POHYBY TĚLESA V ODPORUJÍCÍM PROSTŘEDÍ

Studijní text pro řešitele FO, kat. B

Ivo Volf, Přemysl Šedivý

Úvod

Základní zákon klasické mechaniky, **zákon síly**, který obvykle zapisujeme ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}\,, \tag{1}$$

umožňuje určit časový průběh pohybu hmotného bodu, známe-li jeho počáteční polohu a rychlost a víme-li, jaká výsledná síla na něj během pohybu působí. V některých jednoduchých případech vystačíme s elementárními znalostmi matematiky. Víte například, že hmotný bod, na který působí stálá síla $\boldsymbol{F}$ ve směru pohybu, koná *rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb*, při kterém platí

$$a = \frac{F}{m} = \text{konst.}, \qquad v = at + v_0\,, \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\,. \tag{2}$$

Působí-li stálá síla proti směru pohybu, nastává *rovnoměrně zpomalený pohyb* a platí

$$a = \frac{F}{m} = \text{konst.}, \qquad v = v_0 - at\,, \qquad s = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2\,. \tag{3}$$

Jednoduchými kinematickými zákony se řídí i *vodorovný vrh v homogenním tíhovém poli ve vakuu*, při kterém na hmotný bod působí pouze stálá tíhová síla, kolmá ke směru počáteční rychlosti:

$$x = v_0 t\,, \qquad y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2\,, \qquad v_x = v_0\,, \qquad v_y = -gt\,. \tag{4}$$

Vedle sil, které vyvolávají pohyby těles, jako je tažná síla motoru automobilu, síla motouzu, kterým táhneme sáňky nebo tíhová síla při volném pádu, působí při reálných pohybech na tělesa i *odporové síly* namířené proti směru okamžité rychlosti. Mezi ně patří především *smykové tření*, jehož velikost můžeme v prvním přiblížení považovat za nezávislou na velikosti okamžité rychlosti, a síly *odporu prostředí* – nejčastěji vzduchu, které naopak jsou na velikosti okamžité rychlosti velmi závislé.

V tomto studijním textu se budeme zabývat řešením úloh o pohybech hmotných bodů, při kterých nemůžeme odporové síly zanedbat. Tyto úlohy se obvykle dají pomocí prostředků středoškolské matematiky řešit jen částečně.

Všude, kde nebudeme umět nalézt analytický popis časového průběhu pohybu, využijeme možnosti jednoduchého a dostatečně přesného počítačového modelování.

Ve všech úlohách počítáme s tíhovým zrychlením $g = 9{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ a s hustotou vzduchu $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

1. Pohyby brzděné pouze smykovým třením

Velikost třecí síly F_t při smykovém tření určíme pomocí vztahu

$$F_t = fF_n \,, \tag{5}$$

kde F_n je velikost normálové síly, která přitlačuje pohybující se těleso k podložce a f je součinitel smykového tření. Pokud se při pohybu tělesa uplatní pouze stálá „hybná síla“ $\boldsymbol{F}$ ve směru pohybu a smykové tření, vycházíme z *pohybové rovnice*

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_t = m\boldsymbol{a} \,. \tag{6}$$

Mohou nastat tři případy:

a) $F > F_t$. V tomto případě probíhá pohyb rovnoměrně zrychlený, při kterém

$$a = \frac{F - F_t}{m} \,. \tag{7}$$

b) $F = F_t$. Pohyb je rovnoměrný.

c) $F < F_t$. Pohyb je rovnoměrně zpomalený. Zrychlení je namířeno proti směru okamžité rychlosti a má velikost

$$a = \frac{F_t - F}{m} \,. \tag{8}$$

Příklad 1
Sáňky i s nákladem mají hmotnost 60 kg; součinitel smykového tření mezi skluznicí a sněhem je 0,030.

a) Jak velkou tahovou silou musíme působit na motouz sáňek, abychom je udrželi v rovnoměrném pohybu rychlostí $2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ po vodorovné silnici? S jakým výkonem pracujeme? Motouz je odchýlen od vodorovného směru o 20° (obr. 1).

b) Jak velkou silou bychom museli sáňky táhnout při rozjíždění z klidu, aby během 4,0 s dosáhly rychlosti 3,0 m$\cdot$s^{-1}?

Řešení:

a) $m = 60$ kg , $f = 0{,}03$, $\alpha = 20°$, $v = 2{,}5$ m$\cdot$s^{-1}; $F =?$, $P =?$

Na sáňky působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, reakce silnice $\boldsymbol{R}$ a síla motouzu $\boldsymbol{F}$ (obr. 1). Při rovnoměrném pohybu se vodorovná složka $\boldsymbol{F}_1$ síly motouzu vzájemně ruší se silou smykového tření $\boldsymbol{F}_t$. Platí:

$$F_t = f(F_G - F_2) = F_1 \,, \qquad f(mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha \,, \tag{9}$$

$$F = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \,. \tag{10}$$

Pracujeme s výkonem

$$P = F_1 v = Fv\cos\alpha \,. \tag{11}$$

Pro dané hodnoty: $F = 19$ N , $P = 44$ W .

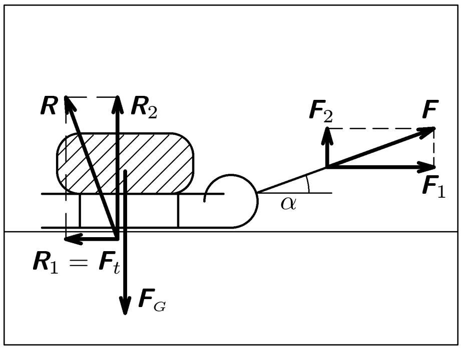
b) $m = 60$ kg , $f = 0{,}03$, $\alpha = 20°$, $v_1 = 3{,}0$ m$\cdot$s^{-1} , $t_1 = 4,0$ s ; $F =?$

Při rozjíždění sáněk je vodorovná složka síly motouzu větší než smykové tření. Platí:

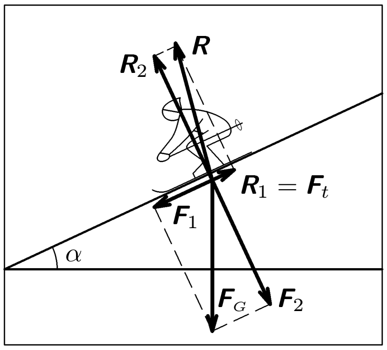
$$ma = F_1 - F_t = F\cos\alpha - f(mg - F\sin\alpha) \,, \tag{12}$$

$$F = \frac{fmg + ma}{\cos\alpha + f\sin\alpha} = \frac{fmg + m\dfrac{v_1}{t_1}}{\cos\alpha + f\sin\alpha} \,. \tag{13}$$

Pro dané hodnoty: $F = 65$ N .



Obr. 1



Obr. 2

Příklad 2
Lyžař sjíždí po svahu se sklonem 10°; součinitel smykového tření mezi lyžemi a sněhem je 0,050. Na jaké dráze by dosáhl rychlosti 50 km/h, kdyby na něj nepůsobil odpor vzduchu?

Řešení: $\alpha = 10°\,,\ f = 0{,}050\,,\ v = 50\ \mathrm{km} \cdot h^{-1} \doteq 13{,}9\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,;\ s = ?$

Na lyžaře působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce svahu $\boldsymbol{R}$ (obr.2). Pohyb lyžaře je vyvolán pohybovou složkou tíhové síly $\boldsymbol{F}_1$, jejíž účinek zmenšuje smykové tření $\boldsymbol{F}_t$ (obr. 2). Platí

$$a = \frac{F_1 - F_t}{m} = \frac{mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha}{m} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,, \qquad (14)$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v^2}{2a}\,. \qquad (15)$$

Pro dané hodnoty: $a = 1{,}22\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,\ s = 79\ \mathrm{m}\,.$

Tato úloha představuje značné zjednodušení děje, který probíhá na lyžařském svahu. Za daných předpokladů by lyžař mohl na dostatečně dlouhém svahu dosáhnout libovolné, třeba i nadzvukové rychlosti. Ze zkušenosti však víme, že ve skutečnosti odpor vzduchu při větších rychlostech lyžáře značně brzdí a jeho rychlost na daném svahu nemůže překročit určitou maximální hodnotu.

Úloha 1. Hokejový puk vystřelený po ledě opustil hokejku rychlostí 15 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a do mantinelu ve vzdálenosti 20 m narazil rychlostí 12 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Od mantinelu se odrazil rychlostí 10 $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na jaké další dráze se zastavil?

2. Odpor prostředí při laminárním obtékání tělesa

S laminárním obtékáním tělesa tekutinou se prakticky setkáváme jen při velmi pomalých pohybech malých tělísek. Velikost odporové síly je přímo úměrná rychlosti tělesa $F_o = kv\,;$ Konstanta úměrnosti závisí na tvaru a velikosti tělesa a na veličině η, která charakterizuje kapalinu nebo plyn a nazývá se *dynamická viskozita.* Pro laminární obtékání koule o poloměru r platí *Stokesův* vzorec

$$F_o = 6\pi r\eta v\,. \qquad (16)$$

Podle MFCh tabulek je při 20 °C
dynamická viskozita vody $1{,}00 \cdot 10^{-3}$ Pa·s, glycerolu 1,48 Pa·s.
Dynamická viskozita vzduchu při teplotě 0 °C je $17{,}1 \cdot 10^{-6}$ Pa·s.

Volný pád v klidném kapalném nebo plynném prostředí v homogenním tíhovém poli se řídí pohybovou rovnicí

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_v + \boldsymbol{F}_o = m\boldsymbol{g} - V\varrho\boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v} = m\boldsymbol{g} - m\frac{\varrho}{\varrho_0}\boldsymbol{g} - k\boldsymbol{v}\,, \tag{17}$$

kde $\boldsymbol{F}_G$ je tíhová síla, $\boldsymbol{F}_v$ je hydrostatický nebo aerostatický vztlak, $\boldsymbol{F}_o$ odporová síla, V objem tělesa, ϱ hustota prostředí a ϱ_0 hustota tělesa. Pro velikost okamžitého zrychlení dostáváme:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g(1 - \frac{\varrho}{\varrho_0}) - \frac{k}{m}v\,. \tag{18}$$

Z pohybové rovnice je zřejmé, že s rostoucí rychlostí padajícího tělesa se velikost zrychlení postupně zmenšuje a pohyb se stává rovnoměrným s určitou mezní rychlostí $\boldsymbol{v}_m$, při které je odporová síla v rovnováze se silou tíhovou a vztlakovou. Platí

$$mg - V\varrho g - kv_m = 0\,, \qquad v_m = \frac{V(\varrho - \varrho_0)g}{k}\,. \tag{19}$$

Jedná-li se o volný pád pevného tělíska ve vzduchu, můžeme aerodynamický vztlak obvykle zanedbat a pro velikost okamžitého zrychlení dostáváme:

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{k}{m}v\,. \tag{20}$$

Ani tato na první pohled jednoduchá diferenciální rovnice není řešitelná elementárními prostředky středoškolské matematiky. V článku 4. si ukážeme, jak lze modelovat časový průběh pohybu na osobním počítači jednoduchými numerickými prostředky. Přesné analytické řešení, které poněkud překračuje rámec středoškolské matematiky je pro úplnost uvedeno v závěrečném článku 5.

Příklad 3
Olověný brok o průměru 5 mm padá volně ve vysokém válci naplněném glycerolem. Určete velikost mezní rychlosti broku.

Řešení: $r = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ m, $\varrho = 1260$ kg$\cdot$m^{-3}, $\varrho_0 = 11300$ kg$\cdot$m^{-3}, $\eta =$ 1,48 Pa$\cdot s$; $v_m =$?

Ze vztahů (16) a (19) dostáváme

$$v_m = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_0 - \varrho)g}{6\pi r\eta} = \frac{2r^2 g(\varrho_0 - \varrho)}{9\eta}\,. \tag{21}$$

Pro dané hodnoty: $v_m = 9{,}2\ \mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$.

Úloha 2. Na základě předcházejícího příkladu navrhněte metodu měření dynamické viskozity kapalin.

Úloha 3. Jak rychle padají k zemi v klidném vzduchu kapičky vodní mlhy o průměru 0,010 mm?

3. Odpor prostředí při turbulentním obtékání tělesa

Při větších rychlostech, kdy se za tělesem tvoří víry, platí pro velikost odporové síly *Newtonův vztah*

$$F_o = \frac{1}{2} C S \varrho v^2 \,, \tag{22}$$

kde S je obsah příčného řezu tělesa kolmého ke směru rychlosti, ϱ je hustota tekutiny, v je velikost rychlosti tělesa vzhledem k tekutině a C je součinitel odporu, který závisí na tvaru tělesa. Pro dutou polokouli, jejíž dutina je natočena ve směru pohybu tělesa má hodnotu $C = 1{,}33$, pro kruhovou desku kolmou ke směru rychlosti $C = 1{,}12$, pro kouli $C = 0{,}48$. Vztah někdy potřebujeme znát ve vektorovém tvaru:

$$\boldsymbol{F}_o = -\frac{1}{2} C S \varrho v \boldsymbol{v} \,. \tag{23}$$

Pohyb tělesa v klidném vzduchu v homogenním tíhovém poli se při zanedbatelném aerodynamickém vztlaku řídí pohybovou rovnicí

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_G + \boldsymbol{F}_o = m\boldsymbol{g} - \frac{1}{2} C S \varrho v \boldsymbol{v} \,, \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} - \frac{C S \varrho v}{2m} \boldsymbol{v} \,. \tag{24}$$

Po dosažení mezní rychlosti se síly $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{F}_o$ navzájem ruší. Z toho odvodíme:

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C S \varrho}} \,. \tag{25}$$

Velikost okamžitého zrychlení při volném pádu je

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{C S \varrho v^2}{2m} \,. \tag{26}$$

Řešením této diferenciální rovnice, které ovšem překračuje rámec středoškolské fyziky, lze získat analytické vztahy popisující časový průběh volného pádu.

Odvodíme je v závěrečném článku 6. Dříve však v článku 4. jednoduše vytvoříme dostatečně přesný počítačový model, kterým můžeme analytické řešení nahradit.

Příklad 4
Jakou mezní rychlost bude mít lyžař z příkladu 2, můžeme-li jej považovat za těleso o hmotnosti $m = 85$ kg, jehož příčný řez má plošný obsah $S = 0,8$ m^2 a koeficient odporu $C = 0{,}55$?

Řešení: $\alpha = 10^\circ$, $f = 0{,}050$, $S = 0,8$ m^2 , $C = 0{,}55$; $v_m = ?$

Do pohybové rovnice

$$ma = F_1 - F_t - F_o = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{1}{2}CS\varrho v^2 \tag{27}$$

dosadíme $v = v_m$, $a = 0$ a odvodíme:

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg(sin\alpha - f\cos\alpha)}{CS\varrho}}\,. \tag{28}$$

Pro dané hodnoty: $v_m = 19{,}8$ m·s^{-1} $\doteq 20$ m·s^{-1} $= 72$ km·h^{-1} .

Příklad 5
Porovnejte mezní rychlost výsadkáře před otevřením padáku, když letí ve vodorovné poloze s roztaženýma rukama a nohama a jeho aerodynamické vlastnosti odpovídají vlastnostem desky o plošném obsahu $S_1 = 1{,}1$ m^2 s koeficientem odporu $C_1 = 1{,}1$, a po otevření padáku, jehož plošný obsah je $S_2 = 45$ m^2 a koeficient odporu je $C_2 = 1{,}33$. Výsadkář má i s padákem hmotnost $m = 95$ kg.

Řešení: $m = 95$ kg , $S_1 = 1{,}1$ m^2 , $C_1 = 1{,}1$, $S_2 = 45$ m^2 , $\mathrm{C}_2 = 1{,}33$;
$v_{m1} = ?$, $v_{m2} = ?$

Dosazením číselných hodnot do vztahu (20) dostáváme: $v_{m1} = 36$ m·s^{-1} , $v_{m2} = 5{,}1$ m·s^{-1} .

Úloha 4. Závodník – cyklista, který má i s kolem hmotnost 90 kg, jede za bezvětří po přímé vodorovné silnici rychlostí 45 km/h.

a) Jak velký odpor vzduchu musí překonávat, je-li plošný obsah čelního průřezu $S = 0{,}8$ m^2 a koeficient odporu $C = 0{,}55$. Jaký je jeho výkon, můžeme-li valivý odpor kol zanedbat?

b) Jak se změní jeho rychlost, pojede-li se stejným výkonem do kopce se stoupáním 4 m na 100 m dráhy?

Úloha 5. – praktická. Nafoukněte kulatý gumový balonek na průměr asi 20 cm. Průměr balonku změřte a zvažte jej na laboratorních vahách. Uvědomte si, že se přitom uplatní i aerostatický vztlak. Nechte balonek padat z výšky větší než 5 m v klidném vzduchu a pomocí stopek a pásma určete jeho mezní rychlost. (Balonek ji prakticky dosáhne dříve než proletí první metr své dráhy.) Experimentálně zjištěnou hodnotu mezní rychlosti porovnejte s hodnotou vypočtenou podle vztahu (20), kde m je hmotnost závaží, kterým jste vyvážili nafouknutý balonek.

Úloha 6. Kulička o průměru 1 cm padá volně vzduchem teploty 0°C. Při které rychlosti dává vztah (16) pro výpočet odporové síly při laminárním obtékání stejný výsledek jako vztah (23) pro výpočet odporové síly při turbulentním obtékání?

4. Modelování průběhu pohybu v odporujícím prostředí na osobním počítači

Abychom znázornili pohyb hmotného bodu, určíme nejprve jeho rychlost a polohu v časech $t_0,\ t_1,\ t_2,\ t_3,\ \dots$, které tvoří aritmetickou posloupnost s konstantní diferencí $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Z vypočtených hodnot buď sestrojíme grafy časových závislostí některých kinematických veličin, nebo v určitém měřítku zobrazíme trajektorii pohybu, na které můžeme můžeme vyznačit posloupnost okamžitých poloh hmotného bodu.

Zvolíme-li dostatečně malý časový krok, můžeme v intervalu $\langle t_i,\ t_{i+1}\rangle$ považovat výslednou sílu, která na hmotný bod působí, a tedy i jeho zrychlení, za konstantní. Za tohoto předpokladu platí

$$\boldsymbol{r}_{i+1} = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{v}_i \Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_i (\Delta t)^2 \,, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{a}_i \Delta t \,, \tag{30}$$

kde $\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{v}_i,\ \boldsymbol{r}_i$ jsou zrychlení, rychlost a polohový vektor v čase t_i,
$\boldsymbol{v}_{i+1},\ \boldsymbol{r}_{i+1}$ jsou rychlost a polohový vektor v čase $t_{i+1} = t_i + \Delta t$.
Zrychlení $\boldsymbol{a}_i$ na začátku intervalu určíme z pohybové rovnice.

Naše úvaha vede k postupnému cyklickému výpočtu jednotlivých polohových vektorů a okamžitých rychlostí, který lze snadno naprogramovat pro osobní počítač:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_0 (\Delta t)^2 , & \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{a}_0 \Delta t , \\
\boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{v}_1 \Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 (\Delta t)^2 , & \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{a}_1 \Delta t , \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

Modelování pohybů právě popsaným způsobem velmi usnadňuje výpočetní a grafický systém FAMULUS, jehož verze 3.1 je bezplatně dodávána na školy. Ten zjednodušuje práci s přípravou grafů a tabulek a dovoluje uživateli, aby se soustředil na přípravu algoritmu výpočtu vycházejícího z pohybové rovnice. Pomocí systému FAMULUS byly řešeny i následující příklady.

Příklad 6
Modelujte pohyb balonku z úlohy 5. Zjistěte v jaké vzdálenosti od místa uvolnění už můžeme rychlost pádu považovat za konstantní. Pád balonku ve vzduchu porovnejte s volným pádem ve vakuu.

Řešení: Program, jehož výpis je na samostatné stránce spolu s tabulkou vypočítaných hodnot a modelem, vychází z pohybové rovnice volného pádu probíhajícího ve vztažné soustavě se svislou osou y

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{CS\varrho v^2}{2m} - g \,. \tag{31}$$

Počáteční podmínky v čase $t = 0$ jsou: $v_y = 0\,,\ y = y_0$. Výpočet, jehož algoritmus je zapsán v části programu označené jako „model“, se cyklicky opakuje. Na konci každého cyklu jsou výsledeky výpočtu zaznamenány do tabulky a do grafu. Symbol Δt je ve výpisu programu nahrazen symbolem $\mathrm{d}t$. Výška y_1 tělesa padajícího ve vakuu je dopočítána pomocí analytického vztahu $y_1 = y_0 - gt^2/2$.

Příklad 7
Modelujte pohyb lyžaře z příkladu 4. Z tabulky nebo grafu určete na jaké dráze dosáhne rychlosti 50 km/h. Zjištěnou hodnotu porovnejte s výsledkem řešení příkladu 2.

Řešení: Výpis programu, tabulka a graf jsou opět na samostatné stránce. Zjišťujeme, že lyžař dosáhne rychlosti 50 km/h $\doteq$ 13,9 m·s^{-1} asi za 14 s po projetí dráhy o málo větší než 100 m, což je asi o čtvrtinu větší hodnota, než ke které jsme došli při řešení příkladu 2.

Příklad 8
Modelujte šikmý vrh míčku na stolní tenis s počáteční výškou 2 m, počáteční rychlostí 30 m$\cdot$s^{-1} a elevačním úhlem 60°. Určete dálku vrhu a dobu letu.

Řešení: Tentokrát se jedná o rovinný pohyb. Výpočet musíme provádět pro každou souřadnici vektoru zrychlení, vektoru rychlosti a polohového vektoru zvlášť. Proto jsou příslušné řádky zápisu algoritmu výpočtu zdvojeny. Z tabulky a grafu na str. 13 určíme dobu letu 2,5 s a dálku vrhu 9,9 m.

Příklad 9
Modelujte pohyb výsadkáře z příkladu 5. Předpokládejte, že seskok byl proveden z vrtulníku, který se vznášel na jednom místě a otevření padáku nastalo po 10 sekundách.

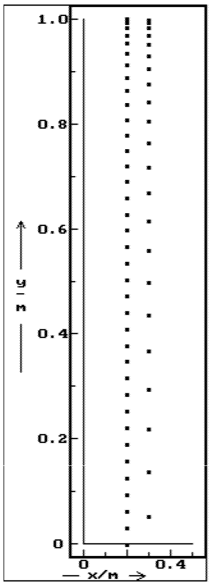
Řešení: Algoritmus výpočtu musí sledovat čas a ve správném okamžiku změnit parametry pohybové rovnice. Výpis programu, tabulka a grafy rychlosti a dráhy jsou na str. 14. Vidíme, že zatímco před otevřením padáku dosažení mezní rychlosti v_{m1} trvalo téměř celých 10 s, po otevření padáku se pohyb zbrzdí během jediné sekundy.

Úloha 7. Upravte progam v příkladu 6, aby modeloval volný pád míčku na stolní tenis.

Úloha 8 Modelujte pohyb olověného broku v glycerolu podle příkladu 3.

Úloha 9. Upravte program v příkladu 8, aby porovnával vrh ve vzduchu s vrhem ve vakuu.

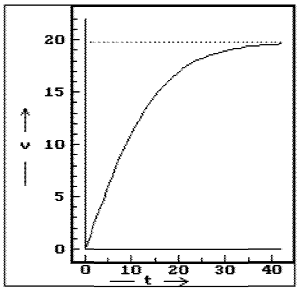
```
Volný pád koule v~odporujícím prostředí při vírovém obtékání.
Velikost odporové síly:  Fo = 1/2 C S~ro v^2
- - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce  - - - - - -
C=.48                  ! součinitel odporu
ro=1.3                 ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
R=.10                  ! poloměr koule/m
m=.0025                ! hmotnost koule/kg
g=9.8                  ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
dt=.02                 ! časový krok/s
y0=1                   ! počáteční výška/m
A=C*pi*R*R*ro/2/m      ! souhrnná konstanta
- - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty  - - - - - - - - - - -
t=0;y=y0;v=0;       ! počáteční podmínky
x=.2;x1=.3          ! pomocné souřadnice
DISP                ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - - - - - - - - - -  model  - - - - - - - - - - - - - -
t=t+dt                 ! a,v jsou y_ové souřadnice
a=A*v^2-g              !    rychlosti a zrychlení
y=y+v*dt+a*dt^2/2;  y1=y0-g*t^2/2
v=v+a*dt

- - - - - - - - - - - - - - - disp - - - - - - - - - - - - - - -
```

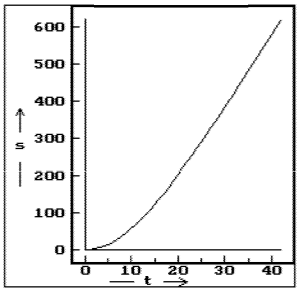


t	v	y	y1
0.00	0.000	1.000	?
0.02	-0.196	0.998	0.998
0.04	-0.389	0.992	0.992
0.06	-0.573	0.983	0.982
0.08	-0.743	0.969	0.969
0.10	-0.896	0.953	0.951
0.12	-1.029	0.934	0.929
0.14	-1.142	0.912	0.904
0.16	-1.236	0.888	0.875
0.18	-1.312	0.863	0.841
0.20	-1.373	0.836	0.804
0.22	-1.421	0.808	0.763
0.24	-1.459	0.779	0.718
0.26	-1.488	0.750	0.669
0.28	-1.510	0.720	0.616
0.30	-1.527	0.689	0.559
0.32	-1.541	0.659	0.498
0.34	-1.550	0.628	0.434
0.36	-1.558	0.597	0.365
0.38	-1.564	0.565	0.292
0.40	-1.568	0.534	0.216
0.42	-1.571	0.503	0.136
0.44	-1.574	0.471	0.051
0.46	-1.575	0.440	-0.037
0.48	-1.577	0.408	-0.129
0.50	-1.578	0.377	-0.225
0.52	-1.579	0.345	-0.325
0.54	-1.579	0.314	-0.429
0.56	-1.580	0.282	-0.537
0.58	-1.580	0.250	-0.648
0.60	-1.580	0.219	-0.764
0.62	-1.580	0.187	-0.884
0.64	-1.581	0.156	-1.007
0.66	-1.581	0.124	-1.134
0.68	-1.581	0.092	-1.266
0.70	-1.581	0.061	-1.401
0.72	-1.581	0.029	-1.540
0.74	-1.581	-0.002	-1.683
0.76	-1.581	-0.034	-1.830
0.78	-1.581	-0.066	-1.981
0.80	-1.581	-0.097	-2.136
0.82	-1.581	-0.129	-2.295
0.84	-1.581	-0.161	-2.457

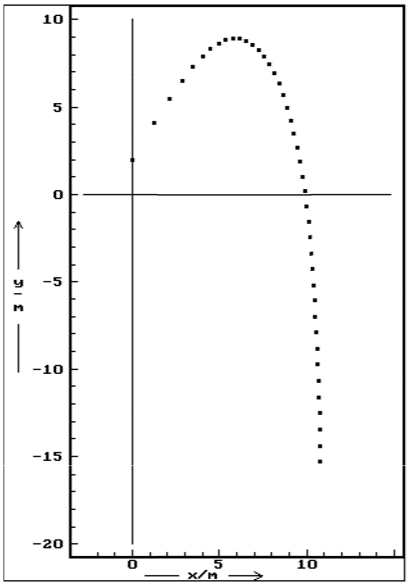
```
Pohyb lyžaře s~přihlédnutím k~odporu vzduchu a smykovému tření
Velikost odporové síly:  Fo = 1/2 C S~ro v^2
- - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce  - - - - - -
alfa=10*pi/180    ! úhel nakl. roviny (převedený na radiány)
f=.050            ! součinitel smykového tření
C=.55             ! součinitel odporu
ro=1.2            ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
S=.80             ! plošný obsah čelního průřezu/m^2
m=85              ! hmotnost lyžaře/kg
g=9.8             ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
dt=.4             ! časový krok/s
A=C*S*ro/2/m      ! souhrnná konstanta
B=g*(sin(alfa)-f*cos(alfa))
- - - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty   - - - - - - - - - - - -
t=0;s=0;v=0;a=B   ! počáteční podmínky
DISP              ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - - - - - - - - - - -  model   - - - - - - - - - - - - - - -
t=t+dt
a=B-A*v^2
s=s+v*dt+a*dt^2/2
v=v+a*dt
- - - - - - - - - - - - - - - - disp - - - - - - - - - - - - - - - -
```

t	a	v	s
0	1.2	0.0	0.0
1	1.2	1.2	0.6
2	1.2	2.4	2.4
3	1.2	3.6	5.5
4	1.2	4.8	9.7
5	1.1	6.0	15.1
6	1.1	7.1	21.6
7	1.1	8.1	29.2
8	1.0	9.1	37.8
9	1.0	10.1	47.5
10	0.9	11.0	58.0
11	0.8	11.9	69.4
12	0.8	12.6	81.7
13	0.7	13.4	94.7
14	0.7	14.0	108.4
15	0.6	14.6	122.7
16	0.6	15.2	137.6
17	0.5	15.7	153.0
18	0.5	16.1	169.0
19	0.4	16.6	185.3
20	0.4	16.9	202.0
21	0.3	17.3	219.1
22	0.3	17.5	236.5
23	0.3	17.8	254.2
24	0.2	18.0	272.1
25	0.2	18.3	290.3
26	0.2	18.4	308.6
27	0.2	18.6	327.1
28	0.1	18.7	345.8
29	0.1	18.9	364.6
30	0.1	19.0	383.6
31	0.1	19.1	402.6
32	0.1	19.2	421.7
33	0.1	19.3	440.9
34	0.1	19.3	460.2
35	0.1	19.4	479.6
36	0.1	19.4	499.0
37	0.0	19.5	518.4
38	0.0	19.5	537.9
39	0.0	19.6	557.5
40	0.0	19.6	577.0
41	0.0	19.6	596.6
42	0.0	19.6	616.3



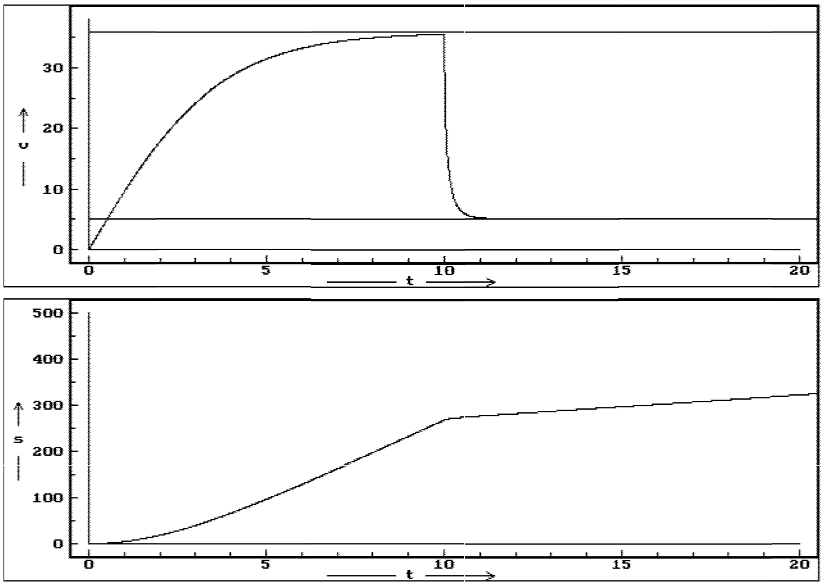


```
Šikmý vrh koule v~odporujícím prostředí při vírovém obtékání.
Velikost odporové síly:     Fo=1/2 C S~ro v^2
- - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce  - - - - - -
C=.45              ! součinitel odporu
ro=1.2             ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
R=.019             ! poloměr koule/m
m=.0027            ! hmotnost koule/kg
g=9.8              ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
v=30               ! velikost počáteční rychlosti/m.s^(-1)
e=60*pi/180        ! elevační úhel (stupně převedeny na radiány)
dt=.1              ! časový krok/s
A=C*pi*R*R*ro/2/m  ! souhrnná konstanta
- - - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty  - - - - - - - - - - -
t=0;x=0;y=2;vx=v*cos(e);vy=v*sin(e) ! počáteční podmínky
DISP               ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - - - - - - - - - -  model  - - - - - - - - - - - - - - -
t=t+dt
ax=-A*sqrt(vx^2+vy^2)*vx; ay=-A*sqrt(vx^2+vy^2)*vy-g
x=x+vx*dt+ax*dt^2/2;  y=y+vy*dt+ay*dt^2/2
vx=vx+dt*ax;  vy=vy+dt*ay
- - - - - - - - - - - - - - - - disp - - - - - - - - - - - - - - - -
```



t	x	y
0.0	0.00	2.00
0.1	1.24	4.11
0.2	2.13	5.50
0.3	2.84	6.53
0.4	3.46	7.31
0.5	4.00	7.91
0.6	4.49	8.35
0.7	4.95	8.66
0.8	5.37	8.85
0.9	5.78	8.93
1.0	6.16	8.91
1.1	6.53	8.80
1.2	6.88	8.59
1.3	7.22	8.29
1.4	7.54	7.91
1.5	7.84	7.46
1.6	8.12	6.93
1.7	8.38	6.34
1.8	8.63	5.70
1.9	8.85	5.01
2.0	9.06	4.28
2.1	9.25	3.51
2.2	9.42	2.72
2.3	9.57	1.89
2.4	9.71	1.05
2.5	9.84	0.20
2.6	9.96	-0.67
2.7	10.06	-1.56
2.8	10.15	-2.45
2.9	10.24	-3.35
3.0	10.31	-4.25
3.1	10.38	-5.16
3.2	10.44	-6.08
3.3	10.49	-6.99
3.4	10.54	-7.91
3.5	10.59	-8.83
3.6	10.62	-9.76
3.7	10.66	-10.68
3.8	10.69	-11.60
3.9	10.72	-12.53
4.0	10.74	-13.46
4.1	10.77	-14.38
4.2	10.79	-15.31

```
Volný pád výsadkáře v~klidném vzduchu. Fo = 1/2 C S~ro v^2
- - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce  - - - - - -
m=95        ! hmotnost parašutisty/kg
ro=1.2      ! hustota vzduchu/kg.m^(-3)
g=9.8       ! tíhové zrychlení/m.s^(-2)
dt=.01      ! časový krok/s
S1=1.1      ! plocha parašutisty před otevřením padáku/m^2
C1=1.1      ! součinitel odporu před otevřením padáku
S2=45       ! plocha padáku
C2=1.33     ! součinitel odporu padáku
- - - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty  - - - - - - - - - - - -
vm1=sqrt(2*m*g/C1/S1/ro)  ! mezní rychlost před otevřením p.
vm2=sqrt(2*m*g/C2/S2/ro)  ! mezní rychlost po otevření padáku
t=0;v=0;s=0;S=S1;C=C1;    ! počáteční podmínky
DISP                      ! zobrazení počáteční polohy
- - - - - - - - - - - - - - -  model  - - - - - - - - - - - - - - -
IF t>10 THEN C=C2; S=S2 END  ! otevření padáku
a=g-C*S*ro*v^2/2/m
s=s+v*dt+a*dt^2/2
v=v+a*dt
t=t+dt
- - - - - - - - - - - - - - - - disp - - - - - - - - - - - - - - -
```



5. Analytické vztahy popisující časový průběh volného pádu v odporujícím prostředí

A. Laminární obtékání

Vyjdeme z pohybové rovnice

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_G - F_o = mg - bv\,, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{b}{m}v\,. \tag{32}$$

Separací proměnných dojdeme k diferenciální rovnici:

$$\frac{\mathrm{d}v}{g - \dfrac{b}{m}v} = \mathrm{d}t\,. \tag{33}$$

Při nulové počáteční rychlosti dostaneme integrací zákon rychlosti:

$$\int\limits_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - \dfrac{b}{m}v} = \int\limits_0^t \mathrm{d}t\,, \tag{34}$$

$$\ln\left(g - \frac{b}{m}v\right) - \ln g = -\frac{b}{m}t\,, \quad v = \frac{mg}{b}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t}\right)\,. \tag{35}$$

Další integrací dostaneme zákon dráhy:

$$s = \int\limits_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{mg}{b}\left(t + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{b}{m}t} - 1}{\dfrac{b}{m}}\right)\,. \tag{36}$$

Pro $t \gg \dfrac{m}{b}$ můžeme psát:

$$v \doteq \frac{mg}{b} = v_m = konst.\,, \qquad s = \frac{mg}{b}(t - \frac{m^2 g}{b^2}) = v_m(t - \frac{v_m}{g})\,. \tag{37}$$

B. Turbulentní obtékání

Pohybovou rovnici

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_G - F_o = mg - \frac{1}{2}CS\varrho^2\,, \qquad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - \frac{CS\varrho}{2m}v^2 \tag{38}$$

upravíme separací proměnných na tvar

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - Av^2\,, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{g - Av^2} = \mathrm{d}t\,. \tag{39}$$

kde $A = \dfrac{CS\varrho}{2m}$ je souhrnná konstanta. Mezní rychlost pohybu je $v_m = \sqrt{\dfrac{g}{A}}$. Integrací s použitím rozkladu na parciální zlomky odvodíme zákon rychlosti:

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{g - Av^2} = \frac{1}{A}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\frac{g}{A} - v^2} = \frac{1}{2\sqrt{Ag}}\left(\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_m - v} + \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_m + v}\right) = \int_0^t \mathrm{d}t\,, \tag{40}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{Ag}} \ln\frac{v_m + v}{v_m - v} = t\,, \tag{41}$$

$$v = v_m \frac{\mathrm{e}^{2t\sqrt{Ag}} - 1}{\mathrm{e}^{2t\sqrt{Ag}} + 1} = v_m \frac{\mathrm{e}^{t\sqrt{Ag}} - \mathrm{e}^{-t\sqrt{Ag}}}{\mathrm{e}^{t\sqrt{Ag}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{Ag}}} = v_m \mathrm{tgh}(t\sqrt{Ag})\,. \tag{42}$$

Další integrací dostaneme zákon dráhy:

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{v_m}{\sqrt{Ag}} \ln\frac{\mathrm{e}^{t\sqrt{Ag}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{Ag}}}{2} = \frac{v_m}{\sqrt{Ag}} \ln\cosh(t\sqrt{Ag})\,. \tag{43}$$

Pro $t \gg \dfrac{m}{b}$ můžeme psát:

$$v \doteq v_m = \sqrt{\frac{g}{A}} = konst.\,, \qquad s \doteq \frac{v_m}{\sqrt{Ag}}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{t\sqrt{Ag}}\right) - \ln 2\right] = v_m t - \frac{\ln 2}{A}\,. \tag{44}$$

Úloha 10. Zkontrolujte počítačový model z příkladu 6 přesným výpočtem podle analytických vztahů.

Výsledky některých úloh

1. 25 m. **3.** 3,2 mm·s^{-1}.

4.a 41 N, 516 W. **4.b** Úloha vede na kubickou rovnici, kterou asi vyřešíte některou numerickou metodou. 33 km·h^{-1}.

6. $v = \dfrac{12\eta}{C\varrho r} = 7{,}1$ cm·s^{-1}.