ROVNOMĚRNĚ ZRYCHLENÉ A ZPOMALENÉ POHYBY

Studijní text pro řešitele FO, kat. D

Ivo Volf, Přemysl Šedivý

Obsah

Úvod **2**

1 Kinematika rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu hmotného bodu **2**

2 Dynamika a energetická bilance rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu hmotného bodu **7**

3 Rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb tuhého tělesa okolo pevné osy **12**

4 Klouzavý pohyb tuhého tělesa po nakloněné rovině **16**

5 Valivý pohyb rotačního tuhého tělesa po nakloněné rovině **18**

Řešení úloh **21**

Úvod

V tomto studijním textu se budeme zabývat pohyby, při kterých se velikost okamžité rychlosti v závislosti na čase rovnoměrně zvětšuje nebo rovnoměrně zmenšuje. V prvním případě mluvíme o pohybu rovnoměrně zrychleném, v druhém případě o pohybu rovnoměrně zpomaleném. Oba typy pohybu se v praxi vyskytují poměrně často. Například pohyb vlaku mezi dvěma stanicemi můžeme většinou velmi přesně modelovat jako několik po sobě následujících rovnoměrně zrychlených, rovnoměrných a rovnoměrně zpomalených pohybů. Zvláštním případem rovnoměrně zrychleného pohybu je volný pád ve vakuu. Svislý vrh vzhůru ve vakuu probíhá zpočátku jako pohyb rovnoměrně zpomalený a po dosažení nejvyššího bodu trajektorie jako pohyb rovnoměrně zrychlený. Také roztočení setrvačníku nebo brusného kotouče okolo pevné osy může probíhat tak, že se obvodová rychlost rovnoměrně zvětšuje, a při jeho brzdění se naopak může obvodová rychlost rovnoměrně zmenšovat.

Rovnoměrně zrychlené a zpomalené pohyby se řídí poměrně jednoduchými kinematickými a dynamickými zákony, které si přehledně zopakujeme a procvičíme. Všechny fyzikální děje budeme popisovat z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě. Omezíme se na pohyby, jejichž rychlosti jsou malé ve srovnání s rychlostí světla ve vakuu a při kterých tedy dostatečně přesně platí zákony klasické mechaniky. Kinematické a dynamické zákony, které odvodíme pro přímočarý pohyb hmotného bodu, můžeme použít také pro přímočarý posuvný pohyb tuhého tělesa.

1 Kinematika rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu hmotného bodu

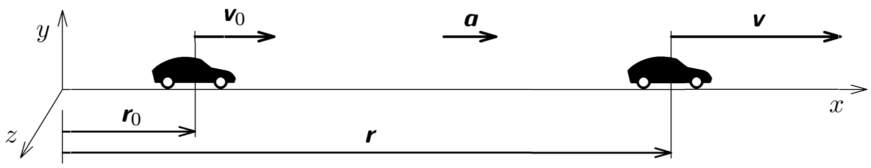
Vztažnou soustavu zvolíme tak, aby pohyb probíhal ve směru kladné poloosy x (obr. 1a, 1b). Při rovnoměrně zrychleném pohybu má vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$ v každém okamžiku stejný směr jako vektor okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$, kdežto při pohybu rovnoměrně zpomaleném je vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$ namířen proti směru okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$. V obou případech můžeme však zákon rychlosti zapsat ve stejném vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}t\,, \qquad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0}{t}\,. \tag{1}$$

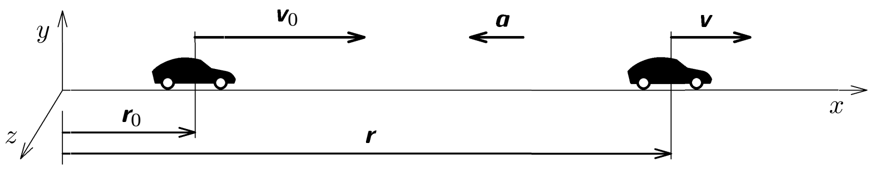
Pro x–ovou souřadnici okamžité rychlosti platí

$$v_x = v_{x0} + a_x t\,, \quad \text{kde} \begin{cases} a_x = |\boldsymbol{a}| = a > 0 & \text{při pohybu zrychleném,} \\ a_x = -|\boldsymbol{a}| = -a < 0 & \text{při pohybu zpomaleném.} \end{cases} \tag{2}$$

Zbývající souřadnice v_y, v_z jsou nulové.



Obr. 1a



Obr. 1b

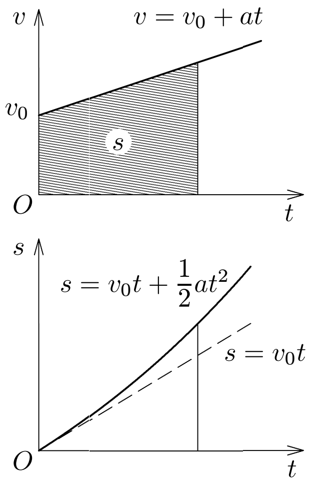
Při řešení fyzikálních úloh používáme zákon rychlosti častěji jako vztah mezi velikostmi vektorů

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at\,, \quad a = \frac{v - v_0}{t} \quad \text{pro pohyb zrychlený,} \\ v &= v_0 - at\,, \quad a = \frac{v_0 - v}{t} \quad \text{pro pohyb zpomalený.} \end{aligned} \tag{3}$$

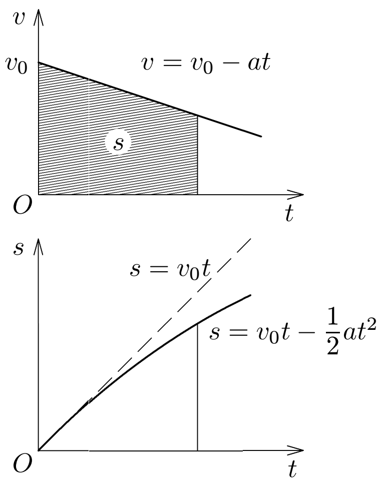
Dráhu, kterou hmotný bod urazí od počátečního okamžiku ($t = 0$) za dobu t, určíme jako obsah lichoběžníku omezeného grafem rychlosti (obr. 2a, 2b).

$$s = \frac{(v_0 + v)t}{2} = \begin{cases} = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 & \text{pro pohyb zrychlený,} \\ \\ = v_0 t - \dfrac{1}{2}at^2 & \text{pro pohyb zpomalený.} \end{cases} \tag{4}$$

Postupný růst resp. pokles rychlosti způsobují zakřivení grafu dráhy, který je obloukem paraboly. V některých úlohách musíme přihlédnout k počáteční dráze s_0.



Obr. 2a



Obr. 2b

Závislost polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ na čase vyjadřuje u obou typů pohybu stejný vektorový vztah

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 \,. \tag{5}$$

Pro x–ovou souřadnici polohového vektoru tedy platí

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \,, \quad \text{kde} \begin{cases} a_x = |\boldsymbol{a}| = a > 0 & \text{při p. zrychleném,} \\ a_x = -|\boldsymbol{a}| = -a < 0 & \text{při p. zpomaleném.} \end{cases} \tag{6}$$

Zbývající souřadnice $y,\ z$ jsou nulové.

V nejjednodušším případě má rovnoměrně zrychlený pohyb nulovou počáteční rychlost a počáteční dráhu ($v_0 = 0,\ s_0 = 0$). Kinematické zákony pak mají tvar

$$v = at \,, \qquad s = \frac{vt}{2} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a} \tag{7}$$

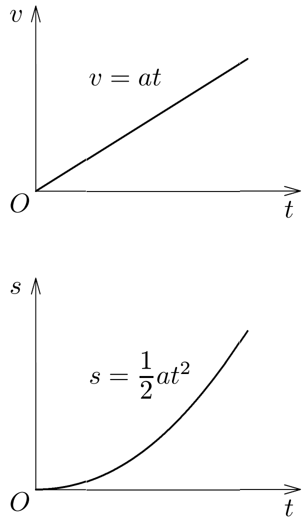
a grafy rychlosti a dráhy vyhlížejí podle obr. 3.

Trvá-li rovnoměrně zpomalený pohyb až do zastavení, můžeme zavést veličiny *brzdná doba* t_b a *brzdná dráha* s_b. V čase $t = t_b$ platí $v = 0$. Z toho plyne

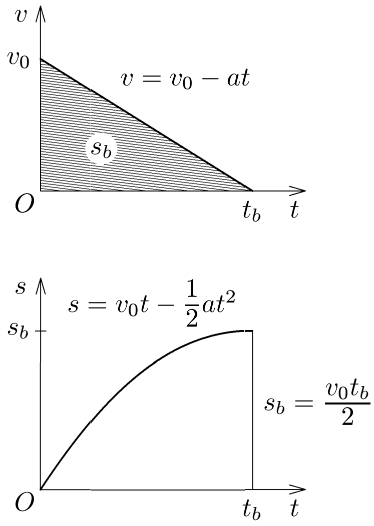
$$0 = v_0 - at_b\,, \quad t_b = \frac{v_0}{a}\,, \quad v_0 = at_b\,. \tag{8}$$

Brzdnou dráhu určíme z grafu rychlosti na obr. 4. Platí

$$s_b = \frac{v_0 t}{2} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2a}\,. \tag{9}$$



Obr. 3



Obr. 4

Mezi vztahy (7) pro rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí a vztahy (8) a (9) pro pohyb rovnoměrně zpomalený je přes jejich formální podobnost značný významový rozdíl. Vztahy (7) jsou kinematické zákony vyjadřující velikost rychlosti v a dráhu s rovnoměrně zrychleného pohybu jako funkce času a platí pro každé $t > 0$. Vztahy (8) a (9) platí při rovnoměrně zpomaleném pohybu *pouze* pro brzdnou dobu a brzdnou dráhu. Závislost velikosti rychlosti v a dráhy s na čase t zde vyjadřují kinematické zákony

$$v = v_0 - at\,, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2\,. \tag{10}$$

Úlohy

1. Ocelová kulička byla při volném pádu osvětlena stroboskopem, jehož záblesky měly frekvenci 50 Hz. Dvě po sobě jdoucí polohy kuličky jsou od sebe vzdáleny 15 cm. Jakou rychlost měla kulička na začátku a na konci tohoto úseku trajektorie?

2. Automobil se rozjížděl s konstantním zrychlením a během 12 s dosáhl rychlosti 90 km/h. Od tohoto okamžiku se pohyboval rovnoměrně. Za jak dlouho projel místem vzdáleným 400 m od místa startu?

3. Vlak metra projede vzdálenost 2,0 km mezi dvěma stanicemi za 3 min 10 s. a dosáhne největší rychlosti 60 km/h. Při rozjíždění se pohybuje rovnoměrně zrychleně, při zastavení rovnoměrně zpomaleně se zrychlením téže velikosti. Ve střední části je pohyb rovnoměrný. Určete další údaje o pohybu a nakreslete grafy rychlosti a dráhy jako funkce času.

2 Dynamika a energetická bilance rovnoměrně zrychleného a rovnoměrně zpomaleného přímočarého pohybu hmotného bodu

Koná-li hmotný bod rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb, jeho zrychlení $\boldsymbol{a}$ je konstantní a má směr okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$. Podle *2. pohybového zákona* je i výslednice $\boldsymbol{F}_v = m\boldsymbol{a}$ všech sil, které na hmotný bod působí, konstantní a má rovněž směr okamžité rychlosti.

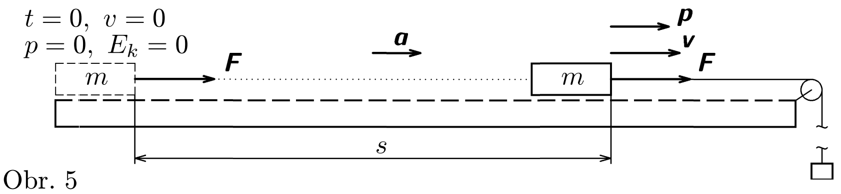
Uvažujme nejprve o pohybu vozíku pokusné vodorovné vzduchové dráhy, který se pohybuje prakticky bez tření a odporu vzduchu a je tažen lankem konstantní silou $\boldsymbol{F}$ (obr. 5). Ostatní síly působící na vozík – tíhová síla a reakce vzduchového polštáře – se ve svém účinku ruší. Síla lanka je tedy výslednicí všech sil, které na vozík působí. V čase $t = 0$ je vozík uvolněn a začne se pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem. Jeho hybnost $\boldsymbol{p}$ a kinetická energie E_k se postupně zvětšují. Platí tyto základní vztahy:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\,, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}t = m\boldsymbol{a}t = m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}\,, \qquad I = Ft = mv\,, \tag{12}$$

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2 = E_k\,. \tag{13}$$

Uvedeme-li hmotný bod z klidu do pohybu působením stálé síly $\boldsymbol{F}$, je impuls síly $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}t$ roven hybnosti hmotného bodu $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ a práce $W = Fs$ je rovna jeho kinetické energii $E_k = mv^2/2$.

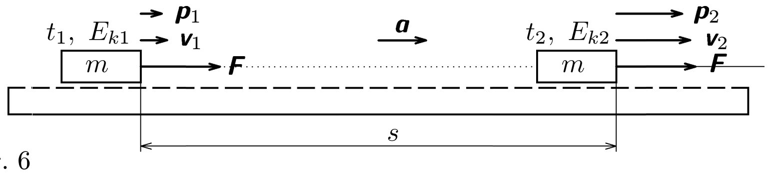


Obr. 5

K obecnějším závěrům dojdeme, porovnáme-li hybnosti a kinetické energie vozíku ve dvou různých časech $t_2 > t_1 > 0$ (obr. 6). Platí:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t = m\boldsymbol{a}\Delta t = m\boldsymbol{a}t_2 - m\boldsymbol{a}t_1 = m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1 = \Delta\boldsymbol{p}\,, \tag{14}$$

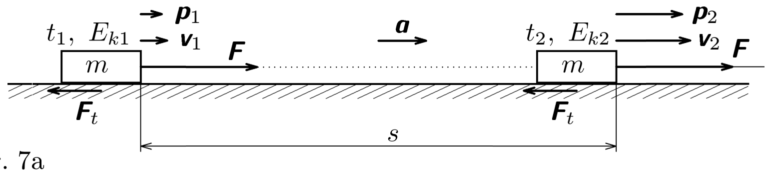
$$W = Fs = mas = m \cdot \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} \cdot \frac{(v_2 + v_1)\Delta t}{2} = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k\,. \tag{15}$$



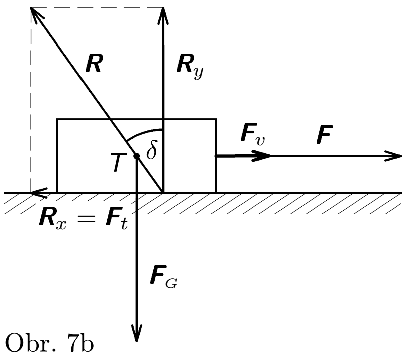
Obr. 6

Došli jsme k výsledkům, které mají obecnou platnost: **Impuls výsledné síly působící na hmotný bod je roven změně jeho hybnosti. Práce vykonaná výslednou silou působící na hmotný bod je rovna změně jeho kinetické energie.**

Při popisu reálných pohybů musíme často přihlédnout i ke tření, odporu vzduchu apod. Na obr. 7a je znázorněna bedna o hmotnosti m tažená vodorovným lanem silou $\boldsymbol{F}$ po vodorovné podlaze. Součinitel smykového tření mezi bednou a podlahou je f.



Obr. 7a



Obr. 7b

Přehled všech sil, které působí na bednu, poskytuje obr. 7b. Kromě síly lana $\boldsymbol{F}$ a tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ je to reakce podlahy $\boldsymbol{R}$. Její svislá složka $\boldsymbol{R}_y$ ruší účinek tíhové síly. Platí tedy $R_y = F_G = mg$. Vodorovná složka $\boldsymbol{R}_x$ se uplatňuje jako síla tření $\boldsymbol{F}_t$ o velikosti $R_x = F_t = fmg$. Odchylku δ reakce podlahy od svislého směru určíme ze vztahu

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{R_x}{R_y} = f\,.$$

Předpokládejme, že $F > F_t$. Výsledná síla $\boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t$ má velikost $F_v = F - F_t$. V takovém případě se bedna pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením

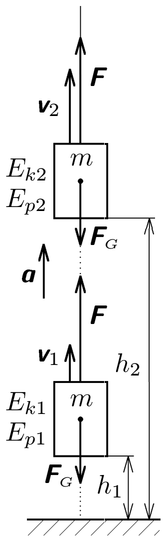
$$a = \frac{F_v}{m} = \frac{F - F_t}{m} = \frac{F}{m} - gf\,. \qquad (16)$$

V časovém intervalu $(t_1,\ t_2)$ se velikost rychlosti bedny zvětší z v_1 na v_2 a bedna se posune po dráze s. Proveďme energetickou bilanci: Práce výsledné síly W_v je rovna rozdílu práce W *vykonané vnější silou* $\boldsymbol{F}$ a práce *spotřebované silou tření* $\boldsymbol{F}_t$.

$$W_v = F_v s = (F - F_t)s = W - W_t = \Delta E_k$$

Smýkáním styčných ploch po sobě nastává *disipace* (rozptýlení) mechanické energie v množství, které odpovídá práci W_t. Dochází k rozkmitání molekul bedny a podlahy a tím ke zvýšení jejich vnitřní energie U, které se projeví zvýšením teploty. Práce W vykonaná vnější silou se tedy částečně spotřebuje na zvýšení vnitřní energie soustavy o $\Delta U = W_t = mgfs$ a jen zbývající část zvýší kinetickou energii bedny.

$$W = Fs = \Delta E_k + W_t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgfs\,. \qquad (17)$$



Obr. 8

Z čistě mechanického hlediska se na práci W_t díváme jako na energetickou ztrátu, neboť vnitřní energii nemůžeme bezprostředně přeměnit zpět na energii mechanickou. Tření, odpor prostředí a podobné síly označujeme jako **síly disipativní**. Podobná situace jako v předcházejícím případě nastává i při rozjíždění kabiny výtahu směrem vzhůru (obr. 8). Předpokládejme, že pohyb probíhá bez tření. Výsledná síla, která je vektorovým součtem tažné síly lana $\boldsymbol{F}$ a síly tíhové $\boldsymbol{F}_G$, má velikost $F_v = F - mg$ a kabině udělí zrychlení o velikosti

$$a = \frac{F_v}{m} = \frac{F - F_G}{m} = \frac{F}{m} - g\,. \qquad (18)$$

Pro časový interval $(t_1,\ t_2)$, ve kterém se velikost rychlosti kabiny zvětší z v_1 na v_2 a kabina vystoupí z výšky h_1 do výšky h_2, dostaneme energetickou bilanci:

$$W_v = F_v s = (F - F_G)(h_2 - h_1) = W - W_G = W - \Delta E_p = \Delta E_k$$

$$W = Fs = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) + mg(h_2 - h_1)\,. \qquad (19)$$

Práce W vykonaná tažnou silou lana je rovna součtu přírůstku kinetické energie kabiny ΔE_k a práce W_G spotřebované tíhovou silou F_G. Práce spotřebovaná tíhovou silou je však rovna přírůstku tíhové potenciální energie kabiny ΔE_p.

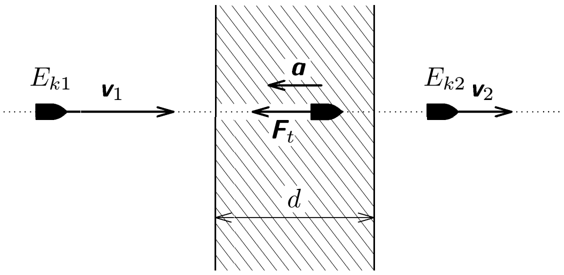
Práce vykonaná tažnou silou lana se tedy celá spotřebuje na zvětšení mechanické energie kabiny.

Při pohybu kabiny dolů by se její potenciální energie tíhová naopak zmenšila o hodnotu rovnou práci vykonané tíhovou silou. Takovéto síly, jimiž vykonaná práce je rovna úbytku potenciální energie a jimiž spotřebovaná práce je naopak rovna přírůstku potenciální energie, nazýváme **síly konzervativní**. (Mezi konzervativní síly patří například i síly elastické působící při pružné deformaci těles a síly elektrostatické.)

Pokud při nějakém ději *v izolované soustavě těles* konají práci jen síly konzervativní, platí zde **zákon zachování celkové mechanické energie**. Z rovnoměrně zrychlených a rovnoměrně zpomalených pohybů jsou to volný pád a svislý vrh vzhůru ve vakuu, klouzání tělesa po nakloněné rovině při zanedbatelném tření a řada dalších.

V izolované soustavě, kde působí disipativní síly, je práce spotřebovaná těmito silami rovna úbytku mechanické energie soustavy. Jako příklad můžeme uvést průlet střely trámem (obr. 9). Práce W_t spotřebovaná silou tření při pohybu střely dřevem je rovna rozdílu kinetické energie E_{k1} střely před trámem a kinetické energie E_{k2} střely za trámem. Známe-li hmotnost střely m, tloušťku trámu d a rychlosti v_1, v_2 střely před trámem a za trámem, můžeme vypočítat velikost síly F_t, která střelu brzdila:

$$W_t = F_t d = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} m \left(v_1^2 - v_2^2\right) , \qquad F_t = \frac{m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2d} . \tag{20}$$



Obr. 9

Ke stejnému výsledku můžeme ovšem dojít i přes druhý pohybový zákon, aniž bychom uvažovali o práci a energii. Pohyb střely v trámu považujeme za rovnoměrně zpomalený; dobu průletu označme t. Platí:

$$d = \frac{v_1 + v_2}{2} t\,, \quad t = \frac{2d}{v_1 + v_2}\,,$$

$$a = \frac{v_1 - v_2}{t} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2d}\,, \quad F_t = ma = \frac{m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2d}\,. \tag{21}$$

Za zmínku stojí i možnost využití vztahu mezi impulsem síly a změnou hybnosti. V našem případě platí:

$$\boldsymbol{F}_t t = \Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_1\,, \qquad F_t t = p_1 - p_2 = mv_1 - mv_2\,, \tag{22}$$

$$F_t = \frac{m(v_1 - v_2)}{t} = \frac{m\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2d}\,.$$

Vidíme tedy, že několika různými způsoby můžeme získat stejný výsledek.

Úlohy

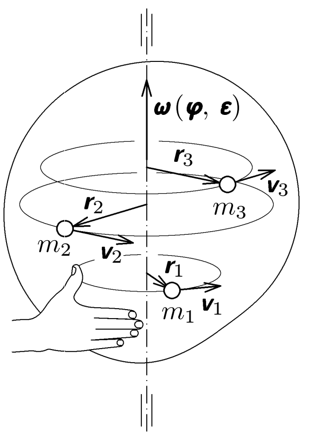
4. Vozík o hmotnosti 400 g je tažen po vzduchové dráze závažím o hmotnosti 20 g zavěšeným přes kladku (obr. 5). S jakým zrychlením se pohybuje? Jakou silou je napnuto vlákno? Hmotnost kladky, tření a odpor vzduchu zanedbáváme.

5. Jakou sílu musí vyvinout motor automobilu o hmotnosti 1100 kg, má-li se jeho rychlost na dráze 150 m zvětšit z 60 km/h na 90 km/h? Za jak dlouho tuto vzdálenost projede? Odporová síla působící proti pohybu má velikost 400N.

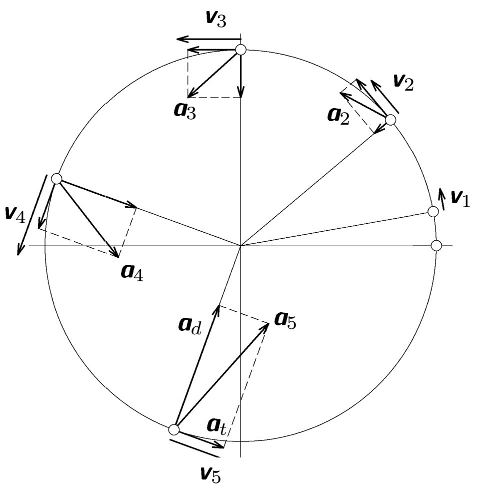
6. Automobil o hmotnosti 1200 kg jedoucí rychlostí 100 km/h musel zastavit na dráze 130 m. Jakou brzdnou sílu musel vyvinout? Jakou rychlostí se pohyboval ve vzdálenosti 10 m před místem zastavení? Odpor vzduchu zanedbáváme.

3 Rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb tuhého tělesa okolo pevné osy

Tuhé těleso, které koná otáčivý pohyb okolo pevné osy, si můžeme představit jako soustavu pevně spojených hmotných bodů, které se pohybují v rovinách kolmých k ose otáčení po kružnicových trajektoriích se středy na ose otáčení. Každému hmotnému bodu přísluší *průvodič* $\boldsymbol{r}$ s počátkem ve středu trajektorie (obr. 10).



Obr. 10



Obr. 11

Při rovnoměrně zrychleném otáčivém pohybu, který začíná z klidu, platí pro velikost okamžité rychlosti a pro dráhu zvoleného hmotného bodu kinematické zákony

$$v = a_t t\,, \qquad s = \frac{vt}{2} = \frac{1}{2}a_t t^2 = \frac{v^2}{2a_t}\,, \tag{23}$$

kde a_t je velikost **tečného zrychlení**. Celkové zrychlení hmotného bodu určíme jako vektorový součet zrychlení tečného a zrychlení dostředivého, jehož velikost $a_d = \omega^2 r$ se během pohybu zvětšuje (obr. 11).

Dráha, velikost rychlosti a velikost zrychlení hmotného bodu jsou při otáčivém pohybu přímo úměrné velikosti jeho průvodiče. Proto častěji používáme

úhlové veličiny: úhlovou dráhu $\boldsymbol{\varphi}$, úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$ a úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$, které jsou společné pro celé těleso. Jsou to vektorové veličiny, které umisťujeme do osy otáčení a jejich orientaci určujeme (podobně jako u momentu síly) podle pravidla pravé ruky. (Prsty kromě palce otočíme podle orientace obvodové veličiny, palec ukazuje směr úhlové veličiny.) Oba druhy veličin jsou vázány vztahy:

$$\varphi = \frac{s}{r}\,, \qquad \omega = \frac{v}{r}\,, \qquad \varepsilon = \frac{a_t}{r}\,. \tag{24}$$

Při rovnoměrně zrychleném otáčivém pohybu, který začíná z klidu, platí pro úhlové veličiny obdobné kinematické zákony jako pro veličiny obvodové:

$$\omega = \varepsilon t\,, \qquad \varphi = \frac{\omega t}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 = \frac{\omega^2}{2\varepsilon}\,. \tag{25}$$

Také při rovnoměrně zrychlených otáčivých pohybech s nenulovou počáteční úhlovou rychlostí a při rovnoměrně zpomalených otáčivých pohybech můžeme vycházet ze vztahů, které platí při analogických pohybech přímočarých, a doplnit je obdobnými vztahy mezi úhlovými veličinami.

Kinetickou energii rotujícího tělesa určíme jako součet kinetických energií jednotlivých hmotných bodů:

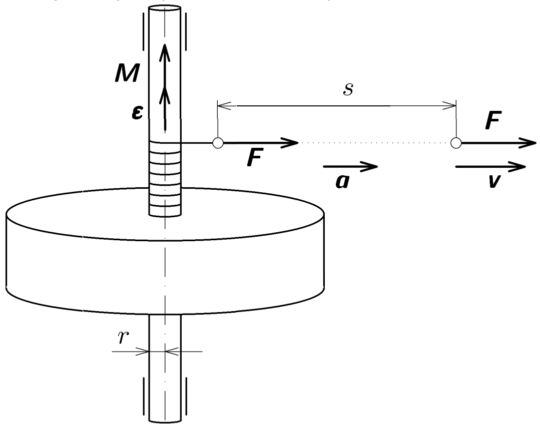
$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2\,, \tag{26}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa, který závisí na hmotnosti tělesa a na jeho tvaru. Při řešení fyzikálních úloh obvykle potřebujeme znát moment setrvačnosti J_0 vzhledem k ose procházející těžištěm. Nejčastěji používáme vztahy:

$$\text{prstenec} \ \ldots \ J_0 = mR^2\,, \quad \text{plný válec} \ \ldots \ J_0 = \frac{1}{2}mR^2\,,$$

$$\text{koule} \ \ldots \ J_0 = \frac{2}{5}mR^2\,. \tag{27}$$

Základní dynamický zákon otáčivého pohybu tuhého těleso okolo pevné osy odvodíme z rovnosti práce potřebné k roztočení tělesa a jeho kinetické energie. (Tření v ložiskách, odpor vzduchu a podobné síly zanedbáváme.) Na obr. 12 je znázorněno roztáčení setrvačníku o momentu setrvačnosti J pomocí motouzu taženého konstantní silou $\boldsymbol{F}$. Předpokládáme, že rameno síly r a tedy i moment $\boldsymbol{M}$ je konstantní. V takovém případě se působiště síly $\boldsymbol{F}$ pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem a za dobu t proběhne dráhu s a získá rychlost o velikosti v, která je stejná jako velikost rychlosti otáčivého pohybu ve vzdálenosti r od osy.



Obr. 12

Setrvačník se roztáčí s úhlovým zrychlením $\boldsymbol{\varepsilon}$ a za dobu t dosáhne úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$. Platí:

$$W = Fs = F\frac{1}{2}a_t t^2 = \frac{1}{2}Fr\varepsilon t^2 = E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\varepsilon^2 t^2\,, \tag{28}$$

$$M = Fr = J\varepsilon\,, \qquad \boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\varepsilon}\,. \tag{29}$$

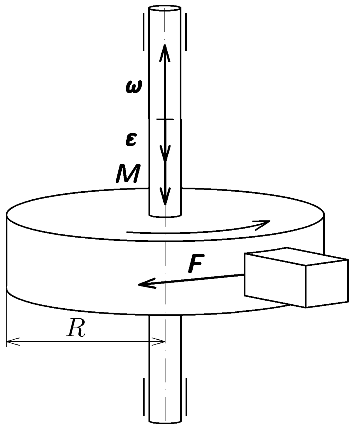
Pohybový zákon otáčivého pohybu okolo pevné osy je zřejmě analogický k pohybovému zákonu posuvného pohybu ve tvaru $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$.

V úlohách o otáčivém pohybu můžeme často výhodně využít také veličinu *moment hybnosti* $\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$. Pohybový zákon otáčivého pohybu vyjádříme ve tvaru $\boldsymbol{M} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{L}}{\Delta t}$, který je obdobou zákona $\boldsymbol{F} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t}$ pro pohyb posuvný.

Budeme-li rotující těleso brzdit konstantním momentem síly, jehož vektor $\boldsymbol{M}$ má opačný směr než vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$, bude se jednat o pohyb rovnoměrně zpomalený (obr. 13). Známe-li moment setrvačnosti J, velikost brzdícího momentu M a počáteční frekvenci otáčení f_0, můžeme určit brzdnou dobu t_b a brzdnou úhlovou dráhu φ_b. Použijeme analogické vztahy jako při rovnoměrně zpomaleném přímočarém pohybu hmotného bodu:

$$t_b = \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{2\pi f_0}{\varepsilon}\,, \qquad \varphi_b = \frac{\omega_0 t_b}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon t_b^2 = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}\,, \tag{30}$$

$$\varepsilon = \frac{M}{J}\,, \qquad t_b = \frac{J\omega_0}{M}\,, \qquad \varphi_b = \frac{J\omega_0^2}{2M}\,. \tag{31}$$



Obr. 13

Při řešení úlohy jsme ovšem mohli také vycházet z rovnosti mezi prací spotřebovanou brzdící silou a počáteční kinetickou energií tělesa a z rovnosti mezi počátečním momentem hybnosti a impulsem momentu brzdící síly:

$$Fs = FR\varphi_b = M\varphi_b = E_{k0} = \frac{1}{2}J\omega_0^2\,, \qquad Mt_b = L_0 = J\omega_0\,. \tag{32}$$

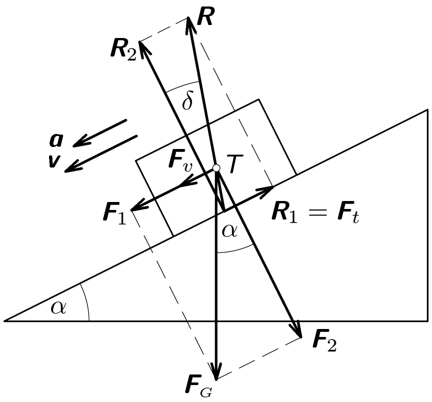
Úlohy

7. Kapesník je schumlán v bubnu ždímačky, která rotuje s frekvencí 1400 ot/min. Průměr bubnu je 310 mm. Při otevření se motor vypne a ždímačka se působením brzdy zastaví během 2,3 s. Určete velikosti obvodové a úhlové rychlosti a dostředivého zrychlení kapesníku před vypnutím motoru a jeho tečného a úhlového zrychlení během brzdění bubnu. Po kolika otáčkách se buben zastaví?

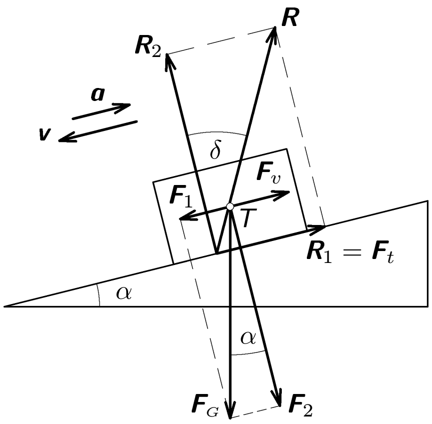
8. Setrvačník o momentu setrvačnosti $J = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ roztočíme pomocí motouzu navinutého na hřídeli o poloměru $r = 5{,}0$ mm (obr. 12). Budeme působit silou o velikosti $F = 50$ N po dráze $s = 80$ cm. S jakou frekvencí se bude setrvačník otáčet? Jak dlouho bude roztáčení trvat? Tření zanedbáváme.

4 Klouzavý pohyb tuhého tělesa po nakloněné rovině

Na kvádr, který klouže dolů po nakloněné rovině se sklonem α, působí dvě síly: tíhová síla a reakce nakloněné roviny (obr. 14a, b). Tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ se rozkládá na *pohybovou složku* $\boldsymbol{F}_1$ o velikosti $F_1 = mg\sin\alpha$ a *tlakovou složku* $\boldsymbol{F}_2$ o velikosti $F_2 = mg\cos\alpha$. Také reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}$ má složku $\boldsymbol{R}_1$ rovnoběžnou s nakloněnou rovinou a složku $\boldsymbol{R}_2$ kolmou k nakloněné rovině. Složka $\boldsymbol{R}_2$ kompenzuje tlakovou složku tíhové síly, platí proto $R_2 = F_2$. Složka $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{F}_t$ je síla tření o velikosti $F_t = fF_2 = fmg\cos\alpha$, kde f je součinitel smykového tření mezi kvádrem a nakloněnou rovinou. Reakce $\boldsymbol{R}$ je od kolmice k nakloněné rovině odchýlena o úhel δ, pro který platí $\mathrm{tg}\,\delta = \frac{R_1}{R_2} = f$.



Obr. 14a



Obr. 14b

Výsledná síla $\boldsymbol{F}_v$ je vektorovým součtem pohybové složky tíhové síly a síly tření $\boldsymbol{F}_v = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_t$, neboť složky $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{R}_2$ se ve svém účinku ruší. V závislosti na sklonu nakloněné roviny a velikosti součinitele smykového tření mohou nastat tři případy:

a) $F_1 > F_t$ (obr.14a). Tato situace nastane, jestliže

$$mg\sin\alpha > fmg\cos\alpha\,, \qquad f < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha\,, \qquad \delta < \alpha\,.$$

Pohyb je rovnoměrně zrychlený se zrychlením

$$a = \frac{F_1 - F_t}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,. \tag{33}$$

V případě, že tření je zanedbatelné, platí $a = g\sin\alpha$.

b) $F_1 = F_t$. V tomto případě $F_v = 0$ a pohyb kvádru je rovnoměrný. Úhel α splňuje podmínku

$$mg\sin\alpha = fmg\cos\alpha\,, \qquad f = \mathrm{tg}\,\alpha\,, \qquad \delta = \alpha\,.$$

c) $F_1 < F_t$ (obr. 14b). Síla tření převládne nad pohybovou složkou tíhové síly, jestliže

$$mg\sin\alpha < fmg\cos\alpha\,, \qquad f > \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha\,, \qquad \delta > \alpha\,.$$

Pohyb je rovnoměrně zpomalený. (Kvádr ovšem musel být nejprve působením vnější síly uveden do pohybu.) Zrychlení je orientováno proti směru okamžité rychlosti a má velikost

$$a = \frac{F_t - F_1}{m} = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)\,. \tag{34}$$

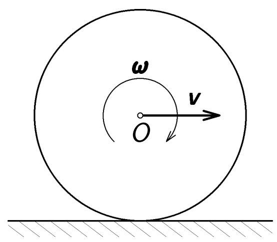
Úlohy

9. Lyžař sjel po svahu dlouhém 35 m se sklonem 20° na vodorovnou rovinu a zastavil se ve vzdálenosti 70 m. Součinitel smykového tření mezi lyžemi a sněhem byl během celého pohybu konstantní. Určete jeho velikost a rychlost lyžaře na konci svahu. Jak dlouho celý pohyb trval? Odpor vzduchu zanedbáváme.

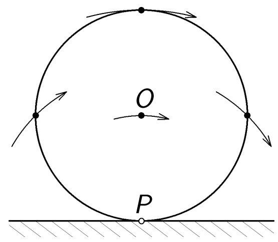
10. Špalík položený na dolní konec nakloněné roviny se sklonem $\alpha = 22°$ byl úderem uveden do klouzavého rovnoměrně zpomaleného pohybu směrem vzhůru po nakloněné rovině. Po zastavení se vrátil zpět na dolní konec nakloněné roviny za dobu 2,5-krát delší než byla doba výstupu. Určete součinitel smykového tření.

5 Valivý pohyb rotačního tuhého tělesa po nakloněné rovině

Valivý pohyb rotačního tělesa po rovině můžeme považovat za pohyb složený z otáčivého pohybu okolo osy O procházející těžištěm a posuvného pohybu této osy podél nakloněné roviny (obr. 15).



Obr. 15

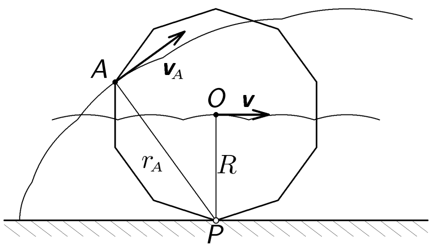


Obr. 16

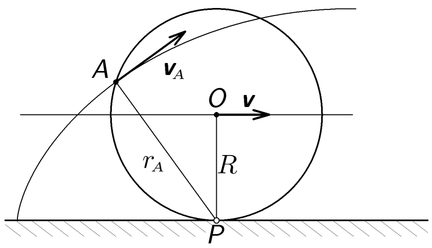
Velikost rychlosti posuvného pohybu v, velikost úhlové rychlosti otáčivého pohybu ω a poloměr tělesa R splňují vztah $v = \omega R$. Kinetickou energii valícího se tělesa určíme jako součet kinetické energie posuvného pohybu a kinetické energie otáčivého pohybu:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\left(mR^2 + J_0\right)\omega^2\,, \tag{35}$$

kde J_0 je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm.



Obr. 17a



Obr. 17b

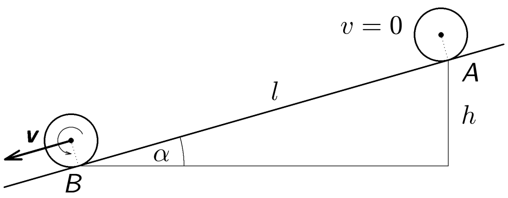
Tentýž pohyb si však můžeme také nahradit velkým počtem malých pootočení okolo okamžitých os P procházejících bodem dotyku tělesa s rovinou a rovnoběžných s osou O (obr. 16). Na obr. 17a, 17b jsou znázorněny valivé pohyby pravidelného n-bokého hranolu pro $n_1 = 10$, $n_2 = 100$. Jednotlivé hrany se postupně stávají okamžitými osami otáčení. Vidíme, že pro $n = 100$ se pohyb prakticky neliší od valivého pohybu válce. Pro okamžitou úhlovou rychlost otáčení okolo okamžité osy P opět platí vztah $v = \omega R$ a kinetickou energii tělesa můžeme vyjádřit jako

$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2 \,, \tag{36}$$

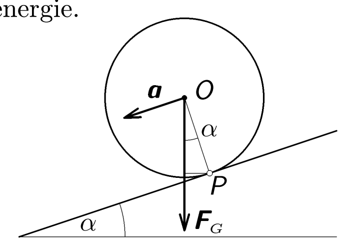
kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k okamžité ose P. Porovnáním (35) a (36) dostáváme vztah mezi momenty setrvačnosti J_0 a J, který se nazývá **Steinerova věta**:

$$J = J_0 + mR^2 \,. \tag{37}$$

Valivý pohyb tuhého rotačního tělesa po nakloněné rovině probíhá při malých rychlostech, kdy můžeme zanedbat odpor vzduchu, jako pohyb rovnoměrně zrychlený. Součinitel smykového tření mezi tělesem a rovinou je obvykle dostatečně velký a pohyb probíhá bez klouzání. Je-li rovina dostatečně tuhá a působením tíhy tělesa se nedeformuje, můžeme zanedbat i valivý odpor a v takovém případě platí zákon zachování mechanické energie.



Obr. 18



Obr. 19

Na obr. 18 je znázorněn valivý pohyb po nakloněné rovině se sklonem α, který začíná z klidu v bodě A. Po proběhnutí dráhy l má těleso v bodě B kinetickou energii, která je rovna úbytku energie potenciální:

$$E_k = \frac{1}{2}\left(J_0 + mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{R^2} + m\right)v^2 = mgh = mgl\sin\alpha \,. \tag{38}$$

Z toho určíme velikost rychlosti tělesa v bodě B a velikost zrychlení valivého pohybu:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{J_0}{mR^2}+1}} = \begin{cases} \sqrt{gh} & \text{pro prstenec,} \\ \sqrt{\frac{4gh}{3}} & \text{pro válec,} \\ \sqrt{\frac{10gh}{7}} & \text{pro kouli,} \end{cases} \tag{39}$$

$$a = \frac{v^2}{2l} = \frac{2gh}{2l\left(\frac{J_0}{mR^2}+1\right)} = \frac{g\sin\alpha}{\frac{J_0}{mR^2}+1} \begin{cases} \frac{g\sin\alpha}{2} & \text{pro prstenec,} \\ \frac{2g\sin\alpha}{3} & \text{pro válec,} \\ \frac{5g\sin\alpha}{7} & \text{pro kouli.} \end{cases} \tag{40}$$

Vztah pro výpočet velikosti zrychlení můžeme snadno odvodit pomocí pohybového zákona otáčivého pohybu a Steinerovy věty (obr. 19). Moment $\boldsymbol{M}$ tíhové síly vzhledem k okamžité ose P uděluje tělesu úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$ o velikosti

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{M}{J} = \frac{mgR\sin\alpha}{J_0 + mR^2}, \qquad a = \frac{g\sin\alpha}{\frac{J_0}{mR^2}+1}. \tag{41}$$

Úlohy

11. Válec a kouli současně uvolníme na horním konci nakloněné roviny délky l a výšky h. Které těleso dorazí dříve na konec roviny? Kde se ve stejném okamžiku bude nacházet druhé těleso?

12. Valící se koule, která přešla z vodorovné roviny na nakloněnou rovinu, se zastavila ve vzdálenosti 2,55 m od dolního konce roviny a vrátila se zpět. Celý pohyb po nakloněné rovině trval 7,5 s. Určete počáteční rychlost koule a sklon nakloněné roviny. Valivý odpor zanedbáváme.

Řešení úloh

1. $s = 0{,}15$ m, $T = 0{,}020$ s; $v_0 = ?$ $v_1 = ?$

$$v_1 - v_0 = gT\,, \qquad s = \frac{(v_0 + v_1)T}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 + v_1 = \frac{2s}{T}\,.$$

Řešením této soustavy rovnic dostaneme:

$$v_0 = \frac{s}{T} - \frac{gT}{2} \doteq 7{,}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,, \qquad v_1 = \frac{s}{T} + \frac{gT}{2} \doteq 7{,}6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}\,.$$

2. $v = 90$ km/h $= 25$ m·s^{-1}, $t_1 = 12$ s, $s = 400$ m; $t = ?$

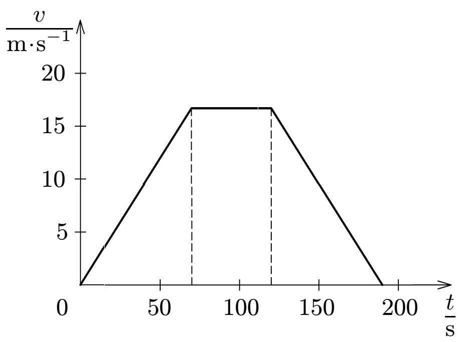
$$t = t_1 + \frac{s - s_1}{v} = t_1 + \frac{s - \frac{vt_1}{2}}{v} = \frac{s}{v} + \frac{t_1}{2} = 22 \text{ s}\,.$$

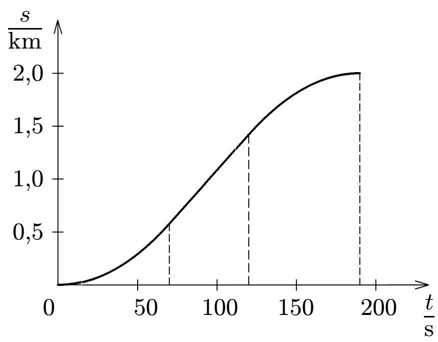
3. $s = 2000$ m, $v = 16{,}7$ m·s^{-1}, $t = 190$ s; $s_1, \mathrm{s}_2,\ s_3, t_1,\ t_2,\ t_3,\ a_1,\ a_3, = ?$

$$a_1 = \frac{v}{t_1} = a_3 = \frac{v}{t_3} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_3\,; \qquad s = \frac{vt_1}{2} + vt_2 + \frac{vt_3}{2} = v(t_1 + t_2)\,;$$

$$t_1 + t_2 = t - t_3 = \frac{s}{v} = 120 \text{ s}\,, \quad t_3 = t_1 = 70 \text{ s}\,, \quad t_2 = 50 \text{ s}\,,$$

$$s_2 = 840 \text{ m}\,, \quad s_1 = s_3 = 580 \text{ m}\,, \quad a_1 = a_3 = 0{,}24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\,.$$





4. $M = 0{,}400$ kg, $m = 0{,}020$ kg, $g = 9{,}8$ m·s^{-2}; $a = ?$ $F = ?$

$$F = Ma\,, \qquad F_G - F = mg - F = ma\,;$$

$$a = g\frac{m}{M+m} = 0{,}47\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,, \qquad F = Ma = mg\frac{M}{M+m} = 0{,}19\ \mathrm{N}\,.$$

5. $m = 1100$ kg, $s = 150$ m, $v_1 = 16{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_2 = 25\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $F_o = 400$ N;
$F = ?\ t = ?$
Práce vykonaná motorem automobilu je rovna součtu přírůstku kinetické energie a práce spotřebované odporovou silou.

$$s = \frac{v_1+v_2}{2}t\,, \qquad t = \frac{2s}{v_1+v_2} = 7{,}2\ \mathrm{s}\,, \qquad Fs = F_o s + \frac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right)\,,$$

$$F = F_o + \frac{m\left(v_2^2 - v_1^2\right)}{2s} = 400\ \mathrm{N} + 1270\ \mathrm{N} \doteq 1700\ \mathrm{N}\,.$$

6. $v_0 = 27{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $s_b = 130$ m, $s_1 = 10$ m, $m = 1200$ kg; $F = ?\ v_1 = ?$
Počáteční kinetická energie automobilu je rovna práci spotřebované brzdnou silou:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = Fs_b \quad \Rightarrow \quad F = \frac{mv_0^2}{2s_b} = 3600\ \mathrm{N}\,,$$

$$\frac{mv_1^2}{2s_1} = \frac{mv_0^2}{2s_b} \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_0\sqrt{\frac{s_1}{s_b}} = 7{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

7. $f = 23{,}3\ \mathrm{s^{-1}}$, $r = 0{,}155$ m, $t_b = 2{,}3$ s; $v_0 = ?\ a_d = ?\ a_t = ?\ n = ?$

$$v_0 = 2\pi fr = 23\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \qquad \omega = 2\pi f = 146\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,, \qquad n = \frac{ft_b}{2} = 27\,,$$

$$a_d = 4\pi^2 f^2 r = 3300\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,, \quad a_t = \frac{v_0}{t_b} = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,, \quad \varepsilon = \frac{a_t}{r} = 65\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}\,.$$

8. $J = 2{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$, $F = 50$ N, $r = 5{,}0\cdot 10^{-3}$ m, $s = 0{,}80$ m;
$f = ?\ t = ?$
Vyjdeme z rovnosti práce vykonané silou F a kinetické energie setrvačníku:

$$Fs = \frac{1}{2}J\omega^2 = 2J\pi^2 f^2\,, \qquad f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Fs}{2J}} = 28\ \mathrm{s^{-1}}\,,$$

$$s = \varphi r = \frac{\omega t}{2}r = \pi ftr\,, \quad t = \frac{s}{\pi fr} = 1{,}8\ \mathrm{s}\,.$$

9. $s_1 = 35$ m, $s_2 = 70$ m, $\alpha = 20°$; $f = ?\ v = ?\ t = ?$
Počáteční potenciální energie lyžaře je rovna práci spotřebované silami tření během celého pohybu. Kinetická energie lyžaře na konci svahu je rovna práci spotřebované silou tření během pohybu po vodorovné rovině.

$$E_p = mgh = mgs_1\sin\alpha = W_1 + W_2 = s_1 mgf\cos\alpha + s_2 mgf\,,$$

$$f = \frac{s_1 \sin\alpha}{s_1 \cos\alpha + s_2} = 0{,}116\,;$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = mgfs_2\,, \qquad v = \sqrt{2gfs_2} = 12{,}6\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

$$s = s_1 + s_2 = \frac{vt_1}{2} + \frac{vt_2}{2} = \frac{vt}{2}\,, \qquad t = \frac{2s}{v} = 16{,}7\ \mathrm{s}\,.$$

10. $k = \dfrac{t_2}{t_1} = 2{,}5\,,\ \alpha = 22°;\ f = ?$
Klouzavý pohybu vzhůru po nakloněné rovině bude rovnoměrně zpomalený. Zrychlení bude mít velikost

$$a_1 = g(\sin\alpha + fg\cos\alpha)\,.$$

$$s = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 = \frac{1}{2}a_2 t_2^2\,, \qquad \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 = k^2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{g(sin\alpha + f\cos\alpha)}{g(\sin\alpha - g\cos\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{\operatorname{tg}\alpha - f}\,,$$

$$f = \operatorname{tg}\alpha\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = 0{,}29\,.$$

11. Vyjdeme ze vztahů (40). Koule se pohybuje s větším zrychlením, dorazí proto na konec nakloněné roviny dříve. Dráhy, které obě tělesa projedou za stejnou dobu, jsou ve stejném poměru jako zrychlení

$$\frac{s}{l} = \frac{a_v}{a_k} = \frac{14}{15}\,, \qquad s = \frac{14}{15}\,l\,.$$

12. $l = 2{,}55$ m, $t = 7{,}5$ s; $v_0 = ?$ $\alpha = ?$
Pohyb vzhůru byl rovnoměrně zpomalený, pohyb dolů byl rovnoměrně zrychlený. Obě zrychlení měla stejnou velikost.

$$l = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{5gt^2\sin\alpha}{56} = \frac{v_0 t}{4}$$

$$v_0 = \frac{4l}{t} = 1{,}36\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{56l}{5gt^2} = 0{,}052\,, \quad \alpha = 3{,}0°\,.$$