost celého tělesa. V matematickém vyjádření představují elementy hmotnosti $\mathrm{d}m$. Při praktických výpočtech nahradíme sumace nekonečných řad přímo určitými (Riemannovými) integrály.

V úvahách o dynamice tuhého tělesa se nejprve zaměříme na translační pohyb — příslušná obecná pohybová rovnice se nazývá *první impulsová věta* — a poté na rotační pohyb — příslušná obecná pohybová rovnice se nazývá *druhá impulsová věta*. Poté přejdeme na dynamiku rovinného pohybu, o kterém víme, že jej lze rozložit na translační pohyb (aplikace I. impulsové věty) a na rotační pohyb kolem okamžité osy (aplikace II. impulsové věty). Dynamický popis tělesa v této kapitole budeme provádět zásadně v inerciální vztažné soustavě.

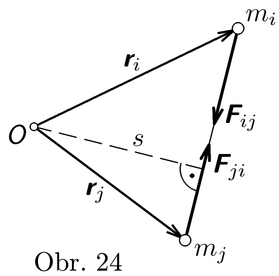
2.2 První impulsová věta

a) Vnější a vnitřní síly

Na soustavu hmotných bodů a tedy i na tuhé těleso obecně působí dvě soustavy sil — síly vnější a síly vnitřní.

Vnější síly souvisejí s působením jiných bodů nebo těles, které k dané soustavě nepočítáme. Výslednici vnějších sil, působící na i-tý bod, označíme $\boldsymbol{F}_i$. Patří sem např. tíhová síla, kterou působí Země na uvažované těleso na jejím povrchu. Vnějšími silami jsou i síly vzájemného působení při bezprostředním dotyku tělesa s jinými tělesy, dále síly elektrické a síly magnetické.

Vnitřní síly souvisejí se vzájemným působením bodů uvažované soustavy.



Obr. 24

U tuhého tělesa jsou to např. vazbové síly, které uskutečňují soudržnost tělesa. Protože vnitřní síly jsou silami vzájemného působení, platí pro ně Newtonův princip akce a reakce. Označíme-li $\boldsymbol{F}_{ij}$ sílu, kterou působí j-tý bod na i-tý bod, a $\boldsymbol{F}_{ji}$ sílu, kterou naopak působí i-tý bod na j-tý bod (obr. 24), bude

$$\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = 0\,.$$

Z toho plyne, že *součet vnitřních sil* pro celou soustavu hmotných bodů (resp. pro těleso) je *nulový*.

Pro momenty uvedených sil vzhledem k libovolnému momentovému bodu O podobně platí

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} = 0\,,$$

neboť obě síly mají stejné rameno s a jsou vzájemně opačného směru (obr. 24). Tedy i *součet momentů vnitřních sil* k libovolnému bodu je *nulový*. Při vyšetřování dynamických účinků sil na tuhé těleso jako celek tedy *stačí zkoumat jen účinek vnějších sil*. K tomu je třeba poznamenat, že i vnitřní síly mohou mít vliv na pohyb soustavy hmotných bodů, mohou způsobovat přeskupování bodů uvnitř dané soustavy. U tuhého tělesa k tomu však dojít nemůže, protože u něj je vzdálenost mezi body podle definice stále konstantní (tvar tělesa je konstantní).

b) Hybnost soustavy, hmotný střed

Jednou z důležitých dynamických charakteristik soustavy hmotných bodů je *hybnost soustavy*, definovaná jako vektorový součet hybností jednotlivých bodů soustavy:

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i\right)\,. \tag{9}$$

Zde jsme mohli provést naznačenou úpravu derivace podle času, neboť podle klasické mechaniky můžeme brát $m_i = konst.$

Nyní výraz (9) upravíme užitím pojmu *hmotný střed*. Je to bod, pomocí něhož zjednodušíme výpočet hybnosti soustavy tím, že do něj umístíme celkovou hmotnost m soustavy, tj.

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \, .$$

Poloha $\boldsymbol{r}_S$ hmotného středu se definuje ze vztahu

$$m\boldsymbol{r}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \, , \tag{10}$$

neboli

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r}_i \, . \tag{11}$$

Pro soustavu hmotných bodů nebo pro tuhé těleso, které se nacházejí v homogenním tíhovém poli, *je hmotný střed zřejmě totožný s těžištěm.*

Hmotný střed nemusí být reálným bodem soustavy hmotných bodů nebo tuhého tělesa (je tomu např. u anuloidu nebo u dutého válce). Je to fiktivní bod o hmotnosti rovné hmotnosti celé soustavy hmotných bodů nebo tuhého tělesa, který umístíme do takové polohy (11) v prostoru, že pomocí něj můžeme dynamicky popsat pohyb soustavy bodů nebo tuhého tělesa způsobený výslednicí vnějších sil (nikoli však momentem výslednice vnější sil). Budeme-li v dalším textu hovořit o pohybu hmotného středu, budeme tím mít na mysli výše popsanou dynamickou ekvivalenci tuhého tělesa.

Zavedeme-li vztah (10) do (9), můžeme pro hybnost soustavy psát

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{r}_S) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_S}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v}_S \, , \tag{12}$$

kde $\boldsymbol{v}_S$ je rychlost hmotného středu. Neboli *hybnost soustavy hmotných bodů je rovna hybnosti jediného hmotného bodu, který by se pohyboval jako hmotný střed tělesa a ve kterém by byla soustředěna celá hmotnost soustavy.*

Při výpočtu hybnosti tuhého tělesa vykonávajícího ve zvláštním případě posuvný pohyb není ani nutné pracovat s hmotným středem, neboť podle (1) jsou rychlosti všech bodů stejné a tudíž je možné ve vztahu (9) $\boldsymbol{v}_i$ vytknout před sumu. Pak je hybnost tělesa rovna součinu hmotnosti a rychlosti libovolného bodu tělesa při jeho translačním pohybu. Z hlediska univerzálnosti pojmu hmotný střed pro obecné případy soustavy hmotných bodů, např. u rovinného pohybu tuhého tělesa, se s tímto pojmem pracuje i u translačního pohybu tuhého tělesa.

c) Formulace první impulsové věty

Uvažujme tuhé těleso, které se pohybuje v inerciální vztažné soustavě. Bude-li na i-tý bod tohoto tělesa působit vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ a výslednice vnitřních sil $\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}$ od ostatních bodů tělesa, bude pro časovou změnu jeho hybnosti $\boldsymbol{p}_i$ platit

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\,. \tag{13}$$

Sumací přes celé těleso pro levou stranu rovnice (13) dostaneme

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \boldsymbol{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\boldsymbol{v}_S\right)\,, \tag{14}$$

tedy časovou změnu hybnosti tělesa, vyjádřenou i vztahem (12). Podobně sumací pro pravou stranu rovnice (13) dostaneme

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\right) = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}\,,$$

tedy výslednou vnější sílu působící na těleso, neboť výslednice všech vnitřních sil je nulová. Změnu hybnosti tělesa tudíž způsobuje výslednice působících sil podle rovnice

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\,.} \tag{15}$$

Je formálně shodná s pohybovou rovnicí jediného hmotného bodu a je *pohybovou rovnicí translačního pohybu tuhého tělesa.* Rovnice (15) se označuje jako **první impulsová věta pro tuhé těleso.**

> **Časová změna hybnosti tělesa je rovna výsledné síle působící na těleso.**

Protože podle klasické mechaniky neuvažujeme závislost hmotnosti tělesa na jeho rychlosti ve vztažné soustavě a protože hmotnost tuhého tělesa se i jinak s časem nemění (jinak je tomu např. u raket), můžeme rovnici (15) přepsat s využitím vztahu (12) do tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_S}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{F}\,, \tag{16}$$

kde $\boldsymbol{a}_S$ je zrychlení hmotného středu.

Je-li výslednice vnějších sil $\boldsymbol{F}$ nulová, je $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$ a tedy $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{konst}$. Nebo-li hybnost tělesa je konstantní. Dospíváme tak k **zákonu zachování hybnosti**. Dílčí platnost tohoto zákona dostaneme i pro průměty. Je-li průmět výsledné síly do určité osy inerciální soustavy nulový, je ve směru této osy hybnost tělesa konstantní. Např. pro $\boldsymbol{F}_x = 0$ je $m\boldsymbol{v}_{Sx} = \boldsymbol{konst}$.

2.3 Druhá impulsová věta

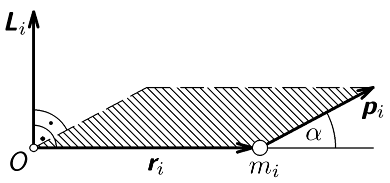
a) Obecná formulace druhé impulsové věty

Analogicky momentu síly vzhledem k danému pevnému bodu O

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \quad \text{(viz např. [11])}$$

definujeme *moment hybnosti* např. i-tého bodu soustavy bodů vzhledem k danému pevnému bodu O jako vektorový součin polohového vektoru $\boldsymbol{r}_i$ a hybnosti $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$, tj.

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \, . \tag{17}$$



Obr. 25

Má velikost $L_i = r_i p_i \sin\alpha$, jeho směr je zřejmý z obr. 25.

Budeme nyní hledat souvislost mezi časovou změnou momentu hybnosti a výsledným momentem síly, který působí na tuhé těleso při rotaci kolem okamžité osy rotace v inerciální vztažné soustavě. Poté budeme výpočet specializovat na rotaci kolem nehybné osy. Pro moment hybnosti i-tého bodu platí vztah (17). Jeho derivací podle času (jako součinu dvou funkcí) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} \, .$$

První součin na pravé straně je nulový neboť vektor hybnosti má stejný směr jako vektor rychlosti. Ve druhém součinu dosadíme sílu podle vztahu (13). Tedy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \right) \, .$$

Provedeme-li sumaci těchto příspěvků vzhledem k okamžité ose pro celé těleso, dostaneme pohybovou rovnici, jejíž levá strana bude mít tvar

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \boldsymbol{L}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Jde tedy o časovou změnu momentu hybnosti tuhého tělesa. Pravá strana rovnice bude mít po sumaci tvar

$$\sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}\right)\right] = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}\,,$$

půjde tedy o výsledný moment vnějších sil působící na tuhé těleso, neboť výsledný moment všech vnitřních sil je nulový. Tento moment má směr okamžité osy rotace. Obecná pohybová rovnice rotačního pohybu tedy zní

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}\,.} \tag{18}$$

Výsledek (18) se označuje jako **druhá impulsová věta.**

Časová změna momentu hybnosti tělesa vzhledem k libovolnému pevnému bodu je rovna výslednému momentu vnějších sil vzhledem k témuž bodu.

Aplikace druhé impulsové věty (18) na těleso konající obecný prostorový pohyb je náročná, neboť vede k soustavě diferenciálních rovnic s tenzorovými veličinami. Proto se nyní soustředíme jen na řešení jednodušších úloh a to na rotaci tuhého tělesa kolem nehybné osy a poté na obecný rovinný pohyb tuhého tělesa.

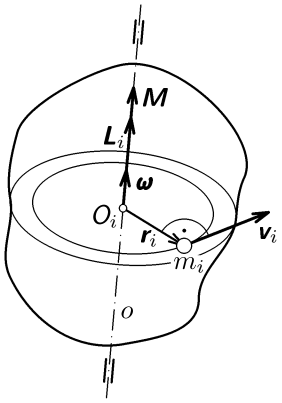
b) Moment hybnosti tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose

Výrazem (17) je definován moment hybnosti i-tého bodu těles vzhledem *k bodu* (O). Bude-li těleso rotovat kolem nehybné osy, bude nutné počítat jeho moment hybnosti vzhledem k ose (analogicky momentu síly vzhledem k ose — viz čl. 1.3 v [11]). Abychom zjednodušili označení veličin a výpočet momentu hybnosti tělesa k nehybné ose, uvědomíme si, že body tělesa opisují při tomto pohybu kruhové trajektorie se středem na nehybné ose.

Pro výpočet příspěvku i-tého bodu tělesa k jeho celkovému momentu hybnosti zvolíme počátek O_i ve středu této kružnice (obr. 26). Pak bude velikost jeho polohového vektoru $\boldsymbol{r}_i$ totožná s poloměrem příslušné kruhové trajektorie. Protože vedle toho rychlost $\boldsymbol{v}_i$ i-tého bodu je kolmá k průvodiči $\boldsymbol{r}_i$, můžeme pro velikost momentu hybnosti i-tého bodu psát

$$L_i = r_i p_i \sin 90^\circ = r_i m_i v_i = \omega m_i r_i^2\,,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace. Protože takto vypočtené příspěvky od jednotlivých bodů mají stejný směr — směr nehybné osy rotace — bude mít moment hybnosti celého tělesa velikost



Obr. 26

$$L = \sum_i L_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \omega J\,, \tag{19}$$

kde

$$\boxed{J = \textstyle\sum_i m_i r_i^2} \tag{20}$$

je **moment setrvačnosti** tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose o. O této veličině pojednáme samostatně v článku 2.4. Jelikož úhlová rychlost $\boldsymbol{\omega}$ je vektor ležící v ose rotace, je moment hybnosti tuhého tělesa rotujícího kolem nehybné osy vektor

$$\boxed{\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}\,,} \tag{21}$$

ležící rovněž v nehybné ose rotace.

c) Formulace druhé impulsové věty pro rotaci kolem nehybné osy

Vyjádříme-li moment hybnosti tuhého tělesa rotujícího kolem nehybné osy pomocí vztahu (21) a uvážíme-li, že pro dané rozložení hmotnosti tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose rotace je $J = konst.$, můžeme výsledek (18) přepsat do jednoduchého tvaru

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\boldsymbol{\omega}) = J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}\,,} \tag{22}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor úhlového zrychlení, který rovněž leží v ose rotace.

Je-li výsledný moment sil $\boldsymbol{M}$ nulový, je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \text{ a tedy } \boldsymbol{L} = \boldsymbol{konst}. \tag{23}$$

Tím jsme dospěli k *zákonu zachování momentu hybnosti*. Protože $J = konst.$, dostáváme vzhledem k (21) současně i výsledek

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{konst}.\,. \tag{24}$$

Příklad 5

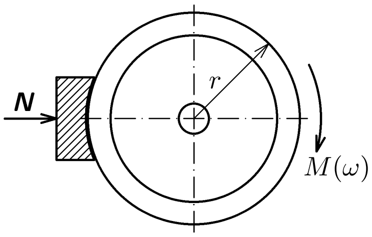
Na hřídel s nasazeným setrvačníkem o poloměru r a o celkovém momentu setrvačnosti J vzhledem k ose hřídele působí hnací moment síly o velikosti

$$M = M_0 - k\omega\,,$$

kde M_0 a k jsou konstanty a ω je okamžitá úhlová rychlost. Na obvod strvačníku (obr. 27) současně působí čelist brzdy, přičemž přítlačná síla je $\boldsymbol{N}$ a součinitel smykového tření f. Hřídel se rozbíhá z klidového stavu. Určete

a) Maximální úhlovou rychlost ω_m hřídele.

b) Závislost $\omega = \omega(t)$ a čas t_m, kdy hřídel dosáhne úhlové rychlosti ω_m.



Obr. 27

Řešení

a) Protože hnací moment síly je závislý na úhlové rychlosti a brzdný moment síly Nfr je konstantní, dosáhne hřídel maximální úhlové rychlosti ω_m při vyrovnání velikosti těchto momentů sil, tedy když

$$M_0 - k\omega_m = Nfr\,,$$

odtud

$$\omega_m = \frac{M_0 - Nfr}{k}\,.$$

b) Pohybová rovnice podle (22) ve skalárním tvaru bude

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_0 - k\omega - Nfr\,.$$

Aby se hřídel vůbec roztočila, musí být

$$M_0 - Nfr = M_0' > 0\,.$$

Rovnici upravíme do tvaru vhodného k integraci tím, že oddělíme (separujeme) proměnné ω a t:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{M_0' - k\omega} = \mathrm{d}t\,.$$

Integrujeme v mezích od $\omega = 0$ do ω a od $t = 0$ do t:

$$-\frac{J}{k}\int_0^{\omega}\frac{-\,k\,\mathrm{d}\omega}{M_0' - k\omega} = \int_0^t \mathrm{d}t\,.$$

Integrací

$$-\frac{J}{k}\Big[\ln(M_0' - k\omega)\Big]_0^{\omega} = \frac{J}{k}\ln\frac{M_0'}{M_0' - k\omega} = t\,.$$

Odtud

$$\omega = \frac{M_0 - Nfr}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{J}t}\right)\,.$$

Z časového průběhu ω vidíme, že hřídel dosáhne maxima ω_m až v limitním případě $t_m \to \infty$.

2.4 Moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose

a) Výpočet momentu setvačnosti

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k nehybné ose definujeme výrazem (20):

$$J = \sum_i m_i r_i^2\,.$$

Je to veličina, která je mírou setrvačných účinků tělesa při rotačním pohybu. Tato velčina zřejmě závisí nejen na hmotnostech elementů tělesa, ale především na jejich rozložení vzhledem k rotační ose. Přitom setrvačnost hmotných elementů se uplatňuje s druhou mocninou jejich vzdáleností od osy rotace. Jednotkou momentu setrvačnosti v soustavě SI je $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

Při výpočtu momentu setrvačnosti těles předpokládáme spojitě rozloženou hmotnost. Pak sumace nekonečné řady (20) přejde na určitý integrál

$$\boxed{J = \int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m\,,} \tag{25}$$

kde intergraci provádíme přes celou hmotnost m tělesa. Je-li těleso *homogenní*, tak $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$, $\varrho = konst.$ a $\mathrm{d}V$ je element objemu. Pak se integrál (25) zjednoduší do tvaru

$$\boxed{J = \varrho\int_{(V)} r^2 \mathrm{d}V} \tag{26}$$

a integraci provádíme přes celý objem V tělesa.

Prochází-li osa hmotným středem, nazývá se moment setrvačnosti centrální moment setrvačnosti. Je-li u homogenního tělesa tato osa osou symetrie jde o *hlavní centrální moment setrvačnosti*. Element $\mathrm{d}V$ volíme tak, aby integrace byla co nejjednodušší, jak to bude ukázáno na následujících příkladech. Máme-li počítat moment setrvačnosti k určité ose a známe-li moment setrvačnosti k ose rovnoběžné s touto osou, která prochází hmotným středem, použijeme k výpočtu s výhodou *Steinerovu větu* (viz následující odstavec ad b).

Moment setrvačnosti je zřejmě aditivní veličina. Toho lze výhodně využít při výpočtu momentu setrvačnosti těles složených z n částí, jejichž momenty J_i známe. Pak

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i \,. \tag{27}$$

Tento postup se využívá např. při řešení úloh č. 18 a 20. Má-li homogenní těleso dutinu nebo otvor, odečteme od celku moment setrvačnosti tělesa, které by vyplňovalo dutinu nebo otvor. Tohoto postupu se využije např. při řešení úlohy č. 22.

Aditivnosti momentu setrvačnosti využijeme i při výpočtu momentu setrvačnosti homogenního tělesa, které si představíme složené z nekonečného počtu částí, jejichž elementární momenty $\mathrm{d}J$ známe. Pak řada (27) přejde v integrál

$$J = \int_{(J)} \mathrm{d}J \,. \tag{28}$$

Tohoto postupu je využito např. v příkladě 7 a v úloze 14 d), e), kdy si tělesa představíme složena z elementárních desek proměnného poloměru.

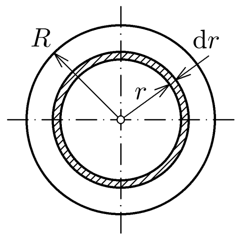
Příklad 6

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kruhového válce k jeho rotační ose. Válec má poloměr R a hmotnost m.

Řešení

K řešení užijeme vzorce (26). Z válce vyjmeme element souměrný k ose. Jeho průřez má tvar mezikruží (obr. 28) o poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}r$. Označíme-li výšku válce l, bude

$$\mathrm{d}V = 2\pi l r \mathrm{d}r \,.$$



Obr. 28

Integrujeme v mezích od $r = 0$ do $r = R$. Pak

$$J = \varrho \int_0^R r^2 \mathrm{d}V = 2\pi\varrho l \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi\varrho l R^4 = \frac{1}{2} m R^2 \,, \tag{29}$$

kde $m = \pi R^2 l \varrho$ je hmotnost válce.

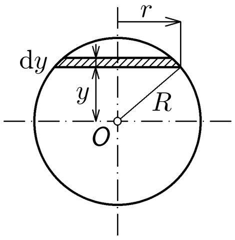
Moment setrvačnosti válce pro určitou hmotnost zřejmě nezávisí na jeho výšce. Stejný vzorec tedy platí i pro tenkou kruhovou desku stejného poloměru a stejné hmotnosti.

Příklad 7

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose, která prochází jejím středem.

Řešení

První způsob



Obr. 29

K řešení použijeme nejprve vzorec (28). Kouli si představíme složenou z elementárních desek (vrstev) o poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}y$ (obr. 29). Deska má v souladu s (29) elementární moment setrvačnosti

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}m \,,$$

kde

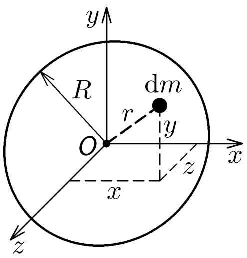
$$\mathrm{d}m = \pi r^2 \varrho \mathrm{d}y \,, \; r^2 = R^2 - y^2 \,.$$

Pak po integraci v mezích od $y = -R$, $y = R$ dostaneme

$$J = \frac{\pi \varrho}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^2 \mathrm{d}y = \frac{8}{15} \pi \varrho R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \,, \tag{30}$$

kde $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho$ je hmotnost koule.

Druhý způsob



Obr. 30

Pro momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z, které procházejí bodem O, platí

$$J_x = \int_{(m)} (y^2 + z^2) \mathrm{d}m \,,$$

$$J_y = \int_{(m)} (x^2 + z^2) \mathrm{d}m \,,$$

$$J_z = \int_{(m)} (x^2 + y^2) \mathrm{d}m \,.$$

U koule vzhledem k její symetrii podle středu O, platí

$$J_x = J_y = J_z = J \,.$$

Takže sečtením výše uvedených vztahů dostaneme

$$3J = 2\int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}m = 2\int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m\,,$$

kde r je vzdálenost elementu od bodu O (nikoliv od osy jako ve vztahu (25)). Proto uvedený integrál má význam *polárního momentu strvačnosti*. Pro výpočet tohoto integrálu můžeme zvolit hmotný element, jehož body mají stejnou vzdálenost od bodu O, tedy element tvaru kulové skořepiny o poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}r$. Její hmotnost je

$$\mathrm{d}m = 4\pi\varrho r^2 \mathrm{d}r\,.$$

Takže při integraci od $r = 0$ do $r = R$ dostaneme

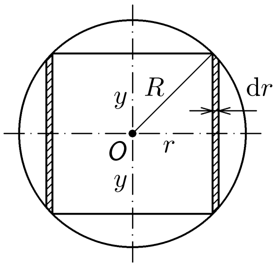
$$3J = 8\pi\varrho \int_0^R r^4 \mathrm{d}r = \frac{8}{5}\pi\varrho R^5 = \frac{6}{5}mR^2\,.$$

Odtud již dostaneme výsledek (30).

Třetí způsob

Pro výpočet momentu setrvačnosti koule máme ještě jednu možnost volby elementu — ve tvaru tenké válcové skořepiny proměnného průměru $2r$, tloušťky $\mathrm{d}r$ a výšky $2y$ (obr. 31). Užijeme vzorce (26), kde

$$\mathrm{d}V = 2\pi r \cdot 2y\mathrm{d}r\,.$$



Obr. 31

Pak při integraci od $r = 0$ do $r = R$ dostaneme

$$J = 4\pi\varrho \int_0^R yr^3 \mathrm{d}r\,.$$

Souřadnice r, y, elementu jsou vázány Pythagorovou větou, kterou budeme ještě diferencovat:

$$r^2 = R^2 - y^2\,, \quad 2r\mathrm{d}r = -2y\mathrm{d}y\,.$$

Jelikož přejdeme na proměnnou y, musíme transformovat i meze — užitím vztahu $y = \sqrt{R^2 - r^2}$. Tak pro spodní mez dostaneme $y = R$ a pro horní mez $y = 0$. Pak

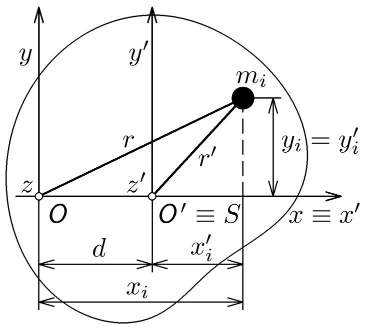
$$J = -4\pi\varrho \int_R^0 y^2(R^2 - y^2)\mathrm{d}y = 4\pi\varrho \int_0^R (R^2y^2 - y^4)\mathrm{d}y =$$

$$= 4\pi\varrho \left[R^2\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]_0^R = \frac{8}{15}\pi\varrho R^5 = \frac{2}{5}mR^2\,.$$

b) Steinerova věta

Nyní odvodíme větu, která umožní vypočíst moment setrvačnosti J tělesa vzhledem k libovolné ose, známe-li moment setrvačnosti J_S vzhledem k rovnoběžné ose, která prochází hmotným středem.

Pro výpočet položíme počátek O' čárkované vztažné soustavy do hmotného středu S (obr. 32). Nečárkovaná soustava má osy rovnoběžné se soustavou čárkovanou, přičemž osy x, x' splývají. Půjde nám o to najít vztah mezi momentem J k ose z a momentem J_S k ose z', která prochází hmotným středem S. Osy z, z' mají vzájemnou vzdálenost d. Podle definičního vztahu (20) platí pro tyto momenty setrvačnosti vztahy



Obr. 32

$$J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\,,$$

$$J_S = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2)\,.$$

Z obr. 32 je zřejmé, že

$$x_i^2 = (x'_i + d)^2\,, \quad y_i = y'_i\,.$$

Po dosazení do výrazu pro J dostaneme

$$J = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2d\sum_i m_i x'_i + d^2\sum_i m_i = J_S + md^2\,,$$

protože začátek čárkované soustavy leží v hmotné středu tělesa (pro jeho polohu v této soustavě platí $x'_S = 0$) a tudíž podle (11) je

$$\sum_i m_i x'_i = 0\,.$$

Dostali jsme tak důležitý vztah

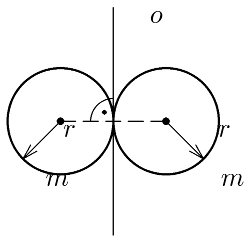
$$\boxed{J = J_S + md^2\,,} \tag{31}$$

který se nazývá **Steinerova věta**:

> **Moment setrvačnosti J tuhého tělesa vzhledem k libovolné ose je roven součtu momentu setrvačnosti J_S vzhledem k ose procházející hmotným středem S rovnoběžně s uvažovanou osou a součinu hmotnosti m tělesa se druhou mocninou vzdálenosti d obou os.**

Příklad 8

Vypočtěte moment setrvačnosti soustavy dvou dotýkajících se pevně spojených stejných homogenních koulí podle obr. 33 k ose o. Každá z koulí má hmotnost m a poloměr r.



Obr. 33

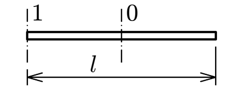
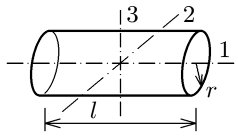
Řešení

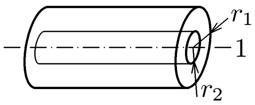
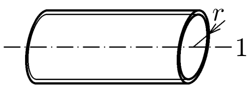
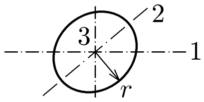
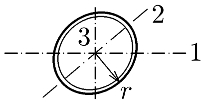
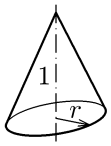
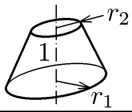
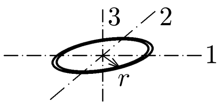
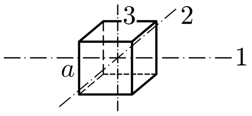
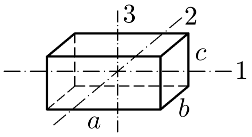
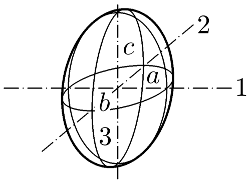
Užitím Steinerovy věty a výsledku (30) dostaneme

$$J = 2(J_S + mr^2) = 2(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2) = \frac{14}{5}mr^2 \,.$$

c) Momenty setrvačnosti homogenních těles jednoduchého geometrického tvaru o hmotnosti m

V následující tabulce uvedeme momenty některých homogenních těles jednoduchého tvaru. Jedná se vesměs o hlavní centrální momenty setrvačnosti (s výjimkou momentu J_1 v prvním případě). Odvození většiny uvedených vzorců je předmětem úloh ve třetí části této publikace.

Tenká tyč		$J_0 = \frac{1}{12}ml^2,\ J_1 = \frac{1}{3}ml^2$
Kolmý válec Kruhová deska		$J_1 = \frac{1}{2}mr^2$ $J_2 = J_3 = \frac{m}{4}\left(r^2 + \frac{l^2}{3}\right)$

Dutý kruhový kolmý válec		$J_1 = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
Tenkostěnná válcová trubka		$J_1 = mr^2$
Koule		$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5}mr^2$
Tenkostěnná kulová skořepina		$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{3}mr^2$
Kolmý kužel		$J_1 = \frac{3}{10}mr^2$
Komolý kolmý kužel		$J_1 = \frac{3}{10}m\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}$
Tenký kruhový prstenec		$J_1 = J_2 = \frac{1}{2}mr^2$ $J_3 = mr^2$
Krychle		$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{m}{6}a^2$
Hranol		$J_1 = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $J_2 = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Elipsoid		$J_1 = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$ $J_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ $J_3 = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$

2.5 Dynamika obecného rovinného pohybu tuhého tělesa

a) Pohybové rovnice

Při obecném rovinném pohybu tělesa leží trajektorie, rychlosti a zrychlení jednotlivých bodů tělesa v navzájem rovnoběžných rovinách rovnoběžných se zvolenou základní rovinou. Za tuto rovinu zvolíme rovinu $(x,\ y)$ kartézké soustavy. Pak poloha, rychlost a zrychlení i-tého bodu a vnější síla působící na i-tý bod tělesa budou mít souřadnice

$$\boldsymbol{r}_i = \{x_i\,,\ y_i\,,\ 0\}\,,\ \boldsymbol{v}_i = \{v_{ix}\,,\ v_{iy}\,,\ 0\}\,,$$

$$\boldsymbol{a}_i = \{a_{ix}\,, a_{iy}\,,\ 0\}\,,\ \boldsymbol{F}_i = \{F_{ix}\,, \mathrm{F}_{iy}\,,\ 0\}\,.$$

Osa okamžité rotace bude mít směr osy z, a proto úhlová rychlost, úhlové zrychlení a moment vnější síly působící na i-tý bod budou mít souřadnice

$$\boldsymbol{\omega} = \{0\,,\ 0\,,\ \omega\}\,,\ \boldsymbol{\varepsilon} = \{0\,,\ 0\,,\ \varepsilon\}\,,\ \boldsymbol{M}_i = \{0\,,\ 0\,,\ M_i\}\,.$$

Pro pohyb tělesa budou platit impulsové věty, které mají obecný tvar (14) a (18):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{F}\,, \qquad (32)\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} &= \boldsymbol{M}\,, \qquad (33)\end{aligned}}$$

kde

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_S\,,$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad (34)$$

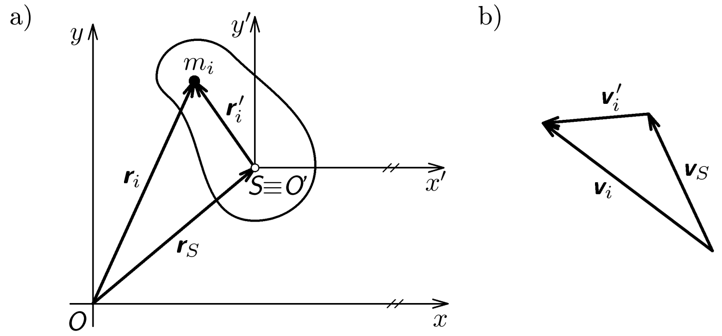
je hybnost a moment hybnosti tělesa při rovinném pohybu. V těchto vyjádřeních je osa, vzhledem k níž počítáme momentové veličiny ($\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$), volena obecně jako osa z vztažné soustavy $x\,,\ y\,,\ z\,.$ Výhodné je tento výpočet zjednodušit volbou dvou zvláštních poloh momentové osy, která bude procházet

1. hmotným středem,
2. pólem pohybu.

1. *Momentová osa prochází hmotným středem*

S hmotným bodem S spojíme počátek vztažné soustavy O' (obr. 34). Pak pro polohový vektor i-tého bodu měřený v původní soustavě a pro jeho rychlost platí

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_S + \boldsymbol{r}_i'\,,\ \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i'\,,$$



Obr. 34

kde $\boldsymbol{r}_S$ je polohový vektor hmotného středu a $\boldsymbol{v}_S$ jeho rychlost. Nejprve vypočtěme *moment hybnosti tělesa* vzhledem k ose z dosazením těchto vztahů do výrazu (34):

$$\boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{r}_S + \boldsymbol{r}_i') \times m_i(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i') = \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{v}_S \sum_i m_i + \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{v}_S +$$

$$+ \boldsymbol{r}_S \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{r}_S \times m\boldsymbol{v}_S + \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' , \qquad (35)$$

neboť

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i' = m\boldsymbol{r}_S' = 0 ,$$

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = m\boldsymbol{v}_S' = 0 ,$$

protože $\boldsymbol{r}_S' = 0$, $\boldsymbol{v}_S' = 0$ je poloha a rychlost hmotného středu vzhledem ke vztažné soustavě x', y' pevně spojené s hmotným středem (viz obr. 34a). Výraz (35) může být formálně přepsán do tvaru

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_S + \boldsymbol{L}' , \qquad (36)$$

kde

$$\boldsymbol{L}_S = \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{p}_S \qquad (37)$$

je moment hybnosti hmotného středu tělesa vzhledem k ose z, nazývaný též *orbitální moment hybnosti* a

$$\boldsymbol{L}' = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_i' \qquad (38)$$

je moment hybnosti tělesa vzhledem k ose z' procházející hmotným středem, nazývaný též *spinový moment hybnosti.* Označení „orbitální“ a „spinový“ mají původ v atomistice, kde se zavádí např. orbitální moment hybnosti elektronu a spinový moment hybnosti elektronu, zvaný spin.

Časovou změnu momentu hybnosti dostaneme součtem derivovaných vztahů (37) a (38):

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\boldsymbol{v}_S \times \boldsymbol{p}_S}_{0} + \boldsymbol{r}_S \times m\boldsymbol{a}_S + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{v}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i}_{0} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i \,. \qquad (39)$$

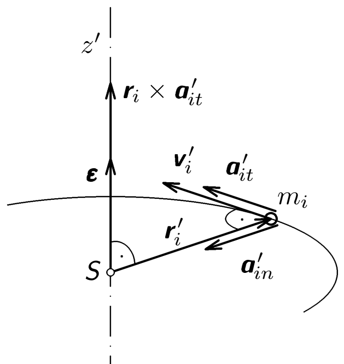
První a třetí člen je zřejmě nulový (jde o vektorový součin rovnoběžných vektorů). Upravíme nyní čtvrtý člen, když si uvědomíme, že vzhledem k (5) a (6) platí:

$$\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}'_{it} + \boldsymbol{a}'_{in} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'_i \,, \qquad \boldsymbol{a}'_{it} \perp \boldsymbol{r}'_i \,, \quad \boldsymbol{a}'_{in} \parallel \boldsymbol{r}'_i \,.$$

Vzájemnou polohu vektorů vidíme na obr. 35. Z uvedených vztahů plyne: [1])

$$\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_{it} + \underbrace{\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_{in}}_{0} = m_i \boldsymbol{r}'_i \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}'_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot m_i r_i^2 \,,$$

$$\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_i m_i r_i'^2 = \boldsymbol{\varepsilon} J_S \,,$$



Obr. 35

kde J_S je moment setrvačnosti vzhledem k ose z', která prochází hmotným středem S.

Tak můžeme vztah (39) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_S \times m\boldsymbol{a}_S + J_S \boldsymbol{\varepsilon} \,. \qquad (40)$$

Výsledný moment sil, který je roven výslednému momentu vnějších sil, můžeme analogicky rozložit na dva členy

$$\boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_S + \boldsymbol{r}'_i) \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{M}_S \,, \qquad (41)$$

[1]) K rigoróznější (avšak zdlouhavější) úpravě bychom použili vzorec pro rozpis dvojného vektorového součinu: $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})$.

kde $\boldsymbol{M}_S$ je výsledný moment vnějších sil vzhledem k ose z' procházející hmotným středem. Porovnáme-li levé a pravé strany vztahu (40), (41) dostaneme II. impulsovou větu, ze které vyplývají pohybové rovnice tuhého tělesa konajícího obecný rovinný pohyb:

$$m\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{F}\,,\;\; J_S\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_S\,.$$

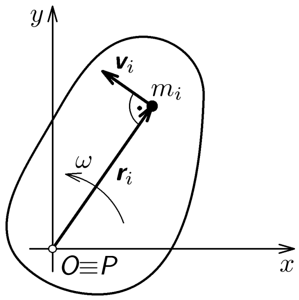
Při vyjádření ve složkách dostaneme

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x_S}{\mathrm{d}\,t^2} &= F_x\,, && (42)\\ m\frac{\mathrm{d}^2 y_S}{\mathrm{d}\,t^2} &= F_y\,, && (43)\\ J_S\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}\,t^2} &= M_S\,, && (44)\end{aligned}}$$

kde x_S , y_S jsou souřadnice trajektorie hmotného středu, F_x, F_y souřadnice výslednice vnějších sil, J_S moment setrvačnosti tělesa k ose procházející hmotným středem a M_S velikost výsledného momentu vnějších sil k téže ose.

2. *Momentová osa prochází pólem pohybu*

S tělesem vykonávajícím obecný rovinný pohyb spojíme vztažnou soustavu x , y , z tak, že její počátek O položíme do pólu pohybu (obr. 36). Momentovou osou tedy bude osa z.



Obr. 36

Z vlastností pólu vyplývá, že rychlosti všech bodů jsou kolmé k průvodičům, neboli

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i\,.$$

Pak moment hybnosti (34) tělesa k ose z je

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

a pro jeho derivaci podle času platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{v}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i}_{0} + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i)}_{0}\,.$$

Vektor v kulaté závorce ve třetím členu je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{r}_i$, rovněž vektory ve vektorovém součinu prvního členu jsou vzájemně rovnoběžné, proto jsou oba členy nulové. Nyní upravíme druhý člen. Vektory $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vektorový součin $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i$ jsou vzájemně kolmé. Proto

$$\boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot m_i r_i^2\,, \qquad \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_i m_i r_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon} J_P\,. \qquad {}^{2})$$

Veličina J_P je moment setrvačnosti k ose z procházející pólem pohybu. Moment vnějších sil počítáme rovněž k ose procházející pólem:

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_P\,.$$

Druhá impulsová věta tedy dává pohybovou rovnici ve tvaru

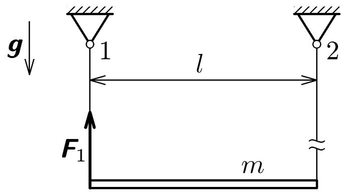
$$J_P \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_P\,,$$

kterou lze psát skalárně

$$\boxed{J_P \varepsilon = J_P \frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}\,t^2} = M_P\,.} \tag{45}$$

Při řešení úloh, podle dispozice zadání, lze výhodně užít jeden nebo druhý způsob sestavení pohybové rovnice. Někdy lze jednoduše užít postupy oba, jak si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 9



Obr. 37

Homogenní tenká tyč o hmotnosti m a délce l je zavěšena na dvou stejných rovnoběžných vláknech 1, 2 podle obr. 37. Pro okamžik, kdy bude vlákno 2 přestřihnuto, určete:

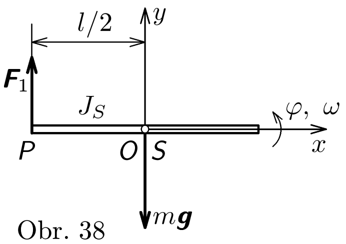
a) Tahovou sílu $\boldsymbol{F}_1$ ve vlákně 1.

b) Zrychlení hmotného středu S a úhlové zrychlení tyče.

Řešení

Výsledná tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působí v těžišti T totožném s hmotným středem S (obr. 38), vzhledem k němuž budeme psát příslušné momenty.

[2]) Úpravu lze přímo provést užitím dříve zmíněného vzorce pro rozpis dvojného vektorového součinu.



Obr. 38

Pohybové rovnice (42) až (44) mají tvar

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_S &= 0\,,\\
m\ddot{y}_S &= F_1 - mg\,, \qquad (46)\\
J_S\ddot{\varphi} &= -F_1\frac{l}{2}\,,
\end{aligned}
$$

kde $J_S = \dfrac{1}{12}ml^2$.

Na konci tyče, v bodě P, je okamžitý pól pohybu a tudíž mezi y-ovou složkou okamžitého zrychlení hmotného středu a úhlovým zrychlením platí

$$\ddot{y}_S = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}\,. \qquad (47)$$

Po dosazení do (46) za J_S a $\ddot{y}_S$ řešením dostaneme

a) $F_1 = \dfrac{mg}{4}$,

b) $\ddot{x}_S = 0\,,\ \ddot{y}_S = -\dfrac{3}{4}g\,,\ \ddot{\varphi} = -\dfrac{3g}{2l}$.

Tahová síla ve vlákně je zřejmě poloviční než ve statickém případě, kdy jsou v činnosti obě vlákna.

Nyní ještě ukážeme druhý způsob, kdy momentová osa bude procházet pólem P, který je na levém konci tyče. Pak podle pohybové rovnice (45) bude platit:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}\,.$$

Odtud

$$\ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l}$$

v souladu s předchozím řešním. Zrychlení hmotného středu vypočteme z vazbové podmínky (47). Tímto postupem ovšem nemůžeme vypočítat sílu $\boldsymbol{F}_1$, protože její moment k P je zřejmě nulový.

b) Valivý pohyb tělesa po nakloněné rovině

Budeme zkoumat valivý pohyb tuhého rotačního tělesa po nakloněné rovině. Aby toto těleso konalo rovinný pohyb, musí mít s nakloněnou rovinou buď bodový dotyk (jde např. o kouli, rotační elipsoid nebo anuloid), nebo dvojbodový dotyk, přičemž přímka spojující tyto body musí být rovnoběžná s rotační osou (např. soustava dvou stejných spojených koulí anebo různá rotační tělesa splňující tuto podmínku) nebo tělesa dotýkající se roviny povrchovou přímkou rovnoběžnou s rotační osou (např. válec, nikoli však kužel).

Aby těleso bylo schopno se odvalovat, musí být nakloněná rovina drsná a mezi tělesem a rovinou musí působit tření. V dosavadních úlohách jsme předpokládali, že těleso se odvaluje dokonale, bez prokluzu. Ne vždy budou splněny podmínky pro tento předpoklad. Naším úkolem je tyto podmínky stanovit.

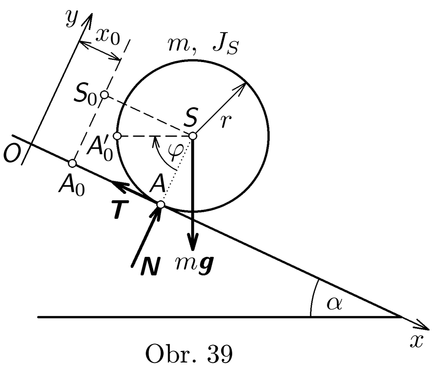
Uvažujme homogenní rotační těleso o hmotnosti m a momentu setrvačnosti J_S vzhledem k rotační ose, které se na poloměru r dotýká nakloněné roviny se sklonem α (obr. 39). Mezi tělesem a rovinou působí smykové tření, jehož koeficient je f. Soustavu souřadnic zvolíme tak, že osa x bude mít směr spádnice nakloněné roviny. Rovina působí na těleso reakcí, která má normálovou ($\boldsymbol{N}$) a tečnou ($\boldsymbol{T}$) složku.

Skalární pohybové rovnice (42) až (44) pro uvažované těleso jsou

$$m\ddot{x}_S = mg\sin\alpha - T\,, \tag{48}$$

$$m\ddot{y}_S = N - mg\cos\alpha\,, \tag{49}$$

$$J_S\ddot{\varphi} = Tr\,. \tag{50}$$



Obr. 39

V těchto třech rovnicích je pět neznámých: N, T, x_S, y_S, φ. Aby soustava byla řešitelná, musíme připojit ještě dvě rovnice (resp. podmínky). Jednou z nich je podmínka vazby, podle níž se hmotný střed pohybuje po přímce rovnoběžné s osou x, neboli

$$y_S = r = konst.\,, \quad \text{resp.} \quad \ddot{y}_S = 0\,. \tag{51}$$

Pak z rovnice (39) pro normálovou složku reakce plyne

$$N = mg\cos\alpha\,. \tag{52}$$

Další doplňkové rovnice závisí na tom, zda těleso při odvalování prokluzuje nebo ne. Mohou nastat tyto případy:

1. *Těleso se dokonale odvaluje,* tedy bez prokluzu. Pak mezi bodem dotyku tělesa a nakloněnou rovinou je nulová relativní rychlost a bod dotyku A je okamžitým pólem pohybu ($A \equiv P$). Odtud dostaneme vazbovou rovnici

$$x_S = r\varphi\,, \quad \text{resp.} \quad \ddot{x}_S = r\ddot{\varphi}\,. \tag{53}$$

2. *Těleso se odvaluje a současně smýká,* tedy mezi tělesem a nakloněnou rovinou je prokluz a tečná složka reakce dosahuje hodnoty síly smykového tření

$$T = F_t = fN = fmg\cos\alpha\,. \tag{54}$$

ad 1) *Řešení pro dokonalé odvalování*

Dosazením z (53) za $\ddot{\varphi}$ do (50) dostaneme

$$T = \frac{J_S}{r^2}\ddot{x}_S\,. \tag{55}$$

Po dosazení (55) do (48) dostaneme pro x-ovou složku zrychlení hmotného středu výraz

$$\ddot{x}_S = \frac{mr^2}{J_S + mr^2}g\sin\alpha\,. \tag{56}$$

Zpětným dosazením (56) do (55) vychází pro tečnou složku reakce výraz

$$T = \frac{J_S}{J_S + mr^2}mg\sin\alpha = \frac{J_S}{J_P}mg\sin\alpha\,, \tag{57}$$

kde $J_P = J_S + mr^2$ je, v souladu se Steinerovou větou, moment setrvačnosti k ose, která prochází okamžitým pólem pohybu P.

Dvojí integrací rovnice (56) při uvážení počátečních podmínek $x_S(0) = x_0$, $v_S(0) = 0$ je

$$x_S = x_0 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{J_S + mr^2}gt^2\sin\alpha\,. \tag{58}$$

Aby při odvalování nedošlo k prokluzu musí být tečné složky reakce (57) menší než síla smykového tření, neboli $T < fN$. Musí tedy být splněna podmínka

$$\frac{J_S}{J_P}mg\sin\alpha < fmg\cos\alpha\,,$$

neboli pro úhel α sklonu nakloněné roviny musí platit

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{J_P}{J_S}f\,. \tag{59}$$

Nyní budeme dosažené výsledky (56) až (59) konkretizovat pro nejdůležitější homogenní tělesa: pro válec a pro kouli.

α) *Válec*

$$J_S = \frac{1}{2}mr^2\,,\ J_P = \frac{3}{2}mr^2\,,\ \frac{J_P}{J_S} = 3\,,$$

$$\ddot{x}_S = \frac{2}{3}g\sin\alpha\,,$$

$$T = \frac{1}{3}mg\sin\alpha\,,$$

$$x_S = x_0 + \frac{1}{3}gt^2\sin\alpha\,,$$

$\operatorname{tg}\alpha < 3f$, tj. $\alpha < 16{,}7°$ pro $f = 0{,}10$, $\alpha < 36{,}9°$ pro $f = 0{,}25$.

β) *Koule*

$$J_S = \frac{2}{5}mr^2\,,\ J_P = \frac{7}{5}mr^2\,,\ \frac{J_P}{J_S} = \frac{7}{2}\,,$$

$$\ddot{x}_S = \frac{5}{7}g\sin\alpha\,,$$

$$T = \frac{2}{7}mg\sin\alpha\,,$$

$$x_S = x_0 + \frac{5}{14}gt^2\sin\alpha\,,$$

$\operatorname{tg}\alpha < \frac{7}{2}f$, tj. $\alpha < 19{,}3°$ pro $f = 0{,}10$, $\alpha < 41{,}2°$ pro $f = 0{,}25$,

ad 2) *Řešení pro odvalování provázené smykáním*

Normálová i tečná složka reakce je pro tento případ známa: viz výrazy (52) a (54). Dosazením za T do rovnic (48) a (50) dostaneme

$$\ddot{x}_S = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,, \tag{60}$$

$$\ddot{\varphi} = f\frac{mgr}{J_S}\cos\alpha\,. \tag{61}$$

Po integraci s ohledem na integrační podmínku $x_S(0) = x_0$ dostáváme souřadnice pohybujícího se tělesa

$$x_S = x_0 + \frac{1}{2}gt^2(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,, \tag{62}$$

$$\varphi = f\frac{mgr}{2J_S}t^2\cos\alpha\,. \tag{63}$$

Aby řešení (60) a (62) mělo smysl, musí být výraz v závorce kladný, tj. musí platit

$$\sin\alpha > f\cos\alpha\,,$$

tj.

$$\operatorname{tg}\alpha > f\,. \tag{64}$$

Protože vyšetřovaný případ ad 2) nastává až při nesplnění podmínky (59), tj. pro

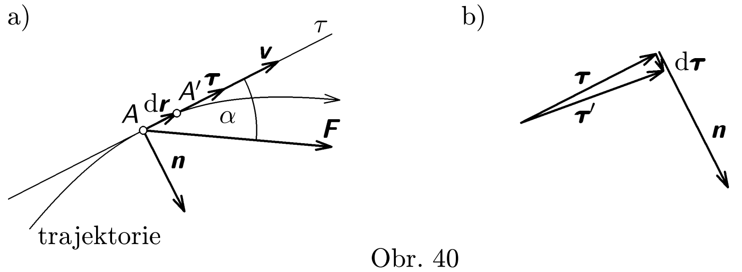
$$\operatorname{tg}\alpha \geq \frac{J_P}{J_S}f$$

a protože vždy je $\dfrac{J_P}{J_S} > 1$, je podmínka (64) vždy splněna.

2.6 Kinetická energie tuhého tělesa

a) Kinetická energie při translačním pohybu

Na těleso nechť působí vnější síly, které mají výslednici $\boldsymbol{F}$ procházející hmotným středem. Všechny body tělesa opisují stejné trajektorie; budeme sledovat trajektorii hmotného středu, do kterého při translačním pohybu soustřeďujeme celkovou hmotnost tělesa. Hmotný střed nechť se v čase t nachází v bodě A (obr. 40a), kde působí výsledná síla $\boldsymbol{F}$.



Obr. 40

Tato síla při přemístění hmotného středu do soumezné polohy A' vykoná elementární práci

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\mathrm{d}r\cos\alpha\,. \tag{65}$$

Jestliže se přemístění do A' vykoná za časový interval $\mathrm{d}t$, je působící *okamžitý výkon*

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,. \tag{66}$$

Vykonaná práce $\mathrm{d}W$ se projeví vzrůstem kinetické energie tělesa v uvažované inerciální vztažné soustavě: $\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_\mathrm{k}$. Dosadíme-li za sílu do (65) z I. impulsové věty (14), dostaneme

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}\,. \tag{67}$$

Pro výpočet skalárního součinu rychlosti $\boldsymbol{v}$ a jejího přírůstku $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ si uvědomíme, že $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}$, kde $\boldsymbol{\tau}$ je jednotkový vektor ve směru tečny τ k trajektorii (obr. 40a). Pak

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau}) = v\boldsymbol{\tau} \cdot (\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}v + v\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}) = v\mathrm{d}v(\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}) + v^2\boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = v\,\mathrm{d}v\,,$$

neboť $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = 1$ a $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} = 0$ ($\boldsymbol{\tau}$ je kolmé k $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ a má směr normály $\boldsymbol{n}$ — viz obr. 40b). Pak

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = mv\,\mathrm{d}v\,.$$

Provedme-li integraci mezi dvěma polohami r_1, r_2 hmotného středu, v nichž má těleso rychlosti v_1, v_2, dostaneme pro práci a pro přírůstek kinetické energie:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}_1}\,. \tag{68}$$

Kinetická energie tělesa při translačním pohybu v uvažované inerciální vztažné soustavě, v níž má rychlost $\boldsymbol{v}$, je

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,.} \tag{69}$$

b) Kinetická energie při rotačním pohybu kolem nehybné osy

Při rotaci tuhého tělesa kolem nehybné osy má vektor elementu úhlové dráhy $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$, vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ i vektor $\boldsymbol{M}$ momentu síly (resp. silové dvojice) směr osy otáčení (viz např. obr. 26). Pak pro element práce, kterou vykoná moment $\boldsymbol{M}$ při elementárním pootočení $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}s}{r}$ můžeme vzhledem k (65) postupně psát

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\mathrm{d}s = Fr\mathrm{d}\varphi = M\mathrm{d}\varphi\,. \tag{70}$$

Jestliže se tato elementární práce vykonala v elementárním časovém intervalu $\mathrm{d}t$, bude *okamžitý výkon*

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = M\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = M\omega = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}\,. \tag{71}$$

Práce (70) se opět projeví elementárním přírůstkem kinetické energie rotačního pohybu tělesa v uvažované inerciální vztažné soustavě, v níž je osa otáčení nehybná: $\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_\mathrm{k}$. Dosadíme-li do (70) ze II. impulsové věty (22) dostaneme

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\varphi = J\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\omega = J\omega\mathrm{d}\omega\,.$$

Jestliže těleso mělo ve výchozí poloze φ_1 úhlovou rychlost ω_1 a v konečné poloze φ_2 úhlovou rychlostí ω_2 , bude vykonaná práce rovna přírůstku kinetické energie:

$$W_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M\mathrm{d}\varphi = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1}\,. \tag{72}$$

Kinetická energie tělesa při jeho rotačním pohybu kolem nehybné osy v uvažované inerciální vztažné soustavě, v níž má úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$, je

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2\,.} \tag{73}$$

c) Kinetická energie při rovinném pohybu

Tuhé těleso nechť koná v uvažované inerciální vztažné soustavě rovinný pohyb. Pro jeho kinetickou energii platí

$$E_\mathrm{k} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{v}_i)\,. \tag{74}$$

Rychlost i-tého bodu $\boldsymbol{v}_i$ nyní vyjádříme pomocí rychlosti $\boldsymbol{v}_S$ hmotného středu v uvažované vztažné soustavě. Zřejmě platí (viz obr. 34b)

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i'\,,$$

kde $\boldsymbol{v}_i'$ je rychlost i-tého bodu vzhledem k hmotnému středu. Po dosazení do (74) dostaneme

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i')\cdot(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i') = \frac{1}{2}v_S^2\sum_i m_i + \boldsymbol{v}_S\cdot\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i' + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2\,. \tag{75}$$

Suma ve druhém členu výrazu (75) představuje hybnost tělesa ve vztažné soustavě spojené hmotným středem. Srovnáme-li výrazy (9) a (12) můžeme analogicky psát

$$\sum_i m_i\boldsymbol{v}_i' = m\boldsymbol{v}_S'\,, \tag{76}$$

kde $\boldsymbol{v}'_S$ je rychlost hmotného středu v soustavě s ním pevně spojené — zřejmě je $\boldsymbol{v}'_S = 0$ a člen (76) je nulový. Pak přijde vztah (75) pro kinetickou energii do tvaru

$$\boxed{E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2\,,} \tag{77}$$

kde J_S je moment setrvačnosti tělesa k ose procházející hmotným středem. Vztah (77) vyjadřuje **Königovu větu:**

Kinetická energie tuhého tělesa při jeho obecném rovinném pohybu je rovna součtu kinetické energie hmotného středu (odpovídá translační složce pohybu) a kinetické energie pohybu tělesa vzhledem k hmotnému středu (odpovídá rotační složce pohybu).

2.7 Zákon zachování mechanické energie

Uvažujme pohyb tělesa v silovém poli, které je *konzervativní.* Přitom konzervativní pole je takové pole, u něhož práce působící síly vykonaná po uzavřené trajektorii tělesa v tomto poli je nulová. To může být jen, když práce mezi dvěma body trajektorie *závisí pouze na výchozí a konečné poloze tělesa, nikoli na tvaru trajektorie.* V takovém poli můžeme definovat *potenciální (polohovou) energii* E_p. Příkladem konzervativních polí v mechanice je pole gravitační a pole pružných sil, v elektromagnetismu je to pole elektrostatické.

Podle výše uvedené definice, tedy práce, kterou konzervativní pole vykoná při přemístění z polohy 1 do polohy 2 je

$$W_{12} = E_\mathrm{p1} - E_\mathrm{p2}\,. \tag{78}$$

Z toho je zřejmé, že potenciální energie je definována až na konstantu — ta se při výpočtu práce podle (78) vyruší. Proto je nutné podle charakteru úlohy volit *nulovou hladinu* potenciální energie.

Jak jsme poznali v čl. 2.6, projeví se práce vykonaná na tělese vzrůstem jeho kinetické energie v uvažované inerciální vztažné soustavě — srovnej s výrazy (68) a (72). Tedy

$$W_{12} = E_\mathrm{p1} - E_\mathrm{p2} = E_\mathrm{k2} - E_\mathrm{k1}\,,$$

neboli

$$E_\mathrm{k1} + E_\mathrm{p1} = E_\mathrm{k2} + E_\mathrm{p2}\,.$$

Obecně tedy platí

$$\boxed{E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = konst.} \tag{79}$$

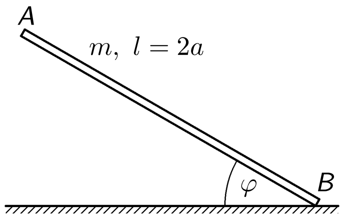
Tento vztah vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie:**

Celková mechanická energie tělesa v konzervativním poli v uvažované inerciální vztažné soustavě je konstantní.

Zákon zachování energie(79) spolu s výrazy (69), (73) a (77) pro kinetickou energii můžeme s výhodou využít při řešení mnohých úloh z mechaniky tělesa. Přitom např. při výpočtu rychlosti nebo úhlové rychlosti nemusíme řešit diferenciální pohybovou rovnici, jak si ukážeme na následujících dvou příkladech.

Příklad 10

Tenká tuhá homogenní tyč o délce $l = 2a$ a hmotnosti m klouže koncovým bodem B po dokonale hladké vodorovné ploše (obr. 41). Tyč se začala pohybovat z klidové, téměř svislé polohy ($\varphi \approx \pi/2$). Určete velikost úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ jako funkci úhlu φ.



Obr. 41

Řešení

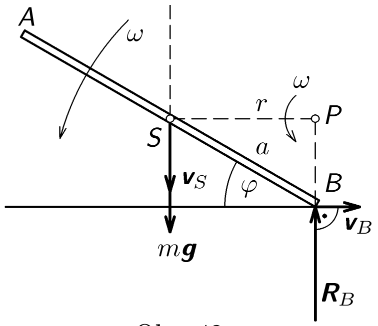
K řešení využijeme zákona zachování mechanické energie (79). V opěrném bodě B působí na tyč reakce $\boldsymbol{R}_B$ vodorovné plochy, která však v případě neexistence tření je kolmá k ploše, a tudíž při pohybu tyče nekoná práci (obr. 42). Jedinou silou, která způsobuje změnu kinetické energie v soustavě spojené s vodorovnou plochou je tíhová síla $m\boldsymbol{g}$.

Protože počáteční rychlost tyče byla nulová a tíhová síla je svislá, pohybuje se hmotný střed po svislé přímce. Mechanická energie v počáteční poloze má složky

$$E_{\mathrm{k}0} = 0\,,\; E_{\mathrm{p}0} = mga\,,$$

v obecné poloze podle (77) je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2\,,\; E_\mathrm{p} = mga\sin\varphi\,.$$



Obr. 42

Pro výpočet rychlosti $\boldsymbol{v}_S$ hmotného středu S můžeme s výhodou použít pólu pohybu P (obr. 42). Platí $v_S = \omega r = \omega a \cos\varphi$. Uvážíme-li, že $J_S = m(2a)^2/12$ dostaneme po dosazení do vztahu (79) pro zákon zachování energie rovnici

$$mga = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\omega^2 + mga\sin\varphi\,,$$

neboli

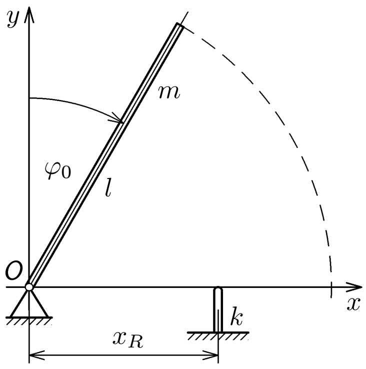
$$g(1-\sin\varphi) = \frac{a\omega^2}{6}(1+3\cos^2\varphi)\,.$$

Odtud dostaneme hledané řešení

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{a}\cdot\frac{1-\sin\varphi}{1+3\cos^2\varphi}}\,.$$

Příklad 11

Tenká tuhá homogenní tyč o hmotnosti m a délce l je ze stavu klidu, kdy je odkloněna od svislice o úhel φ_0 , volně puštěna (obr. 43).



Obr. 43

a) Vypočtěte rychlost jejího koncového bodu při dopadu na vodorovnou rovinu.
b) Do jaké vzdálenosti x_R od osy O je nutné ve vodorovné rovině umístit narazník o tuhosti k , aby zachytil celou sílu nárazu, tj. aby reakce v závěsu osy tyče nezávisela na síle nárazu.
c) Vypočtěte velikost síly nárazu při umístění narazníku podle bodu ad b).

Řešení

a) Řešíme užitím zákona zachování mechanické energie. Nulovou hladinu potenciální energie volíme ve vodorovné rovině. Celková energie ve výchozí poloze je

$$E_0 = E_{pmax} = mg\frac{l}{2}\cos\varphi_0\,. \tag{80}$$

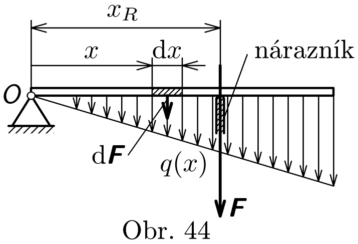
Celková energie ve vodorovné rovině je

$$E_\mathrm{v} = E_{\mathrm{k}max} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{1}{6}mv^2\,.$$

Z rovností celkových energií v obou polohách dostaneme pro rychlost koncového bodu tyče výraz

$$v = \sqrt{3gl\cos\varphi_0}\,.$$

b) Při dopadu tuhé tyče na pružný nárazník o konstantní tuhosti k dojde ke zpomalenému otočnému zabrzdění tyče; úhlové zrychlení označíme ε.



Obr. 44

Na element dx tyče působí element síly (obr. 44)

$$\mathrm{d}F = a\,\mathrm{d}m = \varepsilon x\frac{m}{l}\mathrm{d}x\,.$$

Délková hustota síly tedy je

$$q(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\varepsilon m}{l}x\,.$$

Síla tedy narůstá lineárně od osy O (viz obr. 44). Výsledná síla má velikost

$$F = \int_0^l g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon m}{l}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \varepsilon\frac{ml}{2}\,. \tag{81}$$

Aby nárazník zcela zachytil nárazovou sílu, musíme jej umístit tak, aby ležel na nositelce výslednice (81). Její polohu x_R určíme z podmínky, že moment výslednice je roven součtu momentů složkových sil. Složkové síly jsou rozloženy spojitě, proto tento součet přejde v integrál. Tedy

$$Fx_R = \int_0^l g(x)\cdot x\,\mathrm{d}x\,,$$

neboli

$$\varepsilon\frac{ml}{2}x_R = \frac{\varepsilon m}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x = \varepsilon\frac{ml^2}{3}\,.$$

Z prvního a třetího členu dostaneme pro polohu výslednice a tím i pro polohu nárazníku výraz

$$x_R = \frac{2}{3}\,l\,. \tag{82}$$

Tato poloha se v dynamice nazývá *střed rázu* nebo *střed perkuze.*

c) Výše vypočtená velikost výslednice setrvačných sil, která je dynamickou silou nárazu, je podmíněna znalostí úhlového zrychlení ε . To závisí na tuhosti nárazníku a jeho velikost během nárazu vzrůstá. Výpočet konečné velikosti síly $\boldsymbol{F}$ můžeme však udělat přímo úvahou o energii. Celková mechanická energie E_0 vypočtená v bodě ad a) se po nárazu přemění na potenciální pružnou energii E_{pr} nárazníku podle vztahu

$$E_0 = E_{\mathrm{pr}} = \frac{1}{2}ky_{\max}^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{F^2}{2k}\,,$$

kde $y_{\max} = \dfrac{F}{k}$ je dynamická složka deformace při nárazu. Po dosazení za E_0 z výrazu (80) dostaneme pro konečnou velikost síly nárazu výraz

$$F = \sqrt{mglk\cos\varphi_0}\,. \tag{83}$$

Po dosazení tohoto výrazu do (81) bychom mohli vypočítat velikost příslušného úhlového zrychlení při největší deformaci nárazníku.
Celková síla, působící při nárazu na nárazník, bude kromě dynamické složky (83) zahrnovat ještě statickou tíhovou složku, která závisí na poloze x_R podle (82). Celková síla má velikost

$$F_c = \frac{3}{4}mg + \sqrt{mglk\cos\varphi_0}\,.$$

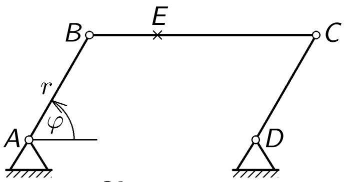
2.8 Srovnání rotačního pohybu s translačním pohybem

Ze zavedených veličin a odvozených vztahů mezi veličinami pro translační pohyb tuhého tělesa a pro rotační pohyb tuhého tělesa kolem nehybné osy je možné sledovat analogie, které mají hlubší fyzikální souvislost. Pro získání lepší orientace mezi těmito veličinami a vztahy je vhodné si udělat jejich shrnutí a vzájemné srovnání.

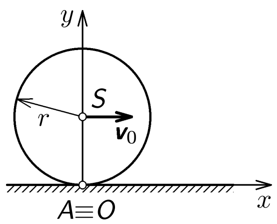
translační pohyb		rotační pohyb	
element dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,,\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	element úhlové dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
rychlost	$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	úhlová rychlost	$\boldsymbol{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$
zrychlení	$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$	úhlové zrychlení	$\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$
I. impulsová věta	$\boldsymbol{F} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$	II. impulsová věta	$\boldsymbol{M} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
pohybová rovnice	$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$	pohybová rovnice	$J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}$
element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
výkon	$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	výkon	$P = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$
kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}J\omega^2$

3 Úlohy

1. Klika *AB* čtyřkloubového mechanismu (obr. 45), jehož členy tvoří paralelogram se otáčí podle rovnice pohybu $\varphi = kt^3$, kde $k > 0$ je konstanta. Určete rychlost a zrychlení bodu *E* ojnice v čase t_1. Dáno $\overline{AB} = \overline{CD} = r = 0{,}10\ \mathrm{m}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$, $k = 0{,}10\ \mathrm{s}^{-3}$, $t_1 = 10\ \mathrm{s}$.



Obr. 45



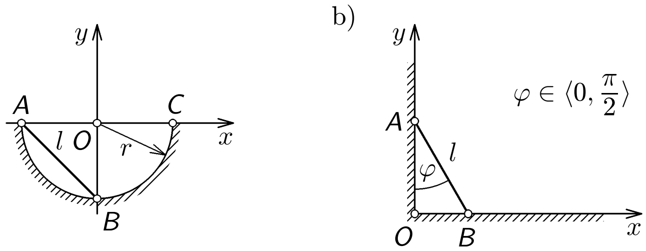
Obr. 46

2. Motor se roztáčí tak, že součin úhlové rychlosti a úhlového zrychlení jeho rotoru je stálý, tj. $\omega\varepsilon = k$, kde $k > 0$. Otáčky motoru na počátku jsou n_0. Vypočtěte otáčky n_1 motoru v čase t_1. Je dáno: $k = 20\ \mathrm{s}^{-3}$, $n_0 = 190\ \mathrm{min}^{-1}$, $t_1 = 30\ \mathrm{s}$.

3. Odvoďte parametrické rovnice trajektorie bodu *A*, který leží na povrchu válce o poloměru r, z jeho počáteční polohy naznačené na obr. 46. Válec se dokonale odvaluje po rovině. Za parametr volte úhel φ otočení válce kolem osy procházející středem *S*. Určete souřadnice bodu *A* v těchto zvláštních polohách: $\varphi = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π a vypočtěte v těchto polohách i velikost rychlosti bodu *A*, má-li střed *S* rychlost $\boldsymbol{v}_0$.

a)

b)



Obr. 47

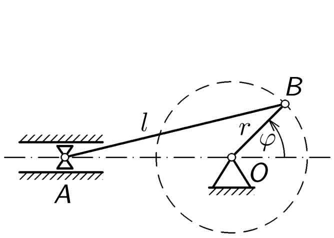
4. Tenká tyčka AB délky l se klouže po vedení ve tvaru

a) půlkružnice (obr. 47a) tak, že bod B přejde do bodu C,

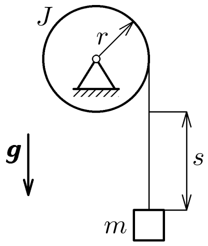
b) dvou vzájemně kolmých stěn (obr. 47b).

Odvoďte rovnici nehybné polodie v souřadnicích kartézských soustav naznačených na obr. 47.

5. Je dán klikový mechanismus podle obr. 48, u něhož $r : l = 1 : 3$. Grafickou metodou najděte nehybnou polodii ojnice AB pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Obr. 48



Obr. 49

6. Parašutista o hmotnosti $m = 90$ kg seskočí padákem z balónu, který je v relativním klidu vůči povrchu Země. Odporová síla vzduchu je úměrná druhé mocnině rychlosti podle vztahu $F_0 = kv^2$, kde pro daný padák je $k = 35{,}3$. Vypočtěte, jaké maximální rychlosti může parašutista dosáhnout.

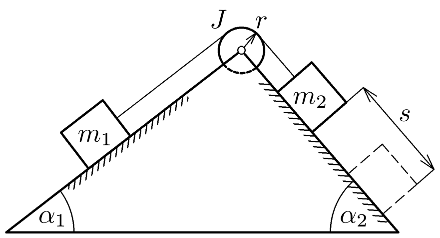
7. Jaký je moment setrvačnosti kotouče kladky o poloměru $r = 180$ mm , jestliže závaží o hmotnosti $m = 4{,}0$ kg proběhne dráhu $s = 1{,}2$ m za dobu $t = 1{,}3$ s . Na počátku je závaží v klidu (obr. 49).

8. Vypočtěte moment setrvačnosti J rotačního tělesa ze soustavy na obr. 50, jestliže závaží o hmotnostech m_1 , m_2 se pohybují po drsných plochách a urazí dráhu s ze stavu klidu za dobu t_0 . Je dáno m_1 , m_2 , r , s , t_0 , α_1 , α_2 a součinitel smykového tření f . Stanovte podmínku pro to, aby se soustava vůbec pohybovala.

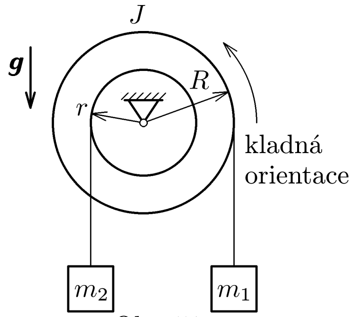
9. Je dána soustava s dvojitou kladkou podle obr. 51, u níž známe r, R, J, m_1, m_2. Určete:

a) Úhlové zrychlení kladky.

b) Úhlovou rychlost kladky v čase t , je-li v $t_0 = 0$ $\omega = \omega_0$.



Obr. 50



Obr. 51

10. Rotor o momentu setrvačnosti $J = 2{,}25 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$, je poháněn krokovým impulsním motorem. Moment setrvačnosti motoru zanedbáváme. Hnací moment má konstantní velikost $M_\mathrm{h} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N \cdot m}$ a udělí rotoru jeden impuls po dobu $t_0 = 0{,}220\ \mathrm{s}$. Pohyb rotoru je současně brzděn pasivními odpory, jejichž výsledný moment má velikost $M_\mathrm{p} = 2{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N \cdot m}$. Vypočtěte:

a) Jaké maximální úhlové rychlosti rotor dosáhne.

b) Za jak dlouho od počátku impulsu se rotor zastaví.

c) Jaký úhel rotor opíše od počátku impulsu do svého zastavení.

11. Rotor turbíny o momentu setrvačnosti J volně dobíhá z počáteční úhlové rychlosti ω_0 pod působením odporových sil, které mají moment o velikosti $M = k\omega^2$, kde ω je okamžitá úhlová rychlost a $k > 0$ je konstanta. Určete:

a) Závislost $\omega = \omega(t)$.

b) Dobu t_1, za níž se ω_0 zmenší na $\omega_0/10$.

12. Stejnosměrný elektromotor je při úhlové rychlosti ω_0 přepnut do dynamového chodu, přičemž na jeho rotor začne působit brzdicí moment síly o velikosti $M_\mathrm{b} = k\omega$, kde $k > 0$ je konstanta. Rotor má moment setrvačnosti J. Vypočtěte, za jakou dobu t_1 a po kolika obrátkách z_1 klesne úhlová rychlost rotoru na polovinu.

13. Motor o konstantním výkonu P roztáčí setrvačník ze stavu, kdy má počáteční úhlovou rychlost ω_0. Soustava motoru se setrvačníkem má moment setrvačnosti J. Vypočtěte, jakou úhlovou rychlost získá setrvačník za čas t a počet z otáček, které potom vykoná.

14. Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti J vzhledem k ose geometrické souměrnosti těchto homogenních rotačních těles o hmotnosti m:

a) Tenkostěnná trubka o středním poloměru r.

b) Tlustostěnná trubka o vnějším poloměru r_1 a o vnitřním poloměru r_2.

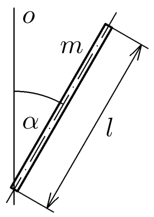
c) Tenkostěnná kulová skořepina o středním poloměru r.

d) Kolmý kužel o kruhové základně s poloměrem r.

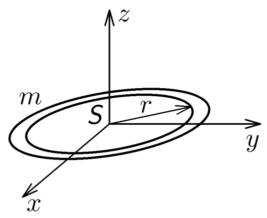
e) Kolmý komolý kužel o kruhových základnách s poloměry r_1, $r_2 < r_1$.

15. a) Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti J tenké homogenní tyče délky l k ose o, s níž tyč svírá úhel α a která prochází jejím koncem (obr. 52). Hmotnost tyče je m.

b) Jaký bude moment setrvačnosti J_1, když na vnější konec tyče přidáme hmotný bod o téže hmotnosti m?



Obr. 52



Obr. 53

16. Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti tenkého homogenního prstence o hmotnosti m a středním poloměru r:

a) k ose z procházející hmotným středem S kolmo k jeho rovině (obr. 53),

b) k osám x, y, které leží v rovině prstence a prochází bodem S.

17. Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti J homogenní krychle o délce hrany a vzhledem k ose, která prochází jejím geometrickým středem kolmo ke stěně krychle. Hmotnost krychle je m.

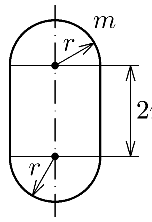
18. Vypočtěte moment setrvačnosti J vzhledem k ose symetrie homogenního rotačního tělesa, které sestává z válcové části a dvou polokulových částí podle obr. 54. Je dáno: rozměr r a hmotnost m celého tělesa.

19. Odvoďte vztah pro moment setrvačnosti tenké homogenní tyčky o hmotnosti m a o délce l:

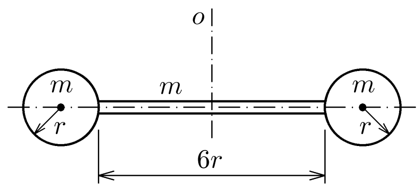
a) K ose procházející jedním z konců kolmo na tyčku.

b) K ose procházející středem tyčky kolmo na její osu.

c) Z výsledků ad a), b) ověřte platnost Steinerovy věty.



Obr. 54



Obr. 55

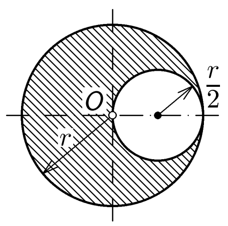
20. Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní činky podle obr. 55 k ose o. Spojovací tyčku považujte za tenkou. Je dán rozměr r, hmotnost m každé z koulí a stejná hmotnost m spojovací tyčky.

21. Vypočtěte moment setrvačnosti těchto homogenních těles, jejichž hmotnost je m a poloměr r:

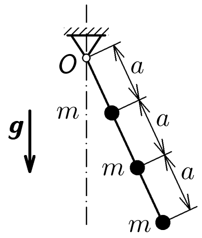
a) válce k jeho povrchové přímce,

b) koule k tečně její hlavní kružnice.

22. Je dána homogenní kruhová deska o poloměru r s otvorem podle obr. 56. Deska má hustotu ϱ a tloušťku a. Vypočtěte moment setrvačnosti J vzhledem k ose procházející středem O kolmo na desku.



Obr. 56



Obr. 57

23. Kyvadlo sestává ze tří hmotných bodů, každý o hmotnosti m, rozmístěných podle obr. 57 s roztečí a. Vypočtěte moment setrvačnosti kyvadla a dobu T malých kmitů v těchto případech:

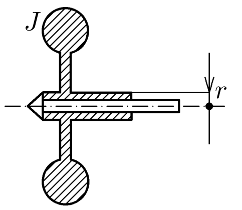
a) Hmotnost spojovací tyčky je zanedbatelná.

b) Hmotnost spojovací tyčky je m.

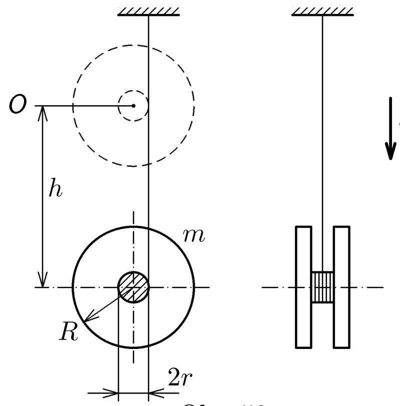
Stanovte poměr T_a/T_b odpovídajících period.

24. Válec o hmotnosti m a poloměru r se otáčí kolem své rotační osy úhlovou rychlostí ω_0. Jakou by musel mít úhlovou rychlost ω při rotaci kolem své povrchové přímky, aby se nezměnila jeho kinetická energie?

25. Setrvačník (obr. 58) můžeme roztočit tak, že na jeho pouzdro o poloměru r navineme šňůrku a za její volný konec táhneme silou až do jejího odvinutí. Vypočtěte úhlovou rychlost setrvačníku o momentu setrvačnosti J odvinula-li se ze stavu klidu délka l šňůrky bez prokluzu při působení síly $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{konst}$.



Obr. 58



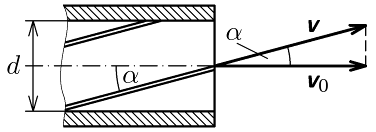
Obr. 59

26. Je dáno Maxwellovo kyvadlo jako soustava dvou blízko sebe umístěných válcových kotoučů o poloměru R a o celkové hmotnosti m, které jsou spojeny čepem o poloměru r, jehož hmotnost zanedbáme (obr. 59). Na čepu je jedním koncem připevněno a navinuto neroztažitelné vlákno, které je druhým koncem připevněno k závěsu. Po navinutí vlákna a po uvolnění kotoučů z horní klidové polohy se vlákno odvíjí bez prokluzu. Vypočtěte:

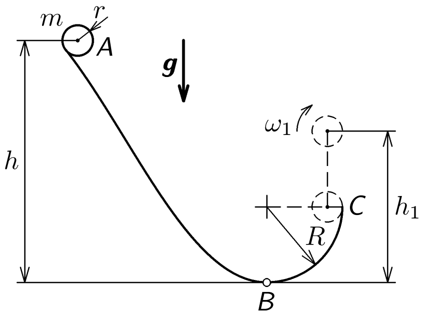
a) Rychlost středu kotoučů při jejich přemístění do vzdálenosti h od klidové polohy.

b) Zrychlení středu kotoučů.

27. Vypočtěte kinetickou energii střely v okamžiku, kdy opouští hlaveň zbraně (je to tzv. úsťová energie). Je dáno: ráže d, úhel α vývrtu hlavně (viz obr. 60), počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$, hmotnost střely m a její moment setrvačnosti J_0.



Obr. 60

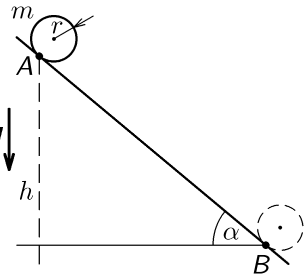


Obr. 61

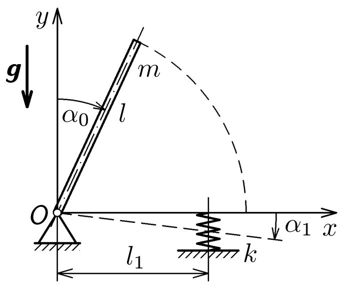
28. Kulička o hmotnosti m a poloměru r se z klidového stavu v bodě A valí bez klouzání po dráze podle obr. 61 a v bodě C ji opustí. Je-li dána výška h a poloměr R, vypočtěte:

a) Sílu, která bude na kuličku působit, když bude procházet nejnižším bodem B.

b) Největší výšku h_1, do které vystoupí a úhlovou rychlost ω_1, kterou zde bude mít.



Obr. 62



Obr. 63

29. Na drsné nakloněné rovině se sklonem α se po vypuštění ze stavu klidu v bodě A (viz. obr. 62) dokonale odvaluje jednak kulička, jednak váleček.

Obě tělesa mají stejnou hmotnost m a stejný poloměr r. Vypočtěte:

a) Zrychlení a_k hmotného středu kuličky, $a_\mathrm{v}$válečku.

b) Dobu t_k, resp. t_v, za kterou tělesa projdou bodem B, který je ve výšce h pod bodem A. Jakou při tom dosáhnou postupnou rychlost hmotné středy těles?

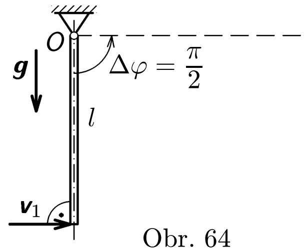
Stanovte poměr velikosti jednotlivých vypočtených veličin pro kuličku a váleček.

30. Homogenní tenká tyč konstantního průřezu je ve stavu klidu odkloněna od svislice o úhel α_0. Tyč má hmotnost m a délku l.

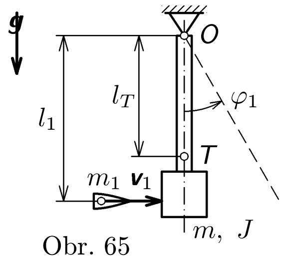
a) Určete její úhlovou rychlost ω_1 v okamžiku dopadu na pružinový nárazník, jehož horní konec se nachází ve vodorovné rovině, která prochází čepem O tyče (obr. 63).

b) Jaká bude největší úhlová odchylka α_1 tyče od vodorovné roviny po jejím dopadu na nárazník, jehož tuhost je k a vzdálenost od čepu O je l_1. Při řešení předpokládejte, že tuhost nárazníku je tak velká, že není nutné počítat se změnou gravitační potenciální energie tyče, způsobenou její odchylkou o malý úhel α_1.

31. Homogenní tenká tyč konstantního průřezu o délce l je na jednom svém konci otočně zavěšena (obr. 64). Jaká rychlost $\boldsymbol{v}_1$ musí být udělena volnému konci tyče, aby se tyč dostala ze svislé polohy do polohy vodorovné?



Obr. 64



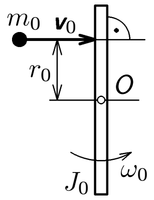
Obr. 65

32. Do balistického kyvadla pro určování rychlostí střel pronikne střela o hmotnosti m_1 neznámou rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ (obr. 65), přičemž střela zůstane v tělese kyvadla. Působením střely se podélná osa kyvadla vychýlí od svislice o úhel φ_1. Je známa hmotnost m kyvadla, poloha l_T těžiště a moment setrvačnosti J kyvadla k ose O. Určete rychlost střely, je-li známa vzdálenost l_1 její trajektorie od osy O.

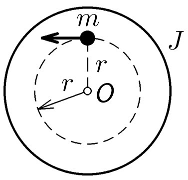
33. Dřevěná tyč se otáčí úhlovou rychlostí ω_0 kolem nehybné svislé osy O a má vzhledem k ní moment setrvačnosti J_0. Kolmo na tyč, ve vzdálenosti r_0, narazí střela o hmotnosti m_0 rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ proti pohybu tyče (obr. 66).

a) Určete úhlovou rychlost ω_1 otáčení tyče, jestliže střela v tyči uvázne.

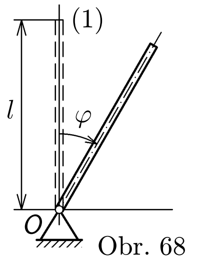
b) Změní se úhlová rychlost ω_1, jestliže střela po několika otáčkách z tyče vypadne (předpokládáme nulovou relativní rychlostí)?



Obr. 66



Obr. 67



Obr. 68

34. Vodorovná kruhová deska je dokonale otočná kolem svislé osy procházející jejím středem O; vzhledem k této ose má moment setrvačnosti J. Na desce, která je vzhledem k uvažované inerciální soustavě v klidu, stojí ve vzdálenosti r člověk o hmotnosti m (budeme jej považovat za hmotný bod). O jaký úhel φ_0 se kotouč pootočí, oběhne-li člověk desku v kladném směru po kružnici o poloměru r jednou dokola (obr. 67)?

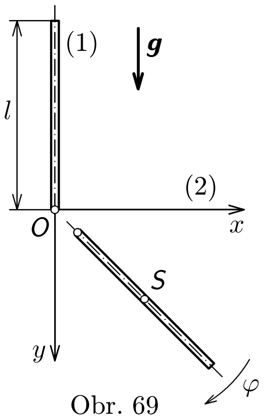
35. Tenká homogenní tyč o délce l je volně puštěna ze svislé polohy (1) (obr. 68) a se zanedbatelným třením se otáčí okolo čepu O.

a) Užitím pohybové rovnice určete závislost úhlového zrychlení ε tyče na úhlu otočení.

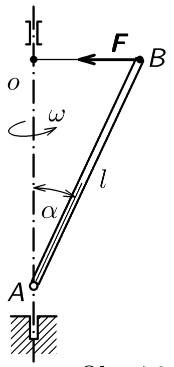
b) Užitím zákona zachování energie určete závislost úhlové rychlosti ω tyče na úhlu otočení. Derivací výsledku ověřte řešení v bodě ad a).

36. Svisle stojící tenká homogenní tyč o délce l je otočně uložená v čepu O (obr. 69). Uvolníme ji ze svislé polohy (1). Tyč začne vlivem tíže padat, tj. otáčet se kolem osy z procházející bodem O. Při průchodu vodorovnou rovinou (2) tyč uvolníme v ložisku (např. vytažením čepu) a tyč se začne volně pohybovat prostorem. Odvoďte rovnice pro pohyb volně se pohybující tyče, tj. funkce $x_S = x_S(t)$, $y_S = y_S(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

37. Tenká tuhá homogenní tyč o délce l a hmotnosti m se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy o (obr. 70). Tyč je v bodě A kloubově připojena ke svisle rotujícímu hřídeli, v bodě B je ke hřídeli připojena prostřednictvím lana tak, že osa tyče svírá s osou hřídele úhel α. Určete velikost tahové síly v laně.



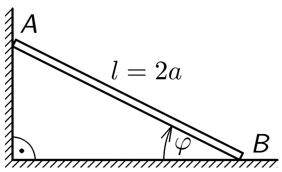
Obr. 69



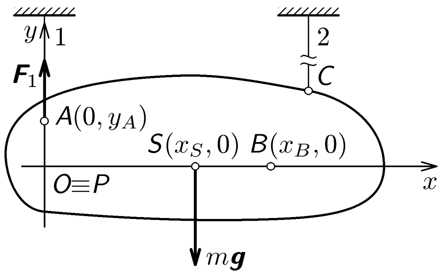
Obr. 70

38. Tenká tuhá homogenní tyč o délce $l = 2a$ klouže v koncových bodech A, B po dvou dokonale hladkých stěnách, z nichž jedna je svislá, druhá vodorovná (obr. 71). Tyč je na svislé stěně vedena tak, aby bod A byl neustále v dotyku se stěnou.

Tyč se začala pohybovat z klidové, téměř svislé polohy ($\varphi \approx 90°$). Určete velikost úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ tyče jako funkci úhlu φ.



Obr. 71



Obr. 72

39. Těleso obecného tvaru je zavěšeno na dvou rovnoběžných vláknech 1, 2 uchycených v bodech A, C podle obr. 72. Těleso má hmotnost m a moment setrvačnosti J_S vzhledem k ose, která prochází hmotným středem S rovnoběžně s osou z zvolené vztažné soustavy. Bod A má souřadnice $x_A = 0$, y_A, poloha hmotného středu S je rovněž známa: x_S, $y_S = 0$. Pro okamžik, kdy bude přerušeno vlákno 2, určete:

a) Sílu F_1 napínající vlákno 1.

b) Zrychlení hmotného středu a úhlové zrychlení rotačního pohybu tělesa.

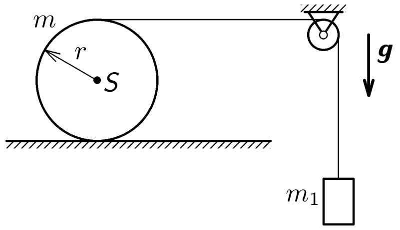
c) Zrychlení bodu B o souřadnicích x_B, $y_B = 0$, přičemž využijte jednak vlastnosti pólu P pohybu, jednak rozkladu pohybu s referenčním bodem položeným do hmotného středu.

40. Homogenní rotační válec o hmotnosti m a poloměru r se dotýká drsné vodorovné roviny s koeficientem smykového tření f. Válec je prostřednictvím neroztažitelného vlákna zanedbatelné hmotnosti tažen přes kladku rovněž se zanedbatelnou hmotností závažím o hmotnosti m_1 (obr. 73).

a) Napište pohybové rovnice válce a závaží.

b) Řešte pohybové rovnice pro případ, kdy se válec dokonale odvaluje. Stanovte podmínku pro koeficient smykového tření, aby tento případ nastal.

c) Proveďte řešení pro odvalování provázené smykáním. Příslušné veličiny označte čárkou.



Obr. 73

Výsledky úloh

1. Tyč BC vykonává translační pohyb, proto $\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}_B$. Pak

$$v_E = 3krt_1^2 = 3{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

$$a_{Et} = 6krt_1 = 0{,}60\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,\ a_{En} = \frac{v_E^2}{r} = 9k^2rt_1^4 = 90\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,.$$

2. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými: $\omega\,\mathrm{d}\omega = k\,\mathrm{d}t$,

$$n_1 = \frac{30}{\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi n_0}{30}\right)^2 + 2kt_1} = 381\ \mathrm{min^{-1}}\,.$$

3. $x = r(\varphi - \sin\varphi)$, $y = r(1 - \cos\varphi)$ ... cykloida.

$$\varphi = 0:\ x = 0\,,\ y = 0\,,\ v = 0\,,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}:\ x = r(\frac{\pi}{2} - 1)\,,\ y = r\,,\ v = \sqrt{2}v_0\,,$$

$$\varphi = \pi:\ x = \pi r\,,\ y = 2r\,,\ v = 2v_0\,,$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}:\ x = r(\frac{3\pi}{2} + 1)\,,\ y = r\,,\ v = \sqrt{2}v_0\,,$$

$$\varphi = 2\pi:\ x = 2\pi r\,,\ y = 0\,,\ v = 0$$

4. a) $x = y = 0$ ... bod O.
b) $x^2 + y^2 = l^2$, pro $x \geq 0$, $y \geq 0$ ... čtvrtkružnice o poloměru l se středem v O.

5. viz obr. 74

6. Parašutista koná translační pohyb; jeho max. rychlost bude $v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}} =$ $= 5{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

7. $J = mr^2\left(\frac{gt^2}{2s} - 1\right) = 0{,}76\ \mathrm{kg{\cdot}m^2}$

8. Aby se soustava vůbec pohybovala, musí být

$$m_2\sin\alpha_2 > m_1(\sin\alpha_1 + f\cos\alpha_1) + m_2 f\cos\alpha_2 \quad \text{nebo}$$

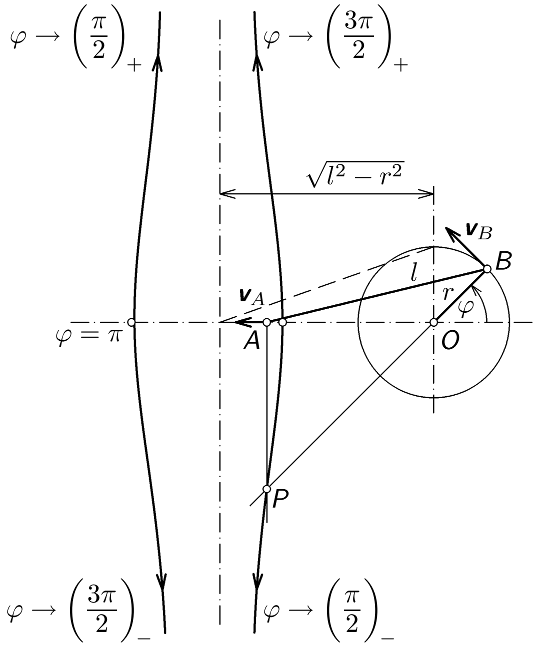
$$m_1 \sin\alpha_1 > m_2(\sin\alpha_2 + f\cos\alpha_2) + m_1 f\cos\alpha_1 \,.$$

Předpokládáme-li platnost první podmínky, budou se závaží pohybovat se zrychlením

$$a = \frac{m_2(\sin\alpha_2 - f\cos\alpha_2) - m_1(\sin\alpha_1 + f\cos\alpha_1)}{J + (m_1+m_2)r^2} r^2 g = konst.$$

Moment setrvačnosti kladky pak bude

$$J = m_2 r^2\left[(\sin\alpha_2 - f\cos\alpha_2)\frac{gt_0^2}{2s} - 1\right] - m_1 r^2\left[(\sin\alpha_1 + f\cos\alpha_1)\frac{gt_0^2}{2s} - 1\right].$$

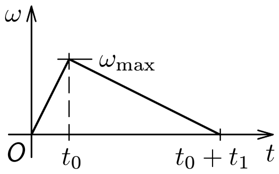


Obr. 74

9. a) $\varepsilon = \dfrac{m_1 R - m_2 r}{m_1 R^2 + m_2 r^2 + J} g\,,$ b) $\omega = \omega_0 + \varepsilon t\,.$

10. a) $\omega_{\max} = \dfrac{M_\mathrm{h} - M_\mathrm{p}}{J} t_0 = 1{,}20\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$

b) $t_0 + t_1 = \dfrac{M_\mathrm{h}}{M_\mathrm{p}} t_0 = 11{,}96\ \mathrm{s}\,.$



c) $\varphi = \dfrac{M_\mathrm{h} - M_\mathrm{p}}{2J} \dfrac{M_\mathrm{h}}{M_\mathrm{p}} t_0^2 = 7{,}18\ \mathrm{rad}\,.$

11. Pohybová rovnice při separaci proměnných: $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2} = -\dfrac{k}{J}\mathrm{d}t\,.$

a) $\omega = \dfrac{J\omega_0}{J + k\omega_0 t}\,,\qquad$ b) $t_1 = \dfrac{9J}{k\omega_0}\,.$

12. $t_1 = \dfrac{J}{k}\ln 2\,,\quad z_1 = \dfrac{J\omega_0}{4\pi k}\,.$

13. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \dfrac{2P}{J}t}\,,\quad z = \dfrac{J}{6\pi P}\left[\sqrt{(\omega_0^2 + \dfrac{2P}{J}t)^3} - \omega_0^3\right]\,.$

14. a) $J = mr^2\,,\quad$ b) $J = \dfrac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)\,,\quad$ c) $J = \dfrac{3}{2}mr^2\,,$

d) $J = \dfrac{3}{10}mr^2\,,\quad$ e) $J = \dfrac{3}{10}m\dfrac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}\,.$

15. a) $J = \dfrac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha\,,\quad$ b) $J = \dfrac{4}{3}ml^2\sin^2\alpha\,.$

16. a) $J_z = mr^2\,,\quad$ b) $J_x = J_y = \dfrac{1}{2}mr^2\,.$

17. $J = \dfrac{1}{6}ma^2\,.$ Dá se dokázat, že tento moment setrvačnosti nezávisí na směru osy, která prochází středem krychle.

18. $J = \dfrac{23}{50}mr^2\,.$

19. a) $J = \dfrac{1}{3}ml^2\,,\quad$ b) $J_0 = \dfrac{1}{12}ml^2\,,\quad$ c) $\dfrac{1}{3}ml^2 = \dfrac{1}{12}ml^2 + m\dfrac{l^2}{4}\,.$

20. $J = \dfrac{179}{5} mr^2\,.$

21. a) $J = \dfrac{3}{2} mr^2\,,$ b) $J = \dfrac{7}{5} mr^2\,.$

22. $J = \dfrac{13}{32} \pi \varrho a r^4\,.$

23. a) $J_\mathrm{a} = 14ma^2\,,\quad T_\mathrm{a} = 2\pi\sqrt{\dfrac{7a}{3g}}\,,$

b) $J_\mathrm{b} = 17ma^2\,,\quad T_\mathrm{b} = 2\pi\sqrt{\dfrac{34a}{15g}}\,,$

$$\frac{T_\mathrm{a}}{T_\mathrm{b}} = \sqrt{\frac{35}{34}} \doteq 1{,}015 \quad (\text{odchylka } 1,5\%)\,.$$

24. $\omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{3}}\,.$

25. $\omega = \sqrt{\dfrac{2Fl}{J}}\,.$

26. a) $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{R^2}{2r^2}}}\,,$ b) $a = \dfrac{2r^2 g}{2r^2 + R^2}\,.$

27. $E_k = \dfrac{1}{2}\left(m + \dfrac{2J_0 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2}\right) v_0^2\,.$

28. a) $F_B = mg\left[1 + \dfrac{10(h-r)}{7(R-r)}\right]\,,$

b) $h_1 = \dfrac{5h + 2R}{7}\,,\quad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{10g(h-R)}{7r^2}}\,.$

29. a) $a_\mathrm{k} = \dfrac{5}{7} g \sin\alpha\,,\ a_\mathrm{v} = \dfrac{2}{3} g \sin\alpha\,,\ \dfrac{a_\mathrm{k}}{a_\mathrm{v}} = \dfrac{15}{14}\,,$

b) $t_\mathrm{k} = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{14h}{5g}}\,,\ t_\mathrm{v} = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{3h}{g}}\,,\ \dfrac{t_\mathrm{k}}{t_\mathrm{v}} = \sqrt{\dfrac{14}{15}}\,,$

$$v_\mathrm{k} = \sqrt{\frac{10}{7} gh}\,,\ v_\mathrm{v} = \sqrt{\frac{4}{3} gh}\,,\ \frac{v_\mathrm{k}}{v_\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{15}{14}}\,.$$

30. a) $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{3g\cos\alpha_0}{l}}$,

b) $\alpha_1 = \dfrac{mgl}{l_1 k}\left(\dfrac{1}{2l_1} + \sqrt{\dfrac{k\cos\alpha_0}{mgl}}\right)$ (zahrnuje statickou a dynamickou složku).

31. $v_1 = \sqrt{3gl}$.

32. Aplikujeme zákon zachování momentu hybnosti a zákon zachování energie.

$$v_1 = \frac{1}{m_1 l_1}\sqrt{2g(1-\cos\varphi_1)(ml_T + m_1 l_1)(J + m_1 l_1^2)}\,.$$

33. a) $\omega_1 = \dfrac{J_0\omega_0 - r_0 m_0 v_0}{J_0 + m_0 r_0^2}$.

Podle vztahu mezi momentem hybnosti tyče $J_0\omega_0$ a momentem hybnosti $r_0 m_0 v_0$ střely se tyč buď pouze zpomalí $(\omega_1 > 0)$, zastaví $(\omega_1 = 0)$ nebo se roztočí v opačném směru $(\omega_1 < 0)$.

b) Úhlová rychlost ω_1 se nezmění.

34. $\varphi_0 = -\dfrac{2\pi m r^2}{J}$

(Deska se otočí v opačném směru, než je směr oběhu člověka.)

35. a) $\varepsilon = \dfrac{3g}{2l}\sin\varphi$, b) $\omega = \sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos\varphi)}$.

36. $x_S = \dfrac{l}{2} = konst.$, $y_S = \dfrac{1}{2}gt^2 + \dfrac{1}{2}t\sqrt{3gl}$, $\varphi = t\sqrt{\dfrac{3g}{l}}$.

37. Vypočteme výslednici spojitě rozložených odstředivých sil a napíšeme momentovou podmínku rovnováhy k bodu A. pak

$$F = mg\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + \frac{l\omega^2}{3g}\sin\alpha\right).$$

38. Řešíme užitím zákona zachování energie, přičemž pro výpočet rychlosti hmotného středu užijeme pólu pohybu P (obr. 75).

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2a}(1-\sin\varphi)}\,.$$

39. a) $F_1 = \dfrac{J_S}{J_S + mx_S^2} mg\,,$

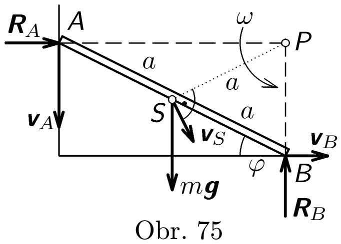
b) $\ddot{x}_S = 0\,,\ \ddot{y}_S = -\dfrac{mx_S^2 g}{J_S + mx_S^2}\,,\ \ \ddot{\varphi} = -\dfrac{mx_S g}{J_S + mx_S^2}\,,$

c) Užitím pólu pohybu

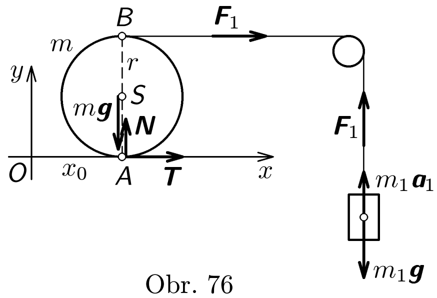
$$\ddot{x}_B = 0\,,\ \ddot{y}_B = x_B\ddot{\varphi} = -\frac{mx_S x_B g}{J_S + mx_S^2}\,,$$

Užitím hmotného středu

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_S = 0\,,\ \ddot{y}_B = \ddot{y}_S + (x_B - x_S)\ddot{\varphi} = -\frac{mx_S x_B g}{J_S + mx_S^2}\,.$$



Obr. 75



Obr. 76

40. a) Závaží:

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_1\,.$$

Válec (rovinný pohyb):

$$m\ddot{x}_S = F_1 + T\,,$$

$$m\ddot{y}_S = N - mg\,,$$

$$J_0\ddot{\varphi} = F_1 r - Tr\,,\quad J_0 = \frac{1}{2}mr^2\,,$$

kde N, T jsou velikosti normálové a tečné složky reakce, kterou působí rovina na válec a F_1 je velikost síly napínající vlákno (obr. 76). Protože $y_S = r = konst.$, je $\ddot{y}_S = 0$ a zrychlení hmotného středu $a_S = \ddot{x}_S$. Současně $N = mg$.

b) Bod A je pól pohybu a pro zrychlení bodu B a tím i závaží platí

$$a_1 = 2\ddot{x}_S = 2a_S$$

a dále $x_S = r\varphi$, neboli $\varepsilon = \ddot{\varphi} = \dfrac{a_S}{r}$. Pak pohybové rovnice jsou

$$F_1 = m_1(g - 2a_S)\,,$$

$$(m + 2m_1)a_S = m_1 g + T\,,$$

$$(\frac{m}{2} + 2m_1)a_S = m_1 g - T\,.$$

Řešením

$$a_S = \frac{4m_1}{3m + 8m_1}g\,, \quad x_S = x_0 + \frac{2m_1 g t^2}{3m + 8m_1}\,,$$

$$\varepsilon = \frac{4m_1}{3m + 8m_1}\frac{g}{r}\,, \quad \varphi = \frac{2m_1 g t^2}{(3m + 8m_1)r}\,,$$

$$T = \frac{m}{3m + 8m_1}m_1 g\,, \quad F_1 = \frac{3m}{3m + 8m_1}m_1 g\,.$$

Aby odvalování bylo dokonalé, musí být

$$T < Nf \quad \text{a proto} \quad f > \frac{m_1}{3m + 8m_1}\,.$$

c) Při prokluzu $T' = fmg$. Bod A není pólem pohybu a pro zrychlení závaží platí $a_1' = a_S' + \varepsilon' r$. Pohybové rovnice pak jsou

$$F_1' = m_1(g - a_S' - \varepsilon' r)\,,$$

$$(m + m_1)a_S' + m_1 r\varepsilon' = (m_1 + fm)g\,,$$

$$(\frac{m}{2} + m_1)r\varepsilon' + m_1 a_S' = (m_1 - fm)g\,.$$

Řešením

$$a_S' = \frac{m_1 + f(m + 4m_1)}{m + 3m_1}g\,,$$

$$\varepsilon' = \frac{m_1 - f(m + 2m_1)}{m + 3m_1}\frac{2g}{r}\,,$$

$$F' = \frac{(1 + f)m}{m + 3m_1}m_1 g\,.$$

Literatura

[1] Baník, I., Baník, R., Zámečník, J.: *Fyzika netradične, Mechanika.* Alfa, Bratislava 1990.

[2] Brdička, M., Hladík, A.: *Teoretická mechanika.* Academia, Praha 1987.

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář: *Technická fyzika.* SNTL, Praha 1961.

[4] Chytilová, M.: *Mechanika — studijní texty pro soutěžící ve fyzikální olympiádě.* Škola mladých fyziků, sv. 21. SPN, Praha 1988.

[5] Novotný, J.: *Technická mechanika II. díl (Kinematika a dynamika).* Ministerstvo národní obrany, Praha 1965.

[6] Schönfeldová, J., Handlířová, J., Pytela, V.: *Teoretická mechanika.* Vysoká vojenská škola, Vyškov 1975.

[7] Szabó, J.: *Mechanika tuhých těles a kapalin.* SNTL, Praha 1967.

[8] Šedivý, P.: *Valivý pohyb po nakloněné rovině.* Školská fyzika, IV. ročník, č. 2.

[9] Trkal, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa.* Nakl. ČSAV, Praha 1956.

[10] Vybíral, B.: *Základy teoretické mechaniky 1. a 2. díl.* Gaudeamus, Hradec Králové 1992.

[11] Vybíral, B.: *Statika tuhého tělesa.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 26. Vydavatelství MAFY, Hradec Králové 1996.

[12] Juliš, K., Brepta, R. a kol.: *Mechanika I. díl (Statika a kinematika).* SNTL, Praha 1986.

[13] Juliš, K., Brepta, R. a kol.: *Mechanika II. díl (Dynamika).* SNTL, Praha 1987.