TEPLOTNÍ ZÁVISLOSTI FYZIKÁLNÍCH VELIČIN

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý

Obsah

1 Úvod. Teplotní stupnice

Změny teploty ovlivňují výrazně hodnoty většiny veličin, které popisují vlastnosti fyzikálních těles. V tomto studijním textu se zaměříme na ty teplotní závislosti, které se nejčastěji využívají v přístrojích pro měření teploty – teploměrech.

V praxi se nejčastěji vyskytují **teploměry dilatační** založené na objemové roztažnosti kapalin a na délkové roztažnosti pevných látek, **teploměry elektrické** – odporové, termočlánkové, polovodičové – a **pyrometry** ve kterých se uplatňují zákony zákony tepelného záření. Dilatační a elektrické teploměry pracují jako **teploměry dotykové**, které musíme umístit tak, aby mezi teploměrem a tělesem, jehož teplotu chceme měřit, nastala v důsledku tepelné výměny **termodynamická rovnováha**, při které má měřené těleso a teploměr stejnou teplotu. Pyrometry jsou **teploměry bezdotykové**, které zachycují a vyhodnocují určitou část záření vystupujícího z místa, jehož teplotu měříme,

Pro jednotné určování teploty bylo nutno účelně zavést **teplotní stupnici** tak, aby

a) fyzikální zákony, ve kterých se vyskytuje teplota byly vyjádřeny co nejjednodušeji,

b) teplotní měření se dalo co nejlépe realizovat.

Prvnímu požadavku nejlépe vyhovuje **termodynamická teplotní stupnice**, kterou v r. 1852 definoval *W. Thomson – lord Kelvin*. Vyšel ze vztahu pro výpočet účinnosti ideálního vratného Carnotova stroje a velikost dílků stupnice zvolil stejnou, jako u Celsiovy „stodílkové stupnice“ zavedené už v r. 1750 a dodnes běžně používané v celé Evropě. Toho dosáhl tak, že *trojnému bodu vody* (rovnovážnému stavu vody, ledu a vodní páry), kterému odpovídá Celsiova teplota 0,01 °C, přiřadil termodynamickou teplotu 273,16 K. Mezi číselnými hodnotami Celsiovy teploty t a termodynamické teploty T platí tedy jednoduchý vztah:

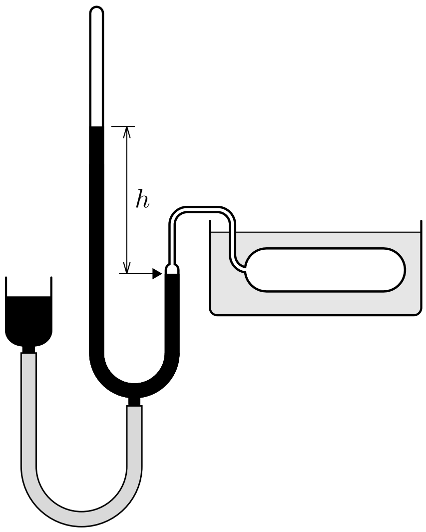
$$\{T\} = \{t\} + 273{,}15\,. \tag{1}$$

Nula termodynamické teplotní stupnice představuje dolní mez dosažitelných teplot.

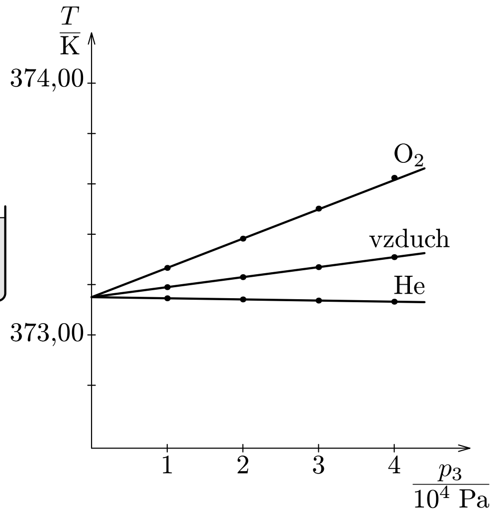
Carnotův stroj se nedá prakticky sestrojit. Proto se při realizaci termodynamické teplotní stupnice vychází z vlastností *ideálního plynu* a jako základní teploměrný přístroj se používá **plynový teploměr**, jehož zjednodušené schéma je na obr. 1.1. Nádobka vyrobená z kovu s co nejmenší tepelnou roztažností je naplněna plynem, umístěná do měřeného prostoru a připojena ke rtuťovému tlakoměru. **Tlak ideálního plynu v uzavřené nádobě stálého objemu je přímo úměrný jeho termodynamické teplotě.** Jestliže při změnách teploty měníme výšku pomocné nádobky se rtutí tak, aby rtuť stále dosahovala k ústí kapiláry zakončující nádobku s plynem, je termodynamická teplota T plynu úměrná výšce h rtuťového sloupce tlakoměru. Platí

$$\frac{p}{p_3} = \frac{h}{h_3} = \frac{T}{273{,}16\ \mathrm{K}}\,, \tag{2}$$

kde p_3 je tlak plynu při teplotě trojného bodu vody a h_3 je příslušná výška sloupce. Hodnoty naměřené pomocí skutečného plynu (vodíku, helia, aj.), kterým je teploměr naplněn, je nutno korigovat. Musí se přihlížet i k nepatrným změnám objemu nádobky s plynem.



Obr. 1.1



Obr. 1.2

Obecně platí, že při menším výchozím tlaku p_3 je měření přesnější a méně závisí na použitém plynu. Na obr. 1.2 jsou zakresleny výsledky, ke kterým dojdeme při měření teploty varu vody za normálního tlaku pomocí plynového teploměru s různými plyny a různou volbou tlaku p_3. Nezávisle na použitém plynu se naměřená hodnota při klesajícím p_3 blíží k správné hodnotě 373,16 K.

Z měření plynovým teploměrem, ve kterém je teploměrnou látkou reálný plyn můžeme tedy určit termodynamickou teplotu užitím vztahu

$$T = 273{,}16\ \mathrm{K} \cdot \lim_{p_3 \to 0} \frac{p}{p_3}\,. \tag{3}$$

Plynový teploměr se pro běžná teplotní měření nehodí. Užívá se ve speciálních laboratořích při určování základních bodů **Mezinárodní teplotní stupnice**. Ta je základem všech praktických měření teploty.

Dnes platná **Mezinárodní teplotní stupnice ITS 90** byla přijata Mezinárodním výborem pro míry a váhy v roce 1989. Je definována pomocí 14 základních a 9 pomocných bodů a řady předpisů, jak přesně měřit teplotu mezi těmito body. Podrobnější informace o této stupnici jsou uvedeny v MFCh tabulkách [11]. Stupnice ITS 90 je s dnes dosažitelnou přesností shodná s termodynamickou stupnicí a slouží k její přesné realizaci.

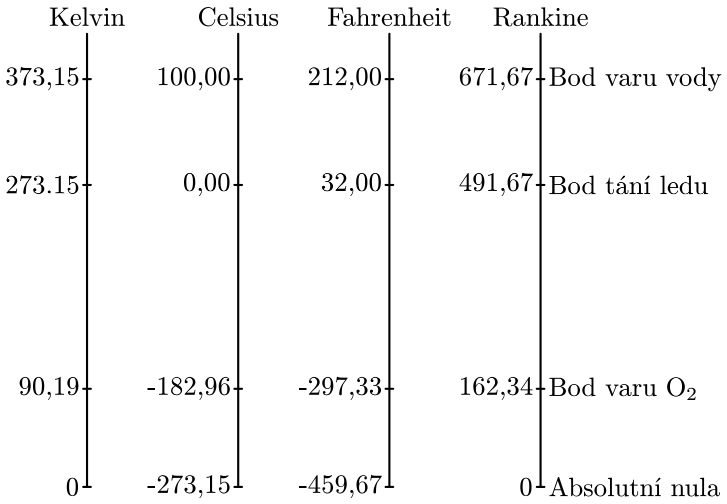
Kromě termodynamické a Celsiovy teplotní stupnice se používají, zvláště v Anglii a USA, **Fahrenheitova stupnice** a od ní odvozená **Rankinova stupnice**. *Fahrenheit* okolo r. 1720 zvolil pro své rtuťové teploměry tři základní teploty: teplotě chladicí směsi ledu a salmiaku přiřadil nulu, teplotě tání ledu přiřadil 32 stupňů a teplotě zdravého lidského těla 96 stupňů. Teplota varu vody na Fahrenheitově stupnici je 212 stupňů. se dodnes používá v Anglii a USA. Její jednotka se značí °F. Mezi Celsiovou a Fahrenheitovou teplotou platí vztahy:

$$\{t_\mathrm{F}\} = \frac{9}{5}\{t_\mathrm{C}\} + 32\,, \qquad \{t_\mathrm{C}\} = \frac{5}{9}\left(\{t_\mathrm{F}\} - 32\right)\,. \tag{4}$$

Rankinova stupnice má stejně velké dílky jako stupnice Fahrenheitova, ale začíná od absolutní nuly. Její jednotka se značí °R. Mezi termodynamickou a Rankinovou teplotou platí vztah:

$$\{T_\mathrm{R}\} = \frac{9}{5}\{T\}\,. \tag{5}$$

Přehled všech čtyřech uvedených teplotních stupnic je na obr. 1.3:



Obr. 1.3

Úlohy

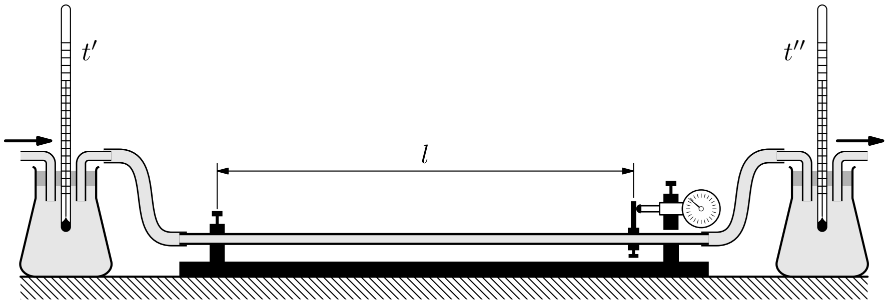
1. Kniha R. Bredburyho má název „451 °F“. O jakou teplotu ve °C se jedná?

2. Při teplotě 25,0 °C byl rtuťový sloupec plynového teploměru vysoký 210,0 mm. Jakou výšku naměříme při 100 °C?

2 Teplotní závislosti fyzikálních veličin

2.1 Teplotní roztažnost pevných látek

Teplotní délkovou roztažnost pevných látek studujeme pomocí **dilatometrů**. Jednoduché provedení takového přístroje vidíme na obr. 2.1. Trubka ze zkoumaného materiálu je na jednom konci upevněna a na druhém konci opatřena zarážkou, která se opírá do snímací tyčky indikátoru, na jehož stupnici můžeme sledovat změny délky tyče s přesností na 0,01 mm. Trubkou protéká voda, jejíž teploty t' před trubkou a t'' za trubkou měříme dvěma teploměry. Teplotu trubky určíme jako $t = (t' + t'')/2$.



Obr. 2.1

Délkové změny trubek a tyčí způsobené změnou teploty jsou vždy nepatrné ve srovnání s jejich celkovou délkou. Měřením zjistíme, že v teplotním intervalu několika desítek °C se délka trubky s rostoucí teplotou zvětšuje téměř přesně lineárně. Jestliže při určité výchozí teplotě t_1 nastavíme zarážku do vzdálenosti l_1 od upevněného konce trubky a teplotu trubky zvětšíme z t_1 na t, změní se i délka trubky z l_1 na l. Změna délky trubky $\Delta l = l - l_1$ je přímo úměrná změně teploty $\Delta t = t - t_1$, ale také zvolené původní délce l_1. (Trubka dvojnásobné délky by se prodloužila o dvojnásobek.) To vyjádříme vztahem

$$\Delta l = \alpha l_1 (t - t_1) = \alpha l_1 \Delta t \,, \tag{6}$$

kde α je **teplotní součinitel délkové roztažnosti** materiálu trubky pro vztažnou teplotu t_1. Z výsledků měření dilatometrem jej určíme jako

$$\alpha = \frac{1}{l_1} \cdot \frac{l - l_1}{t - t_1} = \frac{1}{l_1} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} \,, \qquad [\alpha] = \mathrm{K}^{-1} \,. \tag{7}$$

Závislost délky trubky nebo tyče na teplotě vyjadřuje vztah

$$l = l_1 + \alpha l_1 (t - t_1) = l_1 [1 + \alpha (t - t_1)] = l_1 (1 + \alpha \Delta t) \,. \tag{8}$$

Teplotní součinitele délkové roztažnosti některých pevných látek pro vztažnou teplotu 20 °C jsou uvedeny v následující tabulce:

Látka	$\dfrac{\alpha}{10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}}$
ocel	12
hliník	23,8
mosaz (62 % Cu, 38 % Zn)	18
invar (64 % Fe, 36 % Ni)	2
sklo pro teploměry	8,3
sklo SIMAX	3,7
sklo křemenné	0,6

Příklad 1

Ocelovým pásmem, které měří přesně při 20 °C byla při teplotě 35 °C naměřena délka 5,825 m. Jak musíme opravit naměřenou hodnotu?

Řešení

Úsek pásma, který měl při teplotě $t_1 = 20$ °C délku $l_1 = 5{,}825$ m, se při zahřátí na teplotu $t = 35$ °C prodloužil o

$$\Delta l = \alpha l_1 \Delta t = 12 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1} \cdot 5{,}825\ \mathrm{m} \cdot 15\ \mathrm{K} = 1{,}05 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\,.$$

Oprava tedy ovlivní jen poslední cifru naměřené hodnoty. Správná délka je 5,826 m.

Teplotní součinitele délkové roztažnosti pevných látek pro vztažnou teplotu 0 °C jsou prakticky stejné jako při teplotě 20 °C. Zvolíme-li vztažnou teplotu $t_0 = 0$ °C, zjednoduší se vztah (8) na

$$l = l_0[1 + \alpha(t - t_0)] = l_0(1 + \alpha t)\,, \tag{9}$$

kde l_0 je délka při teplotě 0 °C.

Teplotní objemová roztažnost pevných těles souvisí jednoduše s roztažností délkovou. Rozměry izotropních pevných těles se v závislosti na teplotě mění ve všech směrech stejně – podle vztahu (8), resp. (9). Krychle, jejíž hrana má při vztažné teplotě t_1 délku a_1, má tedy při teplotě t objem

$$V = a^3 = a_1^3[1 + \alpha(t - t_1)]^3 = a_1^3(1 + \alpha\Delta t)^3 = V_1(1 + \alpha\Delta t)^3\,. \tag{10}$$

Obdobně závisí na teplotě i objemy těles jiného tvaru a také objemy nádob. Dutina nádoby se při zahřátí nebo ochlazení mění, jako kdyby byla vyplněna materiálem, ze kterého je nádoba vyrobena.

Vzhledem k tomu, že vždy platí $\alpha\Delta t \ll 1$, můžeme s dostatečnou přesností použít aproximaci

$$(1+\alpha\Delta t)^3 \approx 1 + 3\alpha\Delta t\,. \tag{11}$$

a závislost objemu pevného tělesa na teplotě a změnu objemu při změně teploty vyjádřit ve tvaru

$$V = V_1(1+3\alpha\Delta t) = V_1(1+\beta\Delta t)\,, \qquad \Delta V = V - V_1 = V_1\beta\Delta t\,. \tag{12}$$

Koeficient $\beta = 3\alpha$ nazýváme **teplotní součinitel objemové roztažnosti** pro vztažnou teplotu t_1. Zvolíme-li za vztažnou teplotu $t_0 = 0$ °C, platí

$$V = V_0(1+3\alpha t) = V_0(1+\beta t)\,, \tag{13}$$

kde V_0 je objem tělesa (příp. dutiny) při teplotě 0 °C.

Také **závislost hustoty pevné látky na teplotě** je v nepříliš velkém intervalu teplot prakticky lineární. Platí $1/(1+\beta\Delta t) \approx 1 - \beta\Delta t$,

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_1(1+\beta\Delta t)} = \frac{\varrho_1}{1+\beta\Delta t} \approx \varrho_1(1-\beta\Delta t)\,, \tag{14}$$

kde ϱ_1 je hustota látky při vztažné teplotě t_1. Vyjdeme-li ze vztahu (13), dostaneme

$$\varrho = \frac{m}{V_0(1+\beta t)} \approx \varrho_0(1-\beta t)\,, \tag{15}$$

kde ϱ_0 je hustota látky při teplotě 0 °C.

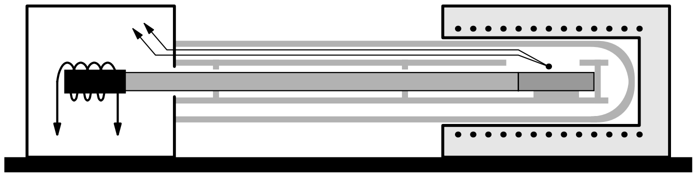
Oprávněnost použití aproximačních vztahů

$$(1+x)^3 \approx 1+3x\,, \qquad 1/(1+x) \approx 1-x$$

pro $x \ll 1$ ilustruje následující tabulka:

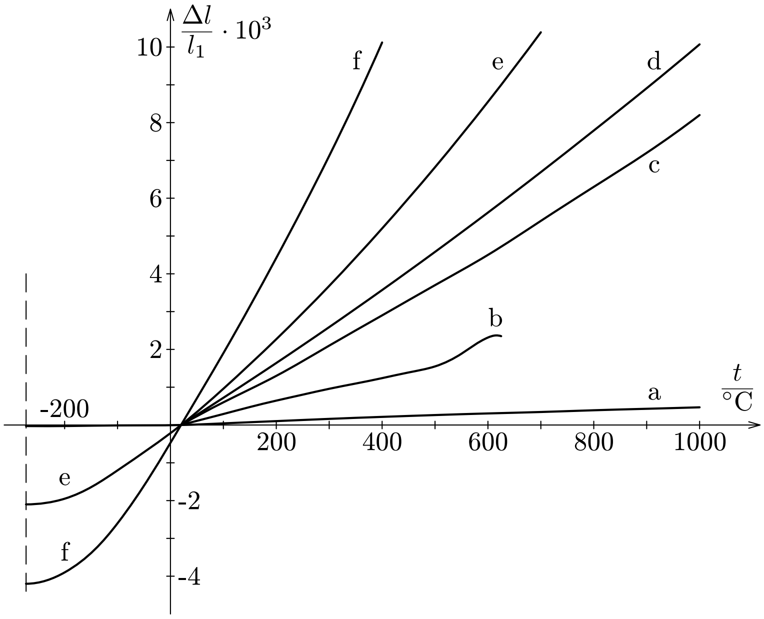
x	$(1+x)^3$	$1+3x$	$1/(1+x)$	$1-x$
0,0001	1,000300030	1,0003	0,999900010	0,9999
0,0003	1,000900270	1,0009	0,999700090	0.9997
0,001	1,003003001	1,003	0,999000999	0,999
0,003	1,009027027	1,009	0,997008973	0.997
0,01	1,030301	1,03	0,990099010	0,99

Studium teplotní délkové roztažnosti ve velkém teplotním rozsahu umožňuje dilatometr, jehož zjednodušené schéma je na obr. 2.2. Měřený vzorek ve tvaru tyčinky je vložen do trubice z křemenného skla, která je zasunuta do elektrické pícky. Změny délky vzorku při zahřátí se přenášení tyčinkou z křemenného skla do přesného indukčního snímače polohy, kde způsobují pohyb feritového jádra uvnitř cívky. Teplotu vzorku snímá termočlánek umístěný v jeho těsné blízkosti. Nahradíme-li pícku chladičem s kapalným dusíkem, je možno provádět měření hluboko pod 0 °C.



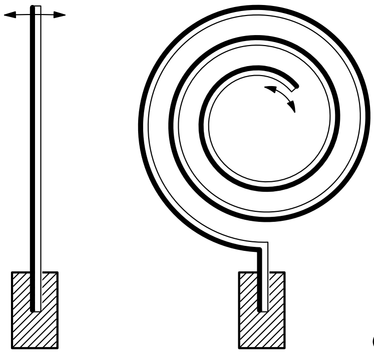
Obr. 2.2

Z grafů na obr. 2.3 je zřejmé, že ve velkém teplotním intervalu již nemůžeme závislost délky na teplotě považovat za lineární. Při teplotách blízkých absolutní nule se délka téměř nemění a při teplotách několika set °C se naopak mění rychleji než v okolí 0 °C. Největší odchylky od lineárního průběhu se objevují při teplotách, při kterých dochází k podstatným změnám vnitřní struktury látek (rekrystalizace, u amorfních látek měknutí).



Obr. 2.3. Teplotní závislost relativního prodloužení různých materiálů při vztažné teplotě 20 °C: a) křemenné sklo, b) sklo SIMAX, c) polykrystalický korund, d) platina, e) ocel, f) hliník

Rozdíly v délkové roztažnosti různých kovů se využívá k měření a regulaci teploty pomocí *bimetalových* (dvojkovových) pásků, které při změnách teploty mění tvar (obr. 2.4). Pohyb konce pásku se přenáší na ukazatel teploměru, nebo se jím ovládá spínač elektrického proudu (například v elektrické žehličce);



Obr. 2.4

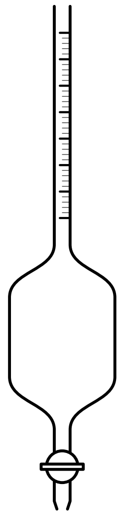
Úloha

3. Tyčový regulátor teploty v elektrickém boileru je opatřen mosaznou trubkou dlouhou 30 cm, ve které je zasunut invarový drát přibližně stejné délky. Trubka a drát jsou na jednom konci spojeny. Ochladí-li se voda v boileru, trubka se zkrátí více než drát, jehož volný konec se proto vysune z trubky a sepne citlivý spínač v obvodu topného tělesa. Při zahřátí se naopak drát zasune do trubky a spínač se rozepne. Porovnejte prodloužení trubky a drátu při ohřátí z 50 °C, kdy došlo k sepnutí proudu, na 70 °C, kdy byl proud přerušen.

2.2 Teplotní roztažnost kapalin

U kapalin má smysl vyšetřovat pouze **objemovou roztažnost**. K tomu slouží **kapilární dilatometr** (obr. 2.5) vyrobený ze skla s malým teplotním součinitelem objemové roztažnosti β_s. Na dilatometru je vyznačen objem nádobky V_1 při určité vztažné teplotě t_1 a tato teplota. Pro ni je také kalibrována objemová stupnice kapiláry dilatometru. Je-li dilatometr při nějaké teplotě t naplněn měřenou kapalinou tak, že její hladina dosahuje nad dolní konec stupnice kapiláry, určíme objem kapaliny při dané teplotě takto: Na stupnici odečteme objem V_k, který by měla zaplněná část kapiláry při teplotě t_1. Objem měřené kapaliny při teplotě t je

$$V = (V_1 + V_k)[1 + \beta_s(t - t_1)]\,. \tag{16}$$



Obr. 2.5

Při měření závislosti objemu na teplotě ponoříme dilatometr do lázně, zvolna měníme její teplotu, sledujeme, jak se mění objem V_k, a podle vztahu (16) dopočítáváme objem kapaliny.

S rostoucí teplotou se obvykle objem kapaliny zvětšuje. Výjimkou je *anomálie vody*, u které se v intervalu od 0 °C do 4 °C s rostoucí teplotou objem zmenšuje. V malém teplotním intervalu okolo zvolené vztažné teploty t_1 můžeme většinou dosti přesně popsat závislost objemu určitého množství kapaliny na teplotě lineárním vztahem

$$V = V_1[1 + \beta(t - t_1)]\,, \tag{17}$$

který jsme poznali už u pevných látek. Teplotní součinitele objemové roztažnosti některých kapalin pro vztažnou teplotu 20 °C jsou uvedeny v následující tabulce. Jsou vesměs podstatně větší než u pevných látek.

Látka	$\dfrac{\beta}{10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}}$
aceton	1490
etylalkohol	1100
voda	207
rtuť	182

Příklad 2

Dilatometr, na kterém je vyznačen objem $V_1 = 100\ \mathrm{cm}^3$ a vztažná teplota $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$, je vyroben ze skla SIMAX, jehož teplotní součinitel délkové roztažnosti je $\alpha_s = 3{,}7 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$. Při teplotě $t_2 = 26\ °\mathrm{C}$ byl naplněn měřenou kapalinou a na stupnici kapiláry byl odečten objem $V_{k2} = 0{,}3\ \mathrm{cm}^3$. Po zvětšení teploty na $t_3 = 61$ °C byl na stupnici kapiláry odečten objem $V_{k3} = 5{,}6\ \mathrm{cm}^3$. Určete teplotní součinitel objemové roztažnosti měřené kapaliny β.

Řešení

Teplotní součinitel objemové roztažnosti skla je $\beta_s = 3\alpha_s = 11{,}1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$. Podle vzorce (16) vypočítáme objemy kapaliny při teplotách t_2 a t_3:

$$V_2 = 100{,}30668\ \mathrm{cm}^3\,, \qquad V_3 = 105{,}64806\ \mathrm{cm}^3.$$

Platí:

$$V_2 = V_1'[1 + \beta(t_2 - t_1)]\,, \qquad V_3 = V_1'[1 + \beta(t_3 - t_1)]\,,$$

kde V_1' je objem měřené kapaliny při teplotě t_1. Úpravou dostaneme:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{1 + \beta(t_2 - t_1)}{1 + \beta(t_3 - t_1)}\,, \qquad \beta = \frac{V_3 - V_2}{V_2(t_3 - t_1) - V_3(t_2 - t_1)} = 1{,}54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\,.$$

Zjednodušené řešení

Zanedbáme-li teplotní roztažnost samotné kapiláry, můžeme napsat

$$\Delta V_k = V_{k3} - V_{k2} = V_1\beta\Delta t - V_1\beta_s\Delta t = V_1(\beta - \beta_s)(t_3 - t_2)\,,$$

$$\beta = \frac{V_{k3} - V_{k2}}{V_1(t_3 - t_2)} = 1{,}51 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\,.$$

Oba výsledky se v mezích přesnosti měření shodují. Měřená kapalina má teplotní součinitel objemové roztažnosti $\beta \approx 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Chceme-li dostatečně přesně popsat závislost objemu kapaliny na teplotě ve větším teplotním intervalu, musíme použít kvadratickou nebo kubickou funkci:

$$V = V_1[1 + \beta_1\Delta t + \beta_2(\Delta t)^2]\,, \qquad V = V_1[1 + \beta_1\Delta t + \beta_2(\Delta t)^2 + \beta_3(\Delta t)^3]\,.$$

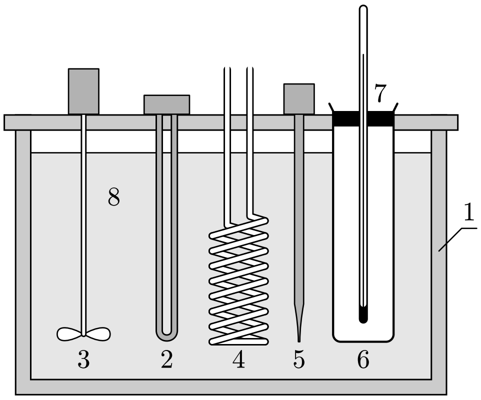
Vypočítat koeficienty $\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots$ z tabulky naměřených hodnot se naučíme v praktických úlohách uvedených ve 3. kapitole.

Úloha

4. Teploměr vyrobený ze skla o teplotním součiniteli délkové roztažnosti $\alpha = 8{,}3 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-1}$ má stupnici od 0 °C do 100 °C dlouhou 19 cm. Jeho nádobka se rtutí má objem 90 mm^3. Určete průřez jeho kapiláry. Postupujte podobně jako ve zjednodušeném řešení příkladu 2.

2.3 Teplotní závislosti elektrických veličin

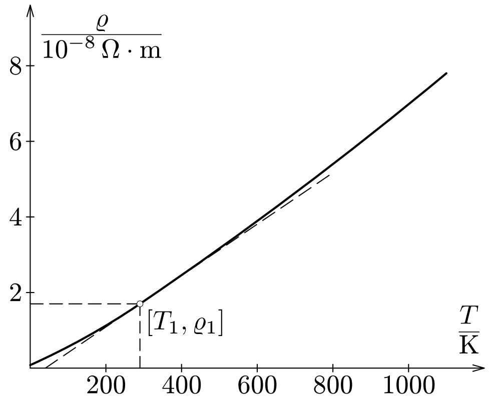
Pro měření teplotních závislostí elektrických veličin se používají *termostaty*, ve kterých lze spolehlivě regulovat a udržovat stálé teploty. V kapalinovém termostatu, jehož schéma je na obr. 2.6, můžeme podle druhu použité kapaliny (methylalkohol, voda, olej aj.) udržovat teplotu v rozmezí -60 °C až 300 °C. Teplotu vyšší než je teplota laboratoře dosáhneme pomocí topného tělesa, teploty nižší pomocí chladicí tekutiny protékající měděnou spirálovou trubkou. Termostaty upravené pro práci s nízkými teplotami se nazývají *kryostaty*. V nich se teplota reguluje odpařováním zkapalněných plynů – dusíku, helia.



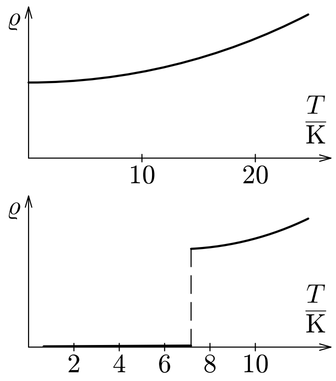
Obr. 2.6 Kapalinový termostat:
1 tepelná isolace stěn,
2 topné těleso,
3 míchačka,
4 měděná trubice,
5 čidlo regulátoru,
6 zkušební prostor,
7 přesný teploměr,
8 termostatická lázeň

2.3.1 Elektrický odpor kovových vodičů

Hlavní příčinou elektrického odporu čistých kovů je tepelný pohyb iontů krystalové mříže. Rezistivita (měrný elektrický odpor) čistých kovů proto značně závisí na teplotě. Velmi přibližně se dá říci, že je přímo úměrná absolutní teplotě, jak vidíme na obr. 2.7, kde je graf závislosti rezistivity na absolutní teplotě pro měď. V blízkosti absolutní nuly se graf odchyluje od lineárního průběhu a u některých kovů a slitin může dokonce dojít k přechodu do supravodivého stavu, například u olova při teplotě 7,2 K (obr. 2.8).



Obr. 2.7



Obr. 2.8

Při teplotách blízkých teplotě laboratoře můžeme závislost elektrického odporu R a rezistivity ϱ čistých kovů na teplotě považovat za lineární a vyjádřit ji pomocí vztahů

$$R = R_1[1 + \alpha(t - t_1)]\,, \qquad \varrho = \varrho_1[1 + \alpha(t - t_1)]\,, \tag{18}$$

kde R_1 a ϱ_1 jsou odpor a rezistivita při vztažné teplotě t_1 a

$$\alpha = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R - R_1}{t - t_1} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} \tag{19}$$

je teplotní součinitel elektrického odporu pro vztažnou teplotu t_1. Jeho hodnota je závislá na volbě vztažné teploty.

Zvolíme-li za vztažnou teplotu 0 °C, platí

$$R = R_0(1 + \alpha t)\,, \qquad \varrho = \varrho_0(1 + \alpha t)\,. \tag{20}$$

Hodnoty ϱ a α některých čistých kovů a odporových slitin pro vztažnou teplotu 0 °C jsou uvedeny v následující tabulce:

Látka	$\dfrac{\varrho}{10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}}$	$\dfrac{\alpha}{10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}}$
měď	1,56	4,33
hliník	2,45	4,5
wolfram	4,89	4,83
platina	9,81	3,92
konstantan(55 % Cu, 44 % Ni, 1 % Mn)	49	0,04
manganin(86 % Cu, 12 % Mn, 2 % Ni)	43	0,01

U slitin pro výrobu technických rezistorů, jsou hlavní příčinou elektrického odporu nepravidelnosti krystalové mříže. Závislost rezistivity na teplotě je malá, což potvrzují malé hodnoty teplotního součinitele odporu.

Příklad 3

Měděné vinutí elektromotoru mělo před připojením ke zdroji při teplotě 25 °C odpor 15,3 Ω. Během provozu se odpor vinutí zvětšil na 18,7 Ω. Jak se změnila jeho teplota?

Řešení

Označme t', t'' počáteční a konečnou teplotu vinutí a R', R'' příslušné odpory. Platí

$$R' = R_0(1+\alpha t')\,, \quad R'' = R_0(1+\alpha t'')\,, \qquad \frac{R''}{R'} = \frac{1+\alpha t''}{1+\alpha t'}\,,$$

$$t'' = \frac{\dfrac{R''}{R'}(1+\alpha t') - 1}{\alpha} = \frac{\dfrac{18{,}7\ \Omega}{15{,}3\ \Omega}(1 + 4{,}33\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\cdot 25\ {}^\circ\mathrm{C}) - 1}{4{,}33\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}} = 82\ {}^\circ\mathrm{C}\,.$$

Přesné měření teploty podle Mezinárodní teplotní stupnice ITS 90 v intervalu od 13,8033 K (trojný bod rovnovážného vodíku) do 981,78 °C (bod tuhnutí stříbra) se provádí platinovým odporovým teploměrem. Zde již nevystačíme s lineární funkcí (20). Pro $t > 0$ °C lze dostatečné přesnosti dosáhnout užitím vztahu

$$R = R_0[1 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2]\,,$$

kde $\alpha_1 = 3{,}90802\cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, $\alpha_2 = -5{,}802\cdot 10^{-7}\ \mathrm{K}^{-2}$.

2.3.2 Elektrický odpor termistorů NTC

Termistory NTC (se záporným teplotním součinitelem odporu) jsou polovodičové součástky, které se vyrábějí tzv. práškovou technologií ze směsi oxidů kovů (např. $Fe_2O_3 + TiO_2$, $MnO + CoO$ apod.). Po vylisování do vhodného tvaru (destička, tyčinka) a vypálení se opatří drátovými vývody. Podle provedení se dají využít k měření a regulaci teploty v intervalu běžných teplot -50 °C až 150 °C nebo také v extrémně velkém intervalu od 4,2 K do 1000 °C.

U termistorů NTC se uplatňuje *vlastní vodivost* polovodiče. S rostoucí teplotou roste koncentrace volných nosičů náboje – elektronů a děr – a elektrický odpor se zmenšuje. V intervalu běžných teplot můžeme závislost odporu na teplotě dosti přesně vyjádřit vztahem

$$R = A\mathrm{e}^{\frac{B}{T}}\,, \tag{21}$$

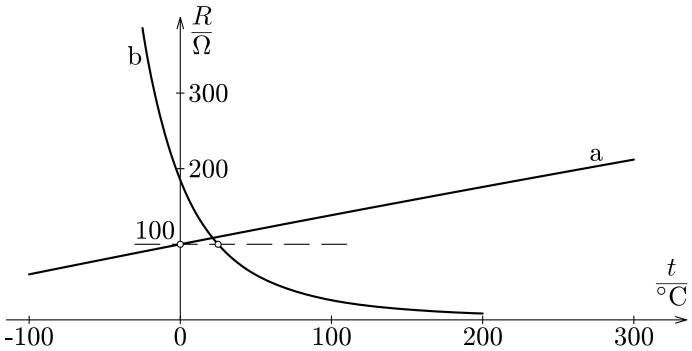
kde A je konstanta závislá na rozměrech a materiálu, B je konstanta závislá pouze na materiálu součástky. V praxi se často používá upravený vztah

$$R = A\mathrm{e}^{\frac{B}{298{,}15\,\mathrm{K}}} \cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{298{,}15\,\mathrm{K}}\right)} = R_{25}\mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T} - \frac{B}{298{,}15\,\mathrm{K}}\right)}\,, \tag{22}$$

kde R_{25} je odpor při teplotě 25 °C, tzv. *jmenovitý odpor* termistoru. Vyráběné termistory mají $1\,\Omega \leq R_{25} \leq 1\,\mathrm{M\Omega}$ a $1500\,\mathrm{K} < B < 7000\,\mathrm{K}$.

Závislost odporu na teplotě je značně nelineární a teplotní součinitel odporu α pro určitou absolutní vztažnou teplotu T musíme proto počítat pomocí upraveného vzorce (19) jako

$$\alpha = \frac{1}{R} \cdot \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta T} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\,R}{\mathrm{d}\,T} = \frac{1}{A\mathrm{e}^{\frac{B}{T}}} \cdot A\mathrm{e}^{\frac{B}{T}}\left(-\frac{B}{T^2}\right) = -\frac{B}{T^2} \tag{23}$$



Obr. 2.9. Závislost odporu na teplotě a) u standardního platinového odporového čidla $R_0 = 100\,\Omega$, b) u termistoru $B = 2000$ K, $R_{25} = 100\,\Omega$

2.3.3 Měřicí obvody odporových snímačů teploty

Odporové snímače teploty se nejčastěji používají v můstkovém zapojení nebo v obvodu s konstantním zdrojem proudu.

Můstek na obr. 2.10a je vyvážen a na jeho výstupu je nulové napětí při teplotě, při které platí

$$\frac{R_t}{R_1} = \frac{R_2}{R_3}\,. \tag{24}$$

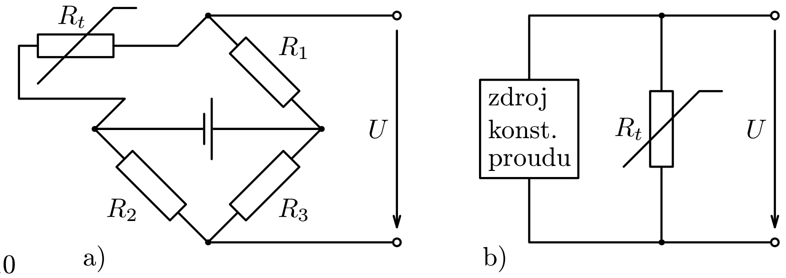
Změníme-li teplotu čidla, na výstupu se objeví napětí závislé na změně teploty. To přivádíme buď přímo na měřicí přístroj opatřený stupnicí teploty, nebo na elektronické obvody k dalšímu zpracování.

Přivedeme-li na odporové čidlo stálý proud podle obr. 2.10b, získáme napětí přímo úměrné odporu čidla. Stejným způsobem, jako se v závislosti na teplotě mění odpor čidla, mění se tedy i výstupní napětí obvodu, které dále elektronicky zpracujeme.

Proud I procházející odporovým čidlem musí být tak malý, aby elektrický příkon čidla $P = R_t I^2$ způsobil jen zanedbatelné zahřátí. U každého čidla udává výrobce *zatěžovací konstantu* D, číselně rovnou příkonu, který způsobí ohřátí o $\Delta t = 1$ K nad teplotu okolí. Chybu způsobenou zahřátím čidla procházejícím proudem určíme jako

$$\Delta t = \frac{R_t I^2}{D}\,. \tag{25}$$

Například termistor o zatěžovací konstantě $D = 12$ mW/K a odporu 100 Ω se proudem 10 mA ohřeje nad teplotu okolí o 0,8 K, proudem 1 mA jen o 0,008 K.

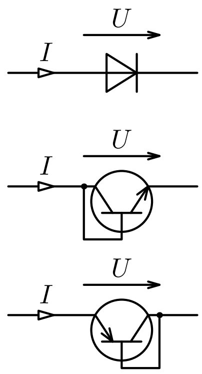


Obr. 2.10

2.3.4 Přechod PN jako čidlo teploty

Jako čidlo teploty můžeme použít obyčejnou křemíkovou diodu nebo tzv. tranzistorovou diodu, která vznikne z tranzistoru spojením kolektoru s bází (obr. 2.11). Průběh voltampérové charakteristiky diody zapojené v propustném směru, závisí na teplotě přechodu PN. S rostoucí teplotou přechodu se posouvá k nižším hodnotám napětí (obr. 2.12). Připojíme-li diodu ke zdroji stálého proudu, je napětí na diodě lineární funkcí teploty (obr. 2.13), kterou můžeme vyjádřit ve tvaru

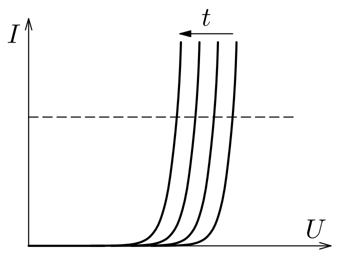
$$U = U_0 - At\,, \tag{26}$$



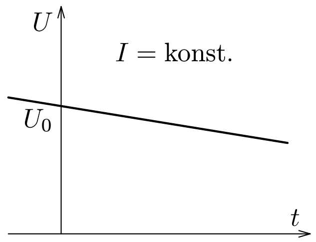
Obr. 2.11

kde U_0 je napětí při teplotě 0 °C a koeficient A má hodnotu v rozmezí 2,0 mV/K až 2,5 mV/K. Tranzistorovou diodou se budeme podrobněji zabývat v příkladu 7.

Tranzistorové diody jsou základním prvkem integrovaných obvodů pro měření teploty, které slouží jako tepelné čidlo v moderních elektrických teploměrech. Výstupní proud takového obvodu v mikroampérech je číselně roven absolutní teplotě obvodu v Kelvinech.



Obr. 2.12

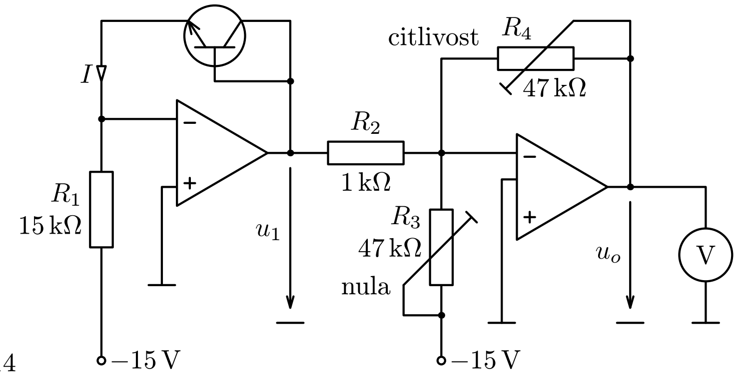


Obr. 2.13

Lineární závislost napětí PN přechodu na teplotě umožňuje konstruovat jednoduché elektrické teploměry i s běžnými elektronickými součástkami.

Příklad 4

Sestrojte elektrický teploměr s tranzistorovou diodou a dvěma operačními zesilovači podle obr. 2.14. Nastavte jej tak, aby napětí na voltmetru bylo přímo úměrné Celsiově teplotě a aby hodnotě 100 °C odpovídalo napětí 10 V. (S vlastnostmi analogových integrovaných obvodů, které se nazývají operační zesilovače, se můžete podrobně seznámit ve studijním textu [4].)



Obr. 2.14

Princip činnosti:

Tranzistorová dioda je zapojena do větve záporné zpětné vazby invertujícího operačního zesilovače. Bude jí procházet stejný proud jako rezistorem R_1, tedy

$$I = 15\ \mathrm{V}/15\ \mathrm{k\Omega} = 1\ \mathrm{mA}\,.$$

Napětí u_1 na výstupu operačního zesilovače se objeví napětí přechodu PN. Použijeme-li stejný tranzistor jako v příkladu 7 a v úloze 6, bude

$$u_1 = U_0 - At = 0{,}663\ \mathrm{V} - 2{,}19\,\frac{\mathrm{mV}}{\mathrm{K}} \cdot t\,.$$

Druhý operační zesilovač funguje jako součtový invertující zesilovač. Podle 1. Kirchhoffova zákona platí pro proudy přicházející na jeho invertující vstup:

$$\frac{u_0}{R_4} = -\frac{u_1}{R_2} + \frac{15\ \mathrm{V}}{R_3} = -\frac{U_0}{R_2} + \frac{At}{R_2} + \frac{15\ \mathrm{V}}{R_3}\,.$$

Nejprve nastavíme R_3 tak, že

$$-\frac{U_0}{R_2} + \frac{15\ \mathrm{V}}{R_3} = 0 \quad\Rightarrow\quad R_3 = \frac{15\ \mathrm{V}}{U_0} R_2 = 22{,}6\ \mathrm{k\Omega}\,.$$

Pak platí

$$u_0 = \frac{R_4}{R_2} At\,.$$

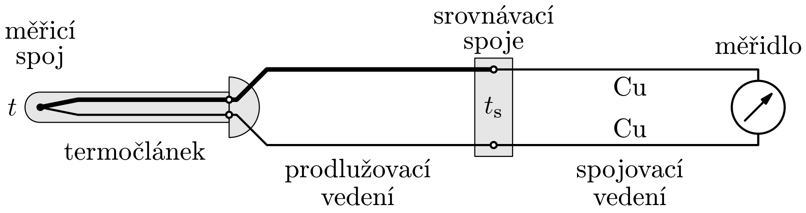
Zbývá nastavit citlivost přístroje změnou odporu R_4 tak, že

$$\frac{R_4}{R_2} A = 0{,}1\ \mathrm{V/K} \quad\Rightarrow\quad R_4 = \frac{0{,}1\ \mathrm{V/K}}{0{,}00219\ \mathrm{V/K}} R_2 = 46\ \mathrm{k\Omega}\,.$$

Tím dosáhneme požadovaného rozsahu do 100 °C a číselná hodnota napětí na výstupu násobená 10 bude rovna číselné hodnotě měřené teploty. Použijeme-li digitální voltmetr, můžeme měřit i teploty pod 0 °C.

2.3.5 Termočlánky

Termočlánek vznikne spojením dvou vodičů z různého materiálu. Umístíme-li spoj do místa s jinou teplotou, než je teplota volných konců, vznikne v termočlánku elektromotorické napětí, které se nazývá *termoelektrické napětí*. Pro měření teploty se termočlánky zapojují podle obr. 2.15. Termočlánek ve vhodném pouzdře (někdy i bez pouzdra) se spojeným koncem umístí do místa, jehož teplotu t měříme a volné konce se připojí pomocí *prodlužovacího vedení* ze stejných materiálů ke *srovnávacím spojům* do místa, které má *srovnávací teplotu* t_s. Od srovnávacích spojů pokračuje běžné spojovací vedení z měděných vodičů, na jehož konec je připojeno měřidlo termoelektrického napětí nebo elektronické obvody pro jeho vyhodnocení.



Obr. 2.15

Jak je patrné z grafů na obr. 2.16, termoelektrické napětí je malé, jeho hodnoty dosahují nejvýše desítek milivoltů. V teplotním intervalu $(0\ °\mathrm{C}, 100\ °\mathrm{C})$ je termoelektrické napětí přibližně přímo úměrné rozdílu teploty t měřicího spoje a teploty t_s srovnávacích spojů. Můžeme ji vyjádřit ve tvaru

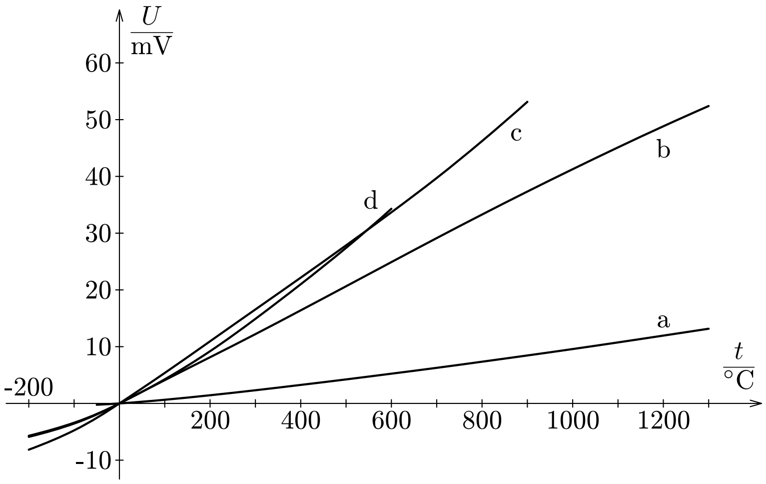
$$U = \alpha(t - t_s)\,. \tag{27}$$

Konstanta úměrnosti α má u nejčastěji používaných termočlánků hodnoty uvedené v následující tabulce:

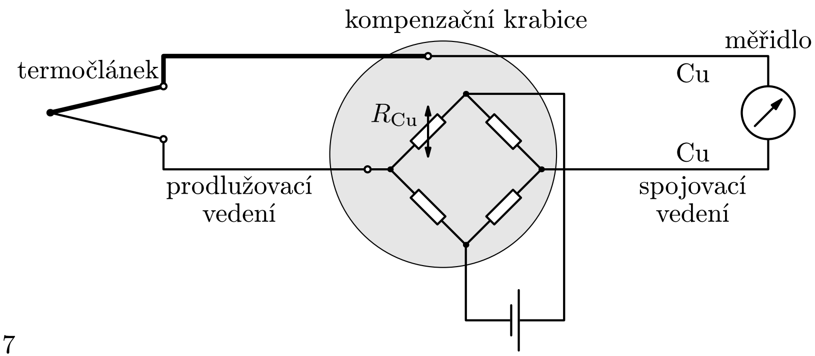
Termočlánek	$\alpha/(\mu\mathrm{V}\cdot\mathrm{K}^{-1})$
Cu – konstantan	42,7
Pt – konstantan	52,7
NiCr – NiAl	41,0
Pt – 10 % Rh/Pt	6,45

Při praktických měřeních teploty je nutno udržovat teplotu srovnávacích spojů konstantní, nebo vliv jejího kolísání vykompenzovat pomocí tzv. *kompenzační krabice*, jejíž konstrukci znázorňuje obr. 2.17. Uvnitř pouzdra se srovnávacími spoji je do obvodu zapojen můstek ze tří teplotně nezávislých rezistorů a jednoho teplotně závislého rezistoru zhotoveného z měděného vodiče. (Srovnej s obr. 2.10a.) Můstek je vyvážen při srovnávací teplotě 0 °C. Při jiné teplotě uvnitř pouzdra na jeho vodorovné úhlopříčce vzniká napětí o velikosti αt_s. Na výstupu za kompenzační krabicí je tedy napětí

$$U = \alpha(t - t_s) + \alpha t_s = \alpha t\,.$$



Obr. 2.16 Závislost termoelektrického napětí na teplotě t měřicího spoje při teplotě srovnávacích spojů $t_s = 0$ °C u termočlánků: a) Pt – 10 % Rh/Pt, b) NiCr – NiAl, c) Fe – konstantan, d) Cu – konstantan



Obr. 2.17

2.4 Tepelné záření těles. Bezdotykové měření teploty

Všechna tělesa okolo nás vyzařují tepelné elektromagnetické záření, převážně v infračervené oblasti spektra v rozmezí vlnových délek od 0,76 μm do 40 μm. Při teplotách nad 600 °C (rozpálená plotýnka vařiče, žhavé vlákno žárovky) vnímáme část tohoto záření jako viditelné světlo o vlnových délkách 0,4 μm až 0,76 μm. Vnímáme však i intenzivnější infračervené záření, například z rozpálených kamen.

Podle *Stefanova-Boltzmannova zákona* těleso, jehož povrch má plošný obsah S a absolutní teplotu T, vyzařuje zářivý výkon

$$P_{\mathrm{e}} = \varepsilon \sigma S T^4 \,, \tag{28}$$

kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$ je *Stefanova-Boltzmannova konstanta*, stejná pro všechna tělesa, a ε je *emisivita* povrchu ($0 < \varepsilon < 1$). Největší emisivitu $\varepsilon = 1$ by mělo dokonale černé těleso. Emisivity některých povrchů jsou uvedeny v následující tabulce:

0,99	černý matový lak, saze
0,95	voda, led
0,90	střešní lepenka
0,75	ocelový plech s okujemi
0,25	lesklá ocel

U některých látek se emisivita s rostoucí teplotou povrchu mění, například u niklu při 200 °C je $\varepsilon = 0{,}37$, při 600 °C je $\varepsilon = 0{,}46$, u wolframu při 1500 °C je $\varepsilon = 0{,}23$, při 2000 °C je $\varepsilon = 0{,}28$.

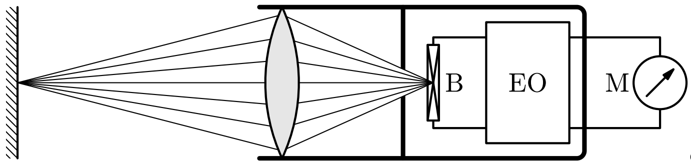
Tělesa stejně dobře vyzařují, jako pohlcují záření. Je-li těleso, jehož povrch má plošný obsah S, obklopeno prostředím o absolutní teplotě T_{o}, pohlcuje zářivý výkon

$$P'_{\mathrm{e}} = \varepsilon \sigma S T_{\mathrm{o}}^4 \,.$$

Abychom udrželi stálou teplotu povrchu T při stálé teplotě okolí $T_{\mathrm{o}} < T$, musíme tělesu dodávat příkon

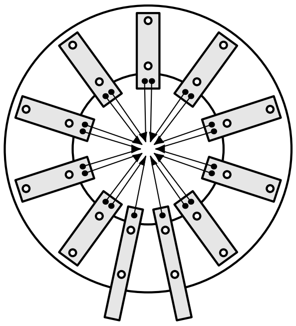
$$P = P_{\mathrm{e}} - P_{\mathrm{e}'} = \varepsilon \sigma S (T^4 - T_{\mathrm{o}}^4) \,. \tag{29}$$

Bezdotykové teploměry – pyrometry – jsou založeny na měření tepelného záření, které vystupuje z malé části povrchu měřeného tělesa. Nejčastěji se používají *úhrnné radiační pyrometry*, které využívají celou spektrální oblast záření. Zjednodušené schéma takového přístroje je na obr. 2.18.



obr. 2.18

Záření přicházející z měřeného místa se soustředí pomocí dutého zrcadla nebo pomocí čočky z materiálu, který propouští infračervené záření na tepelné čidlo B, kde vyvolá teplotní rozdíl oproti okolním částem přístroje. Jako tepelné čidlo bývá použita baterie miniaturních termočlánků, jejichž začerněné měřicí konce jsou umístěny v ohnisku zrcadla nebo čočky a srovnávací konce jsou upevněny na obvodu čidla (obr. 2.19). Napětí z baterie vyhodnocují elektronické obvody EO, které také kompenzují vliv vnitřní teploty přístroje a umožňují přizpůsobit citlivost měřidla M emisivitě měřeného povrchu.



Obr. 2.19

K přednostem bezdotykových měřidel teploty patří krátká doba měření (1 až 3 s), zanedbatelný vliv na měřený objekt a možnost měření na pohybujících se tělesech (otáčející se součásti strojů, válcovaný materiál apod.). Přesnost měření však může ovlivnit nejistota ve stanovení emisivity měřeného povrchu a záření dopadajícího na měřený povrch z okolních těles.

Úloha

5. Plotýnka vařiče, který po sejmutí nádoby zapomeneme vypnout, se rozžhaví „dočervena“. Vypočtěte její teplotu, je-li plošný obsah plotýnky 2,2 dm^2, emisivita 0,9 a vyzařovaný výkon 1200 W.

3 Zpracování výsledků měření teplotních závislostí

Vyšetřujeme-li závislosti nějaké veličiny na teplotě měřením v laboratoři, předpokládáme obvykle, že je popsána matematickou funkcí určitého typu. Výsledky měření můžeme zobrazit jako množinu bodů $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2] \ldots [x_n, y_n]$ v rovině grafu, kde na vodorovnou osu x vynášíme ve vhodném měřítku teploty měření jako hodnoty nezávisle proměnné veličiny a na svislou osu y vynášíme v jiném vhodném měřítku naměřené hodnoty veličiny, jejíž teplotní závislost studujeme. Z výsledků měření chceme vypočítat číselné hodnoty koeficientů ve funkčním předpisu funkce $y = f(x)$ a určit průběh grafu, který funkci znázorňuje.

Kdyby měření bylo naprosto přesné, ležely by všechny body zobrazující výsledky měření na grafu funkce. Pro každý by platilo $y_i = f(x_i)$. Měření je však zatíženo chybami a vynesené body jsou podle jeho přesnosti více nebo méně rozptýleny okolo grafu, který skutečnou teplotní závislost popisuje. Jeho přesný průběh ale neznáme. Ze všech možných funkcí daného typu tedy hledáme tu, jejíž graf bude probíhat co nejblíže k vyneseným bodům.

Pro tento úkol se jako nejvhodnější jeví statistická **metoda nejmenších čtverců**. Hledáme takový průběh grafu, při kterém *součet druhých mocnin svislých odchylek všech vynesených bodů od grafu je minimální*. Výpočet metodou nejmenších čtverců se nazývá **regrese** a jeho výsledkem je *empirická regresní funkce*.

Jako všechny statistické výpočty vyžaduje i regrese použití výpočetní techniky. Je součástí programové výbavy vědeckých kalkulaček, větší komfort ale poskytují matematické programy pro PC, z nichž je nejrozšířenější EXCEL od firmy Microsoft. Ten také použijeme v praktických ukázkách, přičemž předpokládáme, že čtenář textu je s používáním Excelu alespoň v hrubých rysech seznámen.

Běžné regresní programy se zaměřují zejména na následující funkce jedné nezávisle proměnné x:

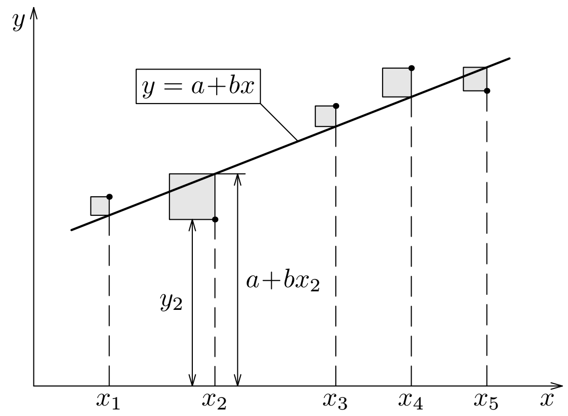
$y = a + bx$ — *lineární regrese*,
$y = a + b \ln x$ — *logaritmická regrese*,
$y = a\mathrm{e}^{bx}$ — *exponenciální regrese*,
$y = ax^b$ — *mocninná regrese*,
$y = b_0 + b_1 x + \ldots + b_r x^r$ — *polynomická regrese*.

Kromě toho umožňují provést *lineární regresi funkce několika nezávisle proměnných* x_1, x_2, $\ldots x_r$, kterou můžeme popsat vztahem

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ \ldots \ + b_r x_r \, .$$

Princip výpočtu regresní funkce v uvedených případech si vysvětlíme na následujících stránkách. Teorie je proložena praktickými ukázkami použití regrese při zpracování výsledků měření v laboratorních pracích a při vyhodnocování dat, která vyčteme ve fyzikálních tabulkách.

3.1 Lineární regrese funkce jedné proměnné



Obr. 3.1

Naším cílem je nalézt funkci $y = a + bx$ tak, aby součet druhých mocnin svislých odchylek bodů $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ $\ldots [x_n, y_n]$ od grafu funkce byl co nejmenší (obr. 3.1). Tento součet je závislý na volbě koeficientů a, b; jedná se tedy o funkci dvou proměnných, kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (a + bx_i)]^2 = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 - 2Da - 2Eb + F\,, \tag{30}$$

kde $A = n,\ B = \sum_{i=1}^{n} x_i,\ C = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ D = \sum_{i=1}^{n} y_i,\ E = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ F = \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,.$

Pro zjednodušení v celém dalším textu

$$\text{symbol } \sum_{i=1}^{n} \text{ nahradíme symbolem } \sum.$$

Nejprve si všimněme některých vlastností *aritmetických průměrů* naměřených hodnot:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}\,, \quad \sum x_i = n\overline{x}\,, \qquad \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n}\,, \quad \sum y_i = n\overline{y}\,, \tag{31}$$

$$\sum(x_i-\overline{x})^2 = \sum x_i^2-2\overline{x}\sum x_i+n\overline{x}^2 = \sum x_i^2-2n\overline{x}^2+n\overline{x}^2 = \sum x_i^2-n\overline{x}^2 > 0\,, \tag{32}$$

$$\text{a podobně} \quad \sum(y_i-\overline{y})^2 = \sum y_i^2 - n\overline{y}^2 > 0\,. \tag{33}$$

Ve vztahu (30) můžeme odstranit lineární členy úpravou

$$S(a,b) = A(a-a^*)^2 + 2B(a-a^*)(b-b^*) + C(b-b^*)^2 + G \tag{34}$$

nebo

$$S(a,b) = A\left[(a-a^*) + \frac{B}{A}(b-b^*)\right]^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)(b-b^*)^2 + G, \tag{35}$$

kde a^* a b^* jsou zatím neznámé konstanty. Ze vztahu (35) je zřejmé, že součet $S(a,b)$ má nejmenší hodnotu pro $a = a^*$ a $b = b^*$, neboť $A > 0$ a podle (31) a (32) je také

$$C - \frac{B^2}{A} = \sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} = \sum x_i^2 - n\overline{x}^2 = \sum(x_i-\overline{x})^2 > 0\,.$$

Konstanty a^* a b^* jsou tedy hledané hodnoty koeficientů a a b. Rozepsáním vztahu (34)

$$\begin{aligned} S(a,b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 - 2(Aa^* + Bb^*)a - 2(Ba^* + Cb^*)b\, + \\ + A(a^*)^2 + 2Ba^*b^* + C(b^*)^2 + G \end{aligned} \tag{36}$$

a jeho porovnáním s (30) dostaneme tzv. *soustavu normálních rovnic*

$$\begin{aligned} Aa^* + Bb^* &= D\,, \\ Ba^* + Cb^* &= E\,, \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} na^* + \left(\sum x_i\right)b^* &= \sum y_i\,, \\ \left(\sum x_i\right)a^* + \left(\sum x_i^2\right)b^* &= \sum x_i y_i\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Součet $S(a,b)$ je minimální, jestliže

$$\boxed{b = b^* = \frac{AE-BD}{AC-B^2} = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{\sum(x_i-\overline{x})^2}\,,} \tag{38}$$

$$\boxed{a = a^* = \frac{D}{A} - \frac{Bb^*}{A} = \frac{\sum y_i}{n} - b^*\frac{\sum x_i}{n} = \overline{y} - b^*\overline{x}\,.} \tag{39}$$

Hodnotu součtu $S(a,b)$ pro případ $a = a^*$, $b = b^*$ dostaneme nejrychleji dosazením (39) do (30):

$$S(a^*,b^*) = \sum [y_i - a^* - b^* x_i]^2 = \sum [(y_i - \overline{y}) - (a^* + b^* x_i - \overline{y})]^2 \,.$$

Úpravou s použitím (39), (38), (32) a (33) dostaneme $a^* + b^* x_i - \overline{y} = b^*(x_i - \overline{x})$,

$$S(a^*,b^*) = \sum [(y_i - \overline{y}) - b^*(x_i - \overline{x})]^2 =$$

$$= \sum (y_i - \overline{y})^2 - 2b^* \left[\sum x_i y_i - \overline{x} \sum y_i - \overline{y} \sum x_i + n\overline{x}\,\overline{y}\right] + (b^*)^2 \sum (x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= \sum (y_i - \overline{y})^2 - 2b^* \left(\sum x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}\right) + (b^*)^2 \sum (x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= \sum (y_i - \overline{y})^2 - 2b^* b^* \sum (x_i - \overline{x})^2 + (b^*)^2 \sum (x_i - \overline{x})^2 \,,$$

$$S(a^*,b^*) = \sum (y_i - \overline{y})^2 - (b^*)^2 \sum (x_i - \overline{x})^2 \,.$$

Dostali jsme rozdíl dvou výrazů, které jsou oba kladné a druhý je menší než první. Jejich poměr označujeme symbolem r^2 a nazýváme *koeficient determinace*:

$$\boxed{r^2 = \frac{(b^*)^2 \sum (x_i - \overline{x})^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2} = \frac{\sum (a^* + b^* x_i - \overline{y})^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2} \,.} \tag{40}$$

Čím více se koeficient determinace blíží k jedné, tím menší je součet $S(a^*,b^*)$ a tím méně jsou body $[x_1,y_1]$, $[x_2,y_2] \ldots [x_n,y_n]$ rozptýleny okolo grafu funkce $y = a^* + b^* x$. Můžeme tedy podle jeho hodnoty posoudit, do jaké míry je splněn předpoklad o lineárním průběhu hledané funkční závislosti. Obvykle se pro přijetí tohoto předpokladu spokojíme s dosažením hodnoty $r^2 > 0{,}95$.

V dalším textu budeme předpokládat že koeficienty a, b regresní funkce mají hodnoty a^*, b^* vypočítané metodou nejmenších čtverců podle vzorců (38) a (39).

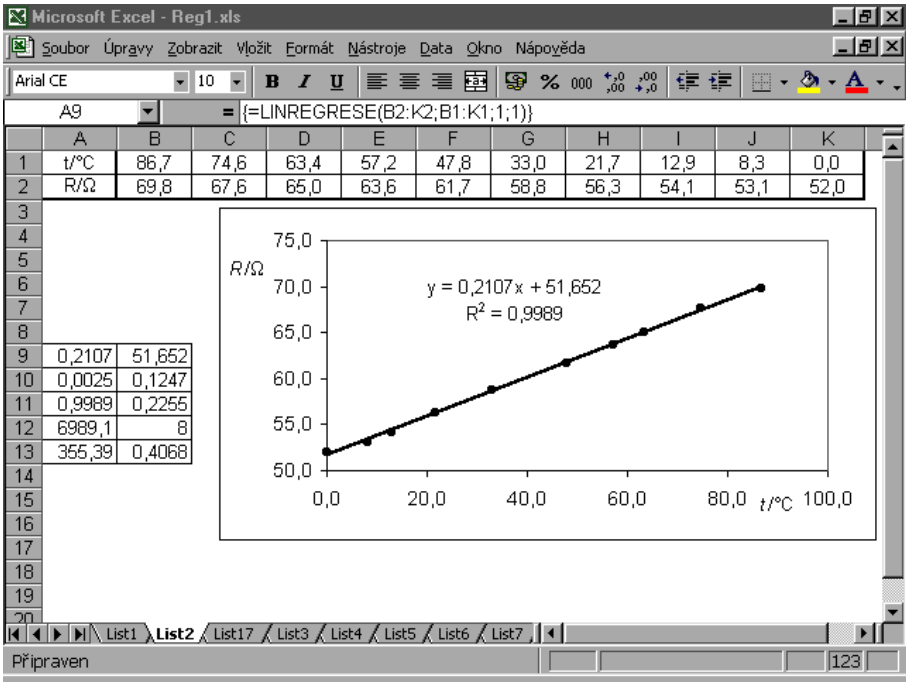
3.2 Výpočet lineární regrese funkce jedné nezávisle proměnné pomocí programu EXCEL

Můžeme zvolit jeden ze dvou způsobů výpočtu:

A) zavedeme **lineární trend** v grafu funkce,

B) použijeme **maticový vzorec** s funkcí **LINREGRESE**.

Oba způsoby jsou popsány v následující ukázce, ve které jsou zpracovány výsledky naměřené v laboratorní práci. Výsledný vzhled obrazovky počítače je na obr. 3.2.



Obr. 3.2

Příklad 5: Určení závislosti odporu kovového vodiče na teplotě

Úkoly:

a) Změřte odpor cívečky z měděného drátu při různých teplotách v intervalu 0 °C až 90 °C.

b) Sestrojte graf závislosti odporu na teplotě.

c) Ověřte, že závislost odporu na teplotě je lineární a určete hodnoty koeficientů R_0 a α_0 ve vztahu

$$R = R_0(1 + \alpha_0 t)\,. \tag{41}$$

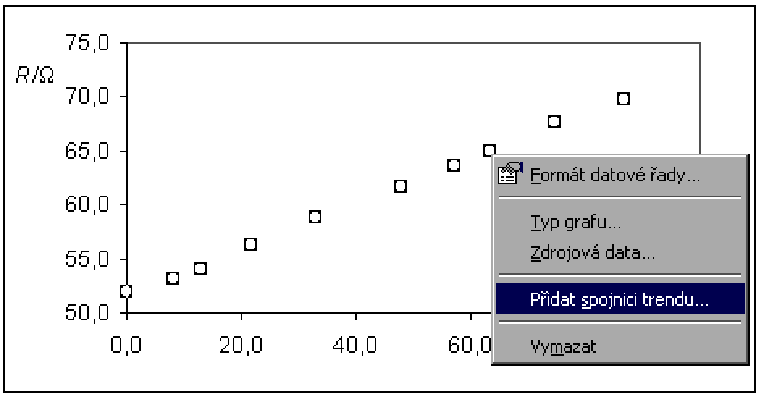
d) Jako vztažnou teplotu zvolte $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$ a stanovte odpor R_1 při vztažné teplotě a teplotní součinitel odporu α_1 ve vztahu

$$R = R_1 \left[1 + \alpha_1 (t - t_1)\right] \ . \tag{42}$$

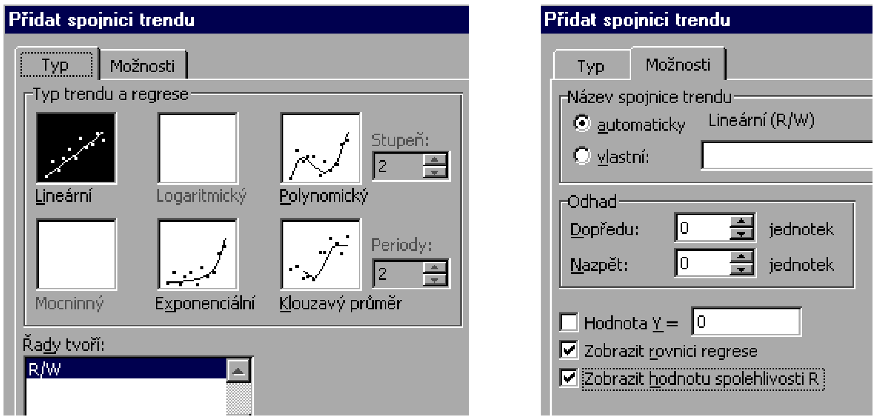
Provedení úlohy

Cívečku z měděného drátu vložíme na dno zkumavky a vývody cívečky připojíme k ohmmetru. Zkumavku uzavřeme a spolu s přesným teploměrem ji prostrčíme korkovou zátkou, která tvoří víko termosky s horkou vodou. Po dosažení tepelné rovnováhy změříme teplotu lázně a odpor cívečky. Teplou vodu v termosce postupně nahrazujeme vodou studenou a měření opakujeme při různých teplotách. Naposled měříme ve směsi ledu a vody. Výsledky měření zapíšeme do tabulky v Excelu a vytvoříme *XY bodový graf* – variantu bez spojovací čáry.

A) V grafu označíme datovou řadu naměřených hodnot. Z místní nabídky pak vybereme položku **Přidat spojnici trendu**, na kartě **Typ** zvolíme *Lineární* a na kartě **Možnosti** zaškrtneme *Zobrazit rovnici regrese* a *Zobrazit koeficient spolehlivosti R* (obr. 3.3, 3.4 a 3.5). Na obrazovce se objeví regresní přímka, zápis regresní funkce, ze kterého vyčteme koeficienty a a b, a koeficient determinace r^2. Počet desetinných míst můžeme upravit formátováním.



Obr. 3.3



Obr. 3.4, 3.5

B) Podle obr. 3.6 vybereme oblast 2×5 buněk a v *řádku vzorců* zvolíme statistickou funkci LINREGRESE. Objeví se dialogové okno, ve kterém doplníme pole hodnot y, pole hodnot x a parametry B a S. Po stisku kláves CTRL+SHIFT+ENTER se provede výpočet a ve vybrané oblasti buněk se vypíší hodnoty a, b, r^2 a další užitečné statistické údaje, z nichž využijeme především *směrodatné chyby koeficientů* a *a* b:

b	a
s_b	s_a
r^2	s_y
F	f
S_{reg}	S_{rezid}

$f = n - p$ ... počet *stupňů volnosti* (počet naměřených hodnot − počet parametrů regresní funkce),

$S_{\mathrm{reg}} = \sum (y - \overline{y})^2$ ... regresní součet čtverců,

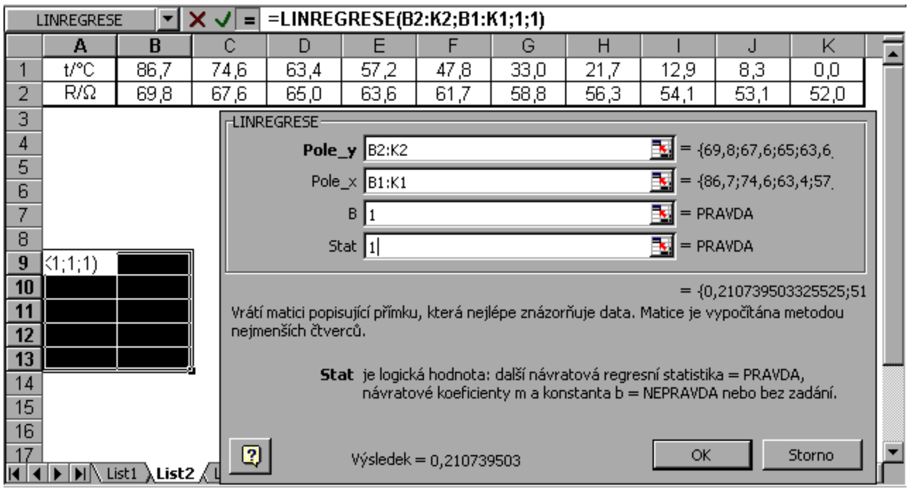
$S_{\mathrm{rezid}} = S(a, b)$ ... zbytkový součet čtverců,

$s_y = \sqrt{\dfrac{S_{\mathrm{rezid}}}{f}}$ ... směrodatná chyba odhadu y,

$F = \dfrac{f \cdot S_{\mathrm{reg}}}{S_{\mathrm{rezid}}}$,

$s_b = b\sqrt{\dfrac{S_{\mathrm{rezid}}}{f S_{\mathrm{reg}}}}$ ... směrodatná chyba koeficientu b,

$s_a = s_b\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum x_i^2}$ ... směrodatná chyba koeficientu a.



Obr. 3.6

Body v grafu, které zobrazují výsledky měření, se nacházejí v těsné blízkosti regresní přímky. Tomu odpovídá i hodnota $r^2 = 0,9989$ koeficientu determinace, která je jen nepatrně menší než 1. Tím je potvrzena lineární závislost odporu na teplotě v prozkoumaném intervalu.

Srovnáním regresní funkce $y = bx + a = (0{,}2107 \pm 0{,}0025)x + (51{,}65 \pm 0{,}12)$ a vztahu $R = R_0(1 + \alpha_0 t)$ dostaneme:

$$R_0 = (51{,}65 \pm 0{,}12)\ \Omega\,, \qquad R_0\alpha_0 = (0{,}2107 \pm 0{,}0025)\ \Omega \cdot \mathrm{K}^{-1}\,,$$

$$\alpha_0 = 0{,}004079\left[1 \pm \left(\frac{0{,}12}{51{,}65} + \frac{0{,}0025}{0{,}2107}\right)\right]\ \mathrm{K}^{-1} = (4{,}08 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\,.$$

Srovnáním regresní funkce a vztahu

$$R = R_1[1 + \alpha_1(t - t_1)] = R_1 - R_1\alpha_1 t_1 + R_1\alpha_1 t$$

dostaneme

$$\{R_1\} = a + b\{t_1\}\,, \quad R_1 = [(51{,}65 \pm 0{,}12) + (4{,}21 \pm 0{,}05)]\Omega = (55{,}86 \pm 0{,}17)\ \Omega\,,$$

$$\{\alpha_1\} = \frac{b}{R_1} = \frac{0{,}2107}{55{,}86}\left[1 \pm \left(\frac{0{,}0025}{0{,}2107} + \frac{0{,}17}{55{,}86}\right)\right] = (3{,}77 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}\,.$$

Všimněte si, jak se změnila hodnota teplotního součinitele odporu α při změně vztažné teploty.

3.3 Regrese, které lze snadno převést na lineární

Některé funkce jedné nezávisle proměnné můžeme vhodnou substitucí převést na funkce lineární a vyšetřovat je lineární regresí. Několik příkladů je v následující tabulce:

Původní funkce	Substituce	Upravená funkce
$y = a + \dfrac{b}{x}$	$\xi = \dfrac{1}{x}$	$y = a + b\xi$
$y = a + b\ln x$	$\xi = \ln x$	$y = a + b\xi$
$y = ax^b$	$\eta = \ln y,\ A = \ln a,\ \xi = \ln x$	$\eta = A + b\xi$
$y = a\mathrm{e}^{bx}$	$\eta = \ln y,\ A = \ln a$	$\eta = A + bx$
$y = a\mathrm{e}^{\frac{b}{x}}$	$\eta = \ln y,\ A = \ln a,\ \xi = \dfrac{1}{x}$	$\eta = A + b\xi$

Příklad 6: Určení závislosti odporu termistoru NTC na teplotě
Úkoly:

a) Změřte odpor termistoru při různých teplotách v intervalu 0 °C až 90 °C.
b) Sestrojte graf závislosti odporu na teplotě.
c) Ověřte, že závislost odporu na teplotě je popsána vztahem

$$R = A\mathrm{e}^{\frac{B}{T}} \tag{43}$$

a určete hodnoty konstant A a B.

Provedení úlohy

Při měření postupujeme stejně jako v příkladu 5. (Můžeme také obě úlohy spojit do jediné a měřit obě závislosti současně, jako jsme to provedli v našich ukázkách.) Výsledky měření zapíšeme do tabulky v Excelu.

Ověřovaný vztah zlogaritmujeme a substitucí převedeme na vztah lineární:

$$\ln\{R\} = \ln\{A\} + \frac{B}{T}\,, \qquad y = \ln\{R\},\ a = \ln\{A\},\ x = \frac{1}{T}\,, \qquad y = a + Bx\,.$$

Tabulku doplníme o řádky s hodnotami $1/T$ (oblast proměnné x) a $\ln\{R\}$ (oblast proměnné y). Z těchto dvou řádků sestrojíme podobně jako v 5. příkladu *XY bodový graf* a provedeme lineární regresi pomocí lineárního trendu grafu $y = f(x)$ a pomocí maticového vzorce s funkcí LINREGRESE (obr. 3.7).

I v tomto případě body zobrazující výsledky měření leží v těsné blízkosti regresní přímky a koeficient determinace se blíží k jedné, což potvrzuje platnost ověřovaného vztahu. Z tabulky vyčteme:

$$B = (2\,415 \pm 22)\ \mathrm{K}\,, \qquad a = \ln\{A\} = -1{,}478 \pm 0{,}072\,.$$

Vypočítáme hodnotu a směrodatnou chybu veličiny A.

$$\{A\} = \mathrm{e}^a\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\{A\}}{\mathrm{d}a} = \mathrm{e}^a\,, \qquad \mathrm{d}\{A\} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{d}a\,.$$

Hodnota veličiny A leží v intervalu

$$\{A\} = \mathrm{e}^a \pm \mathrm{e}^a \cdot s_a = 0{,}228(1 \pm 0{,}072)\,, \qquad A = (0{,}228 \pm 0{,}016)\ \Omega\,.$$

Nyní můžeme dopočítat poslední řádek tabulky, kde jednotlivým teplotám měření přiřadíme hodnoty výrazu

$$A\mathrm{e}^{\frac{B}{T}} = \mathrm{e}^{a+\frac{B}{T}}\,.$$

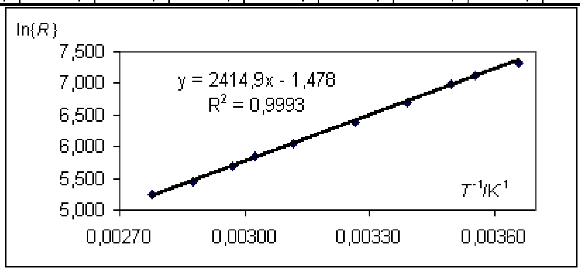
Do buňky `B6` vložíme vzorec `=EXP($B$9+$A$9*B4)` a zbytek řádku doplníme vyplňovacím táhlem.

Nakonec z prvního, druhého a posledního řádku tabulky sestrojíme graf, ve kterém zobrazíme jednotlivé výsledky měření a předpokládaný průběh závislosti odporu termistoru na teplotě (obr. 3.8).

B6 = =EXP($B$9+$A$9*B4)

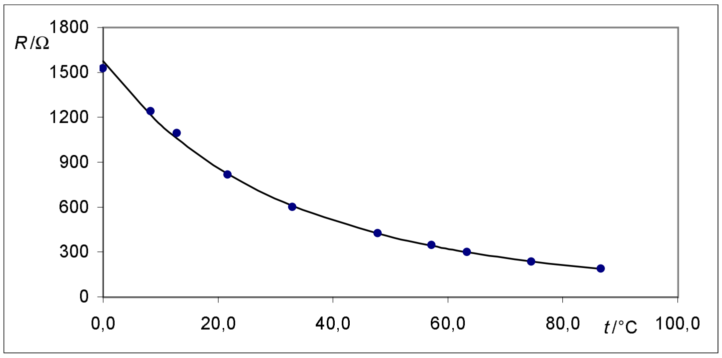
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t/°C	86,7	74,6	63,4	57,2	47,8	33,0	21,7	12,9	8,3	0,0
2	R/Ω	188	233	299	344	424	598	815	1094	1240	1525
3	T/K	359,9	347,8	336,6	330,4	321,0	306,2	294,9	286,1	281,5	273,2
4	T^{-1}/K^{1}	0,00278	0,00288	0,00297	0,00303	0,00312	0,00327	0,00339	0,00350	0,00355	0,00366
5	ln{R}	5,236	5,451	5,700	5,841	6,050	6,394	6,703	6,998	7,123	7,330
6	A exp(B/T)	187,3	236,6	298,1	341,0	422,5	607,8	822,3	1057,9	1214,4	1576,2

	A	B
9	2414,8531	-1,478
10	22,378856	0,0722
11	0,9993134	0,0205
12	11644,093	8
13	4,8735553	0,0033



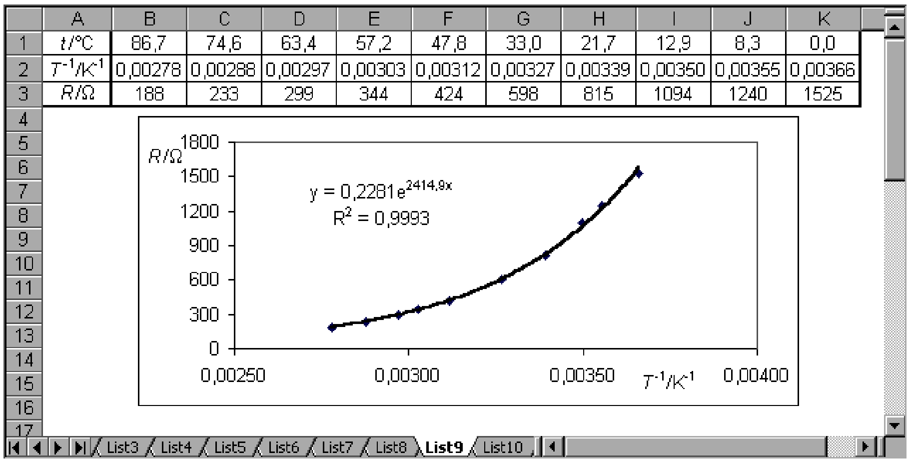
List1 List2 List3 List4 List5 List6 List7 List8

Obr. 3.7



Obr. 3.8

Pokud bychom chtěli pouze určit hodnoty veličin A, B a koeficient determinace, dojdeme k cíli rychleji podle obr. 3.9 užitím exponenciální regrese vztahu $R = A\mathrm{e}^{Bx}$, kde $x = 1/T$. Sestrojíme graf závislosti R na $1/T$, který doplníme o *spojnici exponenciálního trendu* a zobrazíme *rovnici regrese* a *koeficient spolehlivosti* jako v příkladu 5. Z rovnice regrese přímo čteme hodnoty veličin A a B.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t/°C	86,7	74,6	63,4	57,2	47,8	33,0	21,7	12,9	8,3	0,0
2	T^{-1}/K^{-1}	0,00278	0,00288	0,00297	0,00303	0,00312	0,00327	0,00339	0,00350	0,00355	0,00366
3	R/Ω	188	233	299	344	424	598	815	1094	1240	1525

Obr. 3.9

3.4 Lineární regrese funkce několika nezávisle proměnných

Počítačové statistické programy si dovedou poradit i s výpočtem lineární regrese funkce několika nezávisle proměnných x_1, x_2, …, x_r

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_r x_r \,. \tag{44}$$

Ve statistickém souboru n výsledků měření jsou jednotlivým r-ticím hodnot nezávisle proměnných $(x_1, x_2, \ldots, x_r)_i$ přiřazeny hodnoty y_i. Lineární regresí hledáme takové hodnoty koeficientů b_0 až b_r regresní funkce, aby součet

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_1, x_2, \ldots, x_r)_i]^2$$

byl co nejmenší.

Pro $r = 2$ by regresní funkce byla zobrazena rovinou v třírozměrném prostoru se souřadnicovou soustavou Ox_1x_2y.

V Excelu dostaneme použitím maticového vzorce s funkcí LINREGRESE tabulku

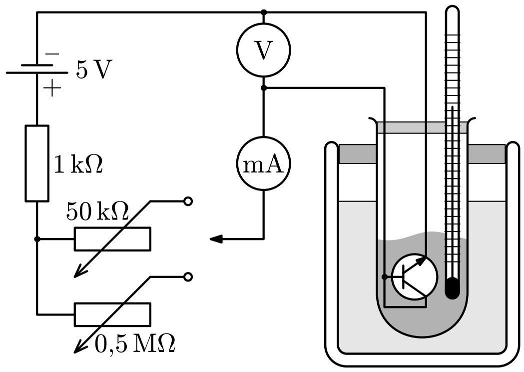
b_r	b_{r-1}	b_{r-2}	…	b_1	b_0
s_{b_r}	$s_{b_{r-1}}$	$s_{b_{r-2}}$	…	s_{b_1}	s_{b_0}
r^2	s_y	$\times$	…	$\times$	$\times$
F	f	$\times$	…	$\times$	$\times$
S_{reg}	S_{rezid}	$\times$	…	$\times$	$\times$

kde jednotlivé položky mají obdobný význam jako při lineární regresi funkce jedné nezávisle proměnné (viz str. 30).

Příklad 7: Tranzistor jako senzor teploty

Na obr. 3.10 je schéma obvodu pro měření vlastností tranzistoru ve funkci PN senzoru teploty. K menšímu křemíkovému tranzistoru NPN (např. KC509) se spojeným kolektorem a bází připájíme vodiče a zasuneme jej s přesným teploměrem do zkumavky s malým množstvím silikonové vazelíny. Zkumavku ponoříme do termosky s vodou, která slouží jako termostat. Měníme teplotu lázně a sledujeme, jak se mění napětí na tranzistoru v závislosti na procházejícím proudu a na teplotě. Měříme i v tajícím ledu a nakonec zkumavku umístíme do baňky s vařící vodou.

Výsledky měření jsou přehledně zapsány v první tabulce na obr. 3.11 a zobrazeny v grafu na obr. 3.12



Obr. 3.10

Při malých proudových hustotách platí pro napětí na tranzistoru teoretický vztah

$$U = U_{g0} - AT + BT\ln\{I\}\,, \tag{45}$$

kde U_{g0}, A a B jsou konstanty a T je absolutní termodynamická teplota. Úkolem měření je ověření vztahu (45) a určení konstant A a B.

Substitucí $y = U$, $x_1 = T$, $x_2 = T\ln\{I\}$, $b_0 = U_{g0}$, $b_1 = -A$ a $b_2 = B$ převedeme vztah (45) na lineární vztah

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2\,, \tag{46}$$

vhodný pro lineární regresi. Všech 30 naměřených hodnot napětí a příslušné absolutní teploty a hodnoty součinu $T\ln\{I\}$ zapíšeme do druhé tabulky na obr. 3.11 (ze které je zachycena jen malá část) a pomocí maticového vzorce s funkcí LINREGRESE provedeme výpočet. Z matice výsledků přímo odečteme hodnoty

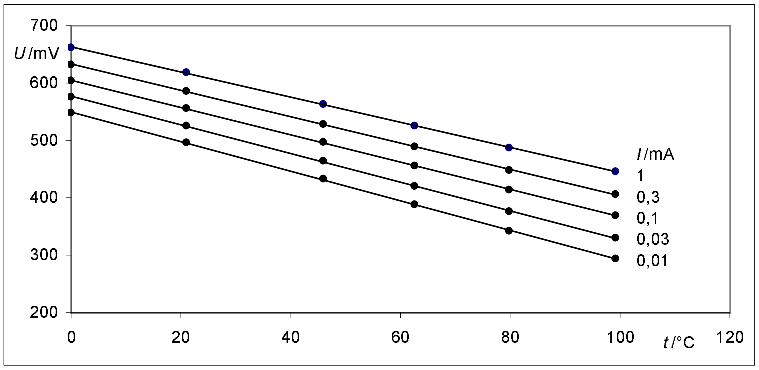
$$U_{g0} = 1{,}258\ \mathrm{V},\ \ A = 1{,}57\cdot 10^{-3}\ \mathrm{V\cdot K^{-1}},\ \ B = 8{,}91\cdot 10^{-5}\ \mathrm{V\cdot K^{-1}}.$$

Vysoká hodnota koeficientu determinace $r^2 = 0{,}9998$ svědčí o tom, že měření bylo přesné a vztah (45) dobře vystihuje vlastnosti použitého tranzistoru.

L9 = {=LINREGRESE(L4:AO4;L2:AO3;1;1)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	
1			*t*/°C												
2			0	21	46	62,6	79,8	99,2			*T*/K	273,15	294,15	319,15	
3		1	662	618	563	525	487	446			*T**ln{*I*}/K	-1886,85	-2031,92	-2204,61	-2
4		0,3	632	586	528	489	448	406			*U*/V	0,662	0,618	0,563	
5	*I*/mA	0,1	604	556	497	456	414	369	*U*/mV						
6		0,03	576	525	464	420	376	330			8,91E-05	-0,00157	1,257998		
7		0,01	548	496	433	388	342	294			4,25E-07	7,77E-06	0,002188		
8											0,999842	0,001238	#N/A		
9											85389,4	27	#N/A		
10											0,261568	4,14E-05	#N/A		

Obr. 3.11



Obr. 3.12

Úloha

6. Závislost napětí tranzistoru na teplotě při stálém proudu $I = 1$ mA v příkladu 7 (horní řada naměřených hodnot) můžeme vyjádřit ve tvaru $U = U_0 - At$. Užitím lineární regrese určete U_0 a A.

3.5 Polynomická regrese

Předpokládejme funkční závislost popsanou polynomickou funkcí jedné nezávisle proměnné ve tvaru

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ \ldots\ + b_r x^r\,. \tag{47}$$

Substitucí $x_1 = x,\ x_2 = x^2,\ \ldots\ x_r = x^r$ ji převedeme na funkci r nezávisle proměnných (44)

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_r x_r\,,$$

na kterou aplikujeme funkci LINREGRESE. Polynomickou regresi tak převedeme na lineární.

Příklad 8: Teplotní objemová roztažnost vody

V intervalu $\langle 0\ °\mathrm{C}, 40\ °\mathrm{C}\rangle$ vyšetřete závislost měrného objemu vody na teplotě a vyjádřete ji ve tvaru

$$v = v_1[1 + \beta_1 \Delta t + \beta_2 (\Delta t)^2 + \beta_3 (\Delta t)^3]\,, \tag{48}$$

kde v_1 je měrný objem při vztažné teplotě $t_1 = 20\ °\mathrm{C}$ a $\Delta t = t - t_1$.

Řešení

Vycházíme z tabulky závislosti hustoty vody na teplotě publikované v tabulkách [1]. Pro vybrané teploty přepíšeme hustoty do tabulky v Excelu, kterou doplníme o sloupce Δt, $(\Delta t)^2$, $(\Delta t)^3$ a $v = 1/\varrho$. Dál můžeme postupovat dvěma způsoby – oba byly použity na obr. 3.13:

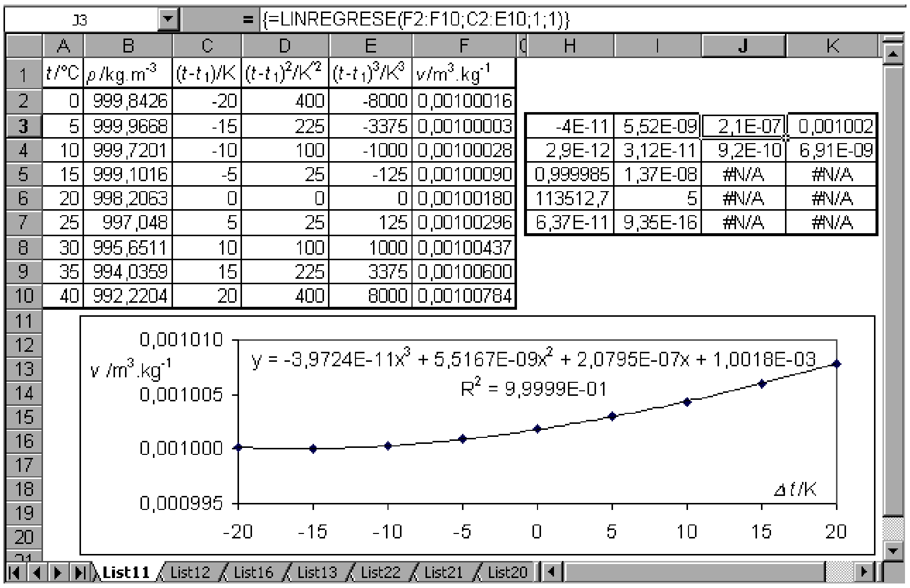
A) Sestrojíme *XY bodový graf* závislosti měrného objemu v na Δt a přidáme *spojnici trendu* s volbami *Typ – Polynomický, Stupeň 3, Zobrazit rovnici regrese* a *Zobrazit koeficient spolehlivosti*. Zatím jsme nevyužili sloupce $(\Delta t)^2$ a $(\Delta t)^3$.

B) Vybereme oblast 4×5 buněk a do ní vložíme maticový vzorec LINREGRESE v němž do pole hodnot x zařadíme sloupce Δt, $(\Delta t)^2$ a $(\Delta t)^3$ a do pole hodnot y sloupec v. Dostaneme tabulku, ve které jsou nejen koeficienty regresní funkce, ale i jejich směrodatné odchylky.

Porovnáním regresní funkce se vztahem (48) dostaneme:

$$\{v_1\} = b_0\,, \qquad \{\beta_1\} = \frac{b_1}{b_0}\,, \qquad \{\beta_2\} = \frac{b_2}{b_0}\,, \qquad \{\beta_3\} = \frac{b_3}{b_0}\,,$$

$$v_1 = 1{,}0018 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1}}\,, \qquad \beta_1 = 2{,}08 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}\,,$$
$$\beta_2 = 5{,}51 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K^{-2}}\,, \qquad \beta_3 = -4{,}0 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{K^{-3}}\,.$$



J3 = {=LINREGRESE(F2:F10;C2:E10;1;1)}

	A	B	C	D	E	F	H	I	J	K
1	t/°C	ϱ /kg.m^{-3}	$(t-t_1)$/K	$(t-t_1)^2$/K^2	$(t-t_1)^3$/K^3	v/m^3.kg^{-1}				
2	0	999,8426	-20	400	-8000	0,00100016				
3	5	999,9668	-15	225	-3375	0,00100003	-4E-11	5,52E-09	2,1E-07	0,001002
4	10	999,7201	-10	100	-1000	0,00100028	2,9E-12	3,12E-11	9,2E-10	6,91E-09
5	15	999,1016	-5	25	-125	0,00100090	0,999985	1,37E-08	#N/A	#N/A
6	20	998,2063	0	0	0	0,00100180	113512,7	5	#N/A	#N/A
7	25	997,048	5	25	125	0,00100296	6,37E-11	9,35E-16	#N/A	#N/A
8	30	995,6511	10	100	1000	0,00100437				
9	35	994,0359	15	225	3375	0,00100600				
10	40	992,2204	20	400	8000	0,00100784				

Obr. 3.13

Příklad 9: Tepelné záření wolframového vlákna

Úkoly:

a) Z údajů v tabulce (tab. 1 na obr. 3.14) vyjádřete mocninnou regresí závislost rezistivity wolframu na Celsiově teplotě ve tvaru $\{\varrho\} = A \cdot \{T\}^B$.

b) Proměřte závislost proudu, který prochází malou žárovkou, na připojeném napětí. (V naší ukázce byla použita žárovička s provozními údaji 24 V, 0,1 A.) Z naměřených hodnot vypočítejte odpor vlákna žárovky a její příkon při zvolených hodnotách napětí. Zvláště podrobně postupujte na začátku měření při malých hodnotách napětí.

c) Z hodnot odporu při malých hodnotách napětí určete odpor R_1 vlákna žárovky při nulovém proudu, kdy má vlákno teplotu laboratoře t_1.

d) vypočítejte, jak se v závislosti na napětí měnila termodynamická teplota vlákna žárovky. Vzhledem k velmi malému teplotnímu součiniteli délkové roztažnosti wolframu ($4{,}3 \cdot 10^{-6}$ K^{-1}) můžeme předpokládat, že rozměry vlákna jsou téměř konstantní a $R/R_1 \approx \varrho/\varrho_1$.

e) Vypočítejte poměr P/T^4 pro zvolené hodnoty napětí. Posuďte, jak se v závislosti na teplotě měnila *emisivita* wolframového vlákna. (Tabulkové hodnoty: 0,23 při 1500 °C; 0,28 při 2000 °C.)

Provedení úlohy

a) Data z tab. 1 vyneseme do grafu na obr. 3.15, který doplníme o mocninný trend. Z rovnice trendu odečteme $A = 0{,}00572$, $B = 1{,}21047$.

b) Výsledky měření napětí a proudů a výpočtů odporů a příkonů zaplňují první čtyři sloupce v tabulce tab. 2 na obr. 3.14.

c) Z hodnot naměřených do 0,3 V vytvoříme graf na obr. 3.16. Z rovnice polynomického trendu vyčteme hodnotu $R_1 = 18{,}693\ \Omega \approx 18{,}7\ \Omega$, kterou zapíšeme do tab. 3 i s příslušnou teplotou $t_1 = 23\ °\mathrm{C}$.

d) Vypočítáme sloupec hodnot T užitím vztahu

$$\frac{R}{R_1} \approx \frac{\varrho}{\varrho_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^B , \qquad T = T_1 \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\frac{1}{B}} .$$

e) Vypočítáme sloupec P/T^4. Od teploty 1000 K, při které už můžeme zanedbat záření dopadající na vlákno z okolí, hodnota výrazu P/T^4 jen mírně stoupá, což svědčí o platnosti Stefanova-Boltzmannova zákona s tím, že emisivita wolframového vlákna se s rostoucí teplotou zvyšuje.

T/K	ρ/10^{-8}Ω.m
300	5,65
500	10,56
1000	24,93
1500	40,36
2000	56,67
2500	73,91
3000	92,04
3500	111,1

tab. 1

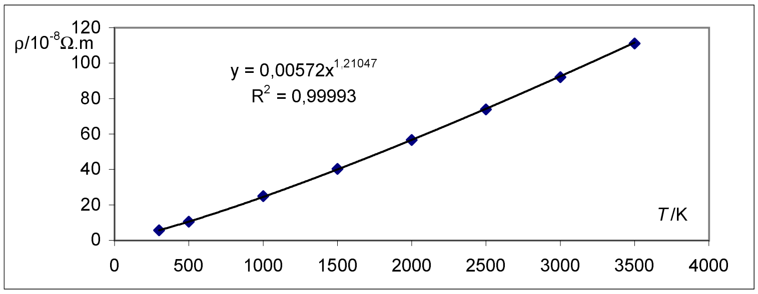
t_1/°C	23
T_1/K	296
R_1/Ω	18,7

tab. 3

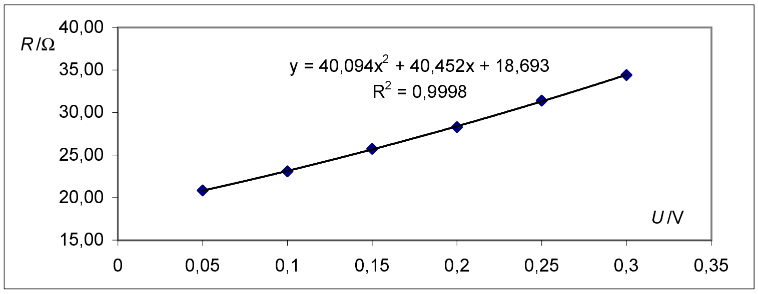
U/V	I/mA	R/Ω	P/W	T/K	$P.T^{-4}$/(W.K^{-4})
0,05	2,40	20,83	0,000120	324	1,09E-14
0,1	4,33	23,09	0,000433	352	2,81E-14
0,15	5,83	25,73	0,000875	385	3,97E-14
0,2	7,07	28,29	0,001414	417	4,69E-14
0,25	7,96	31,41	0,001990	454	4,67E-14
0,3	8,72	34,40	0,002616	490	4,55E-14
0,5	11,2	44,64	0,005600	607	4,11E-14
1	16,0	62,50	0,016000	802	3,87E-14
2	23,7	84,39	0,047400	1028	4,25E-14
3	29,6	101,35	0,088800	1196	4,34E-14
4	35,0	114,29	0,140000	1321	4,60E-14
5	40,1	124,69	0,200500	1419	4,94E-14
10	59,9	166,94	0,599000	1806	5,63E-14
15	77,0	194,81	1,155000	2052	6,52E-14
20	91,0	219,78	1,820000	2267	6,90E-14
25	104	240,38	2,600000	2441	7,33E-14

tab.2

obr. 3.14



Obr. 3.15



Obr 3.16

Úlohy:

7. Porovnejte hodnoty členů $\beta_1 \Delta t$, $\beta_2 (\Delta t)^2$ a $\beta_3 (\Delta t)^3$ ve výrazu (48)

a) pro $\Delta t = 1$ K, b) pro $\Delta t = 5$ K, c) $\Delta t = 20$ K.

Určete, v jakém intervalu můžeme pro závislost měrného objemu vody na teplotě použít přibližný vztah

$$v \approx v_1 (1 + \beta_1 \Delta t),$$

nemá-li chyba v určení $\Delta v = v - v_1$ překročit 10 %.

8. Užitím polynomické regrese vyšetřete závislost hustoty vody na teplotě v intervalu $\langle 0\ ^\circ\mathrm{C}, 40\ ^\circ\mathrm{C} \rangle$ a vyjádřete ji ve tvaru

$$\varrho = \varrho_1 [1 + \beta_1 \Delta t + \beta_2 (\Delta t)^2 + \beta_3 (\Delta t)^3], \tag{49}$$

kde ϱ_1 je hustota při vztažné teplotě $t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$ a $\Delta t = t - t_1$. Výsledek porovnejte s výsledkem příkladu 8.

9. Stejným způsobem jako v příkladu 8 a úloze 2 vyšetřete závislost měrného objemu a hustoty rtuti na teplotě v intervalu $\langle 0\ ^\circ\mathrm{C}, 40\ ^\circ\mathrm{C} \rangle$. Použijte polynomickou regresi 2. stupně. Vyjděte z tabulky hustoty rtuti

$t/^\circ\mathrm{C}$	$\varrho/\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$
0	13 595,08
5	13 582,76
10	13 570,44
15	13 558,15
20	13 545,87
25	13 533,62
30	13 521,37
35	13 509,14
40	13 496,93

Porovnejte teplotní roztažnost rtuti a vody v daném intervalu.

Určete, v jakém intervalu můžeme pro závislost měrného objemu rtuti na teplotě použít přibližný vztah

$$v \approx v_1 (1 + \beta_1 \Delta t),$$

nemá-li chyba v určení $\Delta v = v - v_1$ překročit 1 %.

10. V příkladu 9 se pro $U > 0{,}5$ V dají závislosti odporu žárovky a příkonu žárovky na připojeném napětí vyjádřit ve tvaru:

$$\{R\} = C \cdot \{U\}^D, \quad \{P\} = E \cdot \{U\}^F.$$

Přesvědčte se o tom mocninnou regresí a určete hodnoty konstant C, D, E a F.

Literatura

[1] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fysika*. 3. vyd., Praha: SNTL, 1961.

[2] Brož, J. a kol.: *Základy fyzikálních měření*. Praha: SPN, (I) 1966, (II) 1974.

[3] Brož, J., Roskovec, V., Valouch, M.: *Fyzikální a matematické tabulky*. Praha: SNTL, 1980.

[4] Šedivý, P.: *Pokusy s operačními zesilovači*. Knihovnička fyzikální olympiády č. 11, 2. vyd., Hradec Králové: Vydavatelství MAFY, 1998.

[5] Keller, F. J., Gettys, W, E., Skove, M. J.: *Physics*. 2nd ed., New York: McGraw–Hill, Inc, 1993.

[6] Daďo, S., Kreidl, M.: *Senzory a měřicí obvody*. 2. vyd., Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999.

[7] Ražnjevič, K.: *Tepelné tabulky a diagramy*. Bratislava: Alfa, 1969.

[8] Kol.: *Spravočnik po fizikotěchničeskim osnovam kriogeniki*. Moskva: Eněrgija, 1973.

[9] Kol.: *Messen in der Prozeßtechnik*. Berlin, München: Siemens Aktiengesellschaft, 1974.

[10] *Properties of Tungsten*. Midwest Tungsten Service, 2002. www.mts@tungsten.com

[11] *Matemtické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. Dotisk 3. vyd., Praha: Prometheus, 1995.

Výsledky úloh

1. 233 °C.

2. 262,8 mm.

3. $\Delta l_{\mathrm{mos}} = 0{,}108$ mm, $\Delta l_{\mathrm{in}} = 0{,}012$ mm.

4. $S = \dfrac{V(\beta_{\mathrm{Hg}} - \beta_{\mathrm{sk}})\Delta t}{l} = 7{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{mm}^2,\ d = \sqrt{\dfrac{4S}{\pi}} = 0{,}097$ mm.

5. 1020 K $\approx$ 750 °C.

6. $U_0 = (662{,}9 \pm 0{,}8)$ mV, $A = (2{,}19 \pm 0{,}01)\ \mathrm{mV} \cdot \mathrm{K}^{-1}$.

7. a) $2{,}1 \cdot 10^{-4}$, $5{,}5 \cdot 10^{-6}$, $-4{,}0 \cdot 10^{-8}$
b) $1{,}0 \cdot 10^{-3}$, $1{,}4 \cdot 10^{-4}$, $-5{,}0 \cdot 10^{-6}$
c) $4{,}2 \cdot 10^{-3}$, $2{,}2 \cdot 10^{-3}$, $-3{,}2 \cdot 10^{-4}$

$$0{,}1\beta_1 \Delta t = \beta_2(\Delta t)^2 + \beta_3(\Delta t)^3 \approx \beta_2(\Delta t)^2, \quad \Delta t \approx \frac{0{,}1\beta_1}{\beta_2} \approx 4\ \mathrm{K}.$$

8. Srovnáním regresní funkce
$$y = 4{,}1649 \cdot 10^{-5}x^3 - 5{,}4483 \cdot 10^{-3}x^2 - 2{,}0720 \cdot 10^{-1}x + 998{,}22$$
se vztahem (49) dostaneme
$$\beta_1 = -2{,}08 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}, \quad \beta_2 = -5{,}46 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{K}^{-2}, \quad \beta_3 = 4{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{K}^{-3}.$$
Koeficienty β_1 a β_2 se po zaokrouhlení liší od hodnot získaných v příkladu 4 jen znaménkem.

9. Srovnáním regresní funkce
$$y = 6{,}271 \cdot 10^{-13}x^2 + 1{,}337 \cdot 10^{-8}x + 7{,}382 \cdot 10^{-5}$$
se vztahem $v = v_1(1 + \beta_1\Delta t + \beta_2(\Delta t)^2$ dostaneme:
$$v_1 = 7{,}382 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^3, \quad \beta_1 = 1{,}81 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}, \quad \beta_2 = 8{,}5 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{K}^{-2}.$$
Chyba 1 % vznikne, jestliže
$$\beta_2(\Delta t)^2 = 0{,}01\beta_1\Delta t, \qquad \Delta t = \frac{0{,}01\beta_1}{\beta_2} \approx 210\ \mathrm{K}.$$

10. $C = 62{,}167$, $D = 0{,}4255$; $E = 0{,}0161$, $F = 1{,}5745$.