HARMONICKÉ KMITY MECHANICKÝCH SOUSTAV

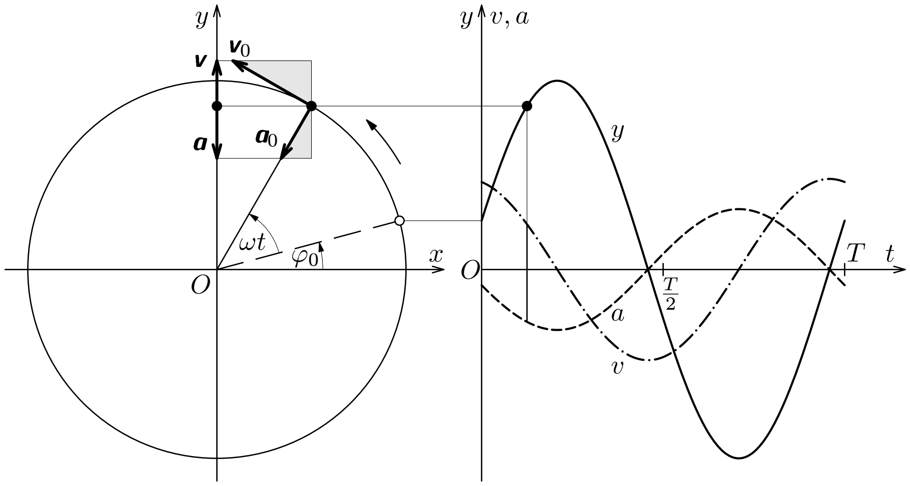
Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý, Ivo Volf a Radmila Horáková – ÚVFO Hradec Králové

Obsah

1 Kinematika harmonických kmitů

Harmonický kmitavý pohyb můžeme získat promítnutím rovnoměrného pohybu hmotného bodu po kružnici do některého průměru trajektorie. Z obr. 1 snadno odvodíme jeho kinematické zákony. Počátek vztažné soustavy volíme ve středu kružnicové trajektorie a pohyb po kružnici promítneme na osu y. Promítáme nejen okamžitou polohu obíhajícího bodu, ale i jeho okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}_0$ a okamžité dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}_0$, a získáme tak okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$ a okamžité zrychlení $\boldsymbol{a}$ kmitajícího průmětu.



Obr. 1

Nechť promítaný bod obíhá s úhlovou rychlostí ω a jeho průvodič délky r je v čase $t = 0$ otočen oproti kladné poloose x o úhel φ_0. Pak *souřadnice* polohy, rychlosti a zrychlení jeho průmětu do osy y závisí na čase podle následujících vztahů, kterým odpovídají grafy v pravé části obr. 1:

$$y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{1}$$
$$v = v_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{2}$$
$$a = -a_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{3}$$

kde

$$y_\mathrm{m} = r \quad \text{je } \textit{amplituda výchylky}, \tag{4}$$
$$v_\mathrm{m} = v_0 = \omega r = \omega y_\mathrm{m} \quad \text{je } \textit{amplituda rychlosti}, \tag{5}$$
$$a_\mathrm{m} = a_0 = \omega^2 r = \omega^2 y_\mathrm{m} \quad \text{je } \textit{amplituda zrychlení} \text{ kmitavého pohybu.} \tag{6}$$

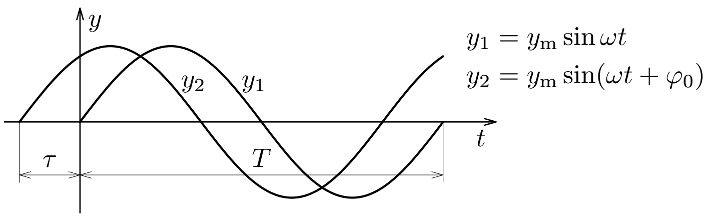
Harmonický kmitavý pohyb je stejně jako rovnoměrný pohyb po kružnici *periodický*. Pro veličinu $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ zavádíme u kmitavého pohybu název *úhlová frekvence*. Argument $\varphi = \omega t + \varphi_0$ goniometrických funkcí ve vztazích (1) až (3) nazýváme *fáze* kmitavého pohybu, φ_0 je *počáteční fáze*.

Zvolíme-li počáteční okamžik tak, že počáteční fáze φ_0 je nulová, je okamžitá výchylka kmitajícího bodu popsána jednodušším vztahem

$$y = y_\mathrm{m} \sin \omega t\,. \tag{7}$$

Kmity s kladnou počáteční fází $\varphi_0 > 0$ časově předbíhají (obr. 2) o dobu

$$\tau = T\frac{\varphi_0}{2\pi}\,. \tag{8}$$



Obr. 2

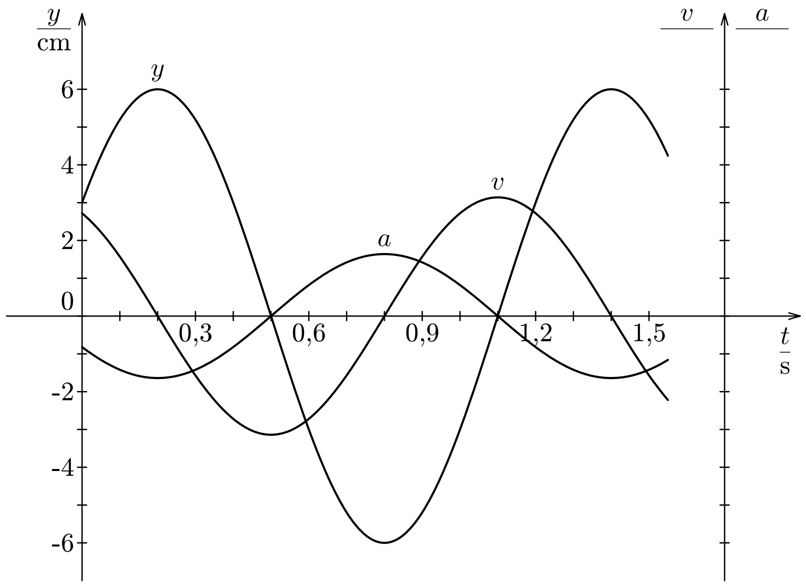
Úlohy

1. Na obr. 3 jsou grafy závislostí výchylky, rychlosti a zrychlení harmonického pohybu na čase. Na vodorovné ose jsou vyneseny číselné hodnoty času v sekundách, na svislé ose pak číselné hodnoty okamžité výchylky v centimetrech. Určete:

a) periodu, frekvenci a úhlovou frekvenci,
b) amplitudu výchylky a počáteční fázi výchylky,
c) amplitudu rychlosti,
d) amplitudu zrychlení,
e) Na pomocné svislé ose v pravé části obrázku doplňte měřítka a jednotky rychlosti a zrychlení.

Napište rovnici pro:

f) okamžitou výchylku,
g) okamžitou rychlost,
h) okamžité zrychlení tohoto harmonického pohybu.



Obr. 3

2. Pružinový oscilátor kmitá s periodou $T = 1{,}60$ s. Určete amplitudu a počáteční fázi kmitů, znáte-li počáteční výchylku $y_0 = 4{,}5$ cm a počáteční rychlost $v_0 = -0{,}65\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2 Dynamika harmonických kmitů

Ze vztahů (1), (3) a (6) plyne, že okamžité zrychlení harmonického pohybu je přímo úměrné okamžité výchylce a má opačný směr:

$$a = -a_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y\,. \tag{9}$$

Podle druhého pohybového zákona $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ je podmínkou pro vznik harmonického pohybu, aby také výslednice sil působících na kmitající hmotný bod byla přímo úměrná okamžité výchylce z rovnovážné polohy a měla opačný směr.

Tuto podmínku velmi dobře splňuje *pružinový oscilátor*, který získáme zavěšením závaží na ocelovou pružinu (obr. 4). Předpokládejme nejprve, že hmotnost pružiny m_0 je zanedbatelná v porovnání s hmotností závaží m. Na závaží působí směrem vzhůru síla pružiny $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$, která je přímo úměrná prodloužení pružiny, a směrem dolů tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$. V rovnovážné poloze jsou obě síly stejně velké:

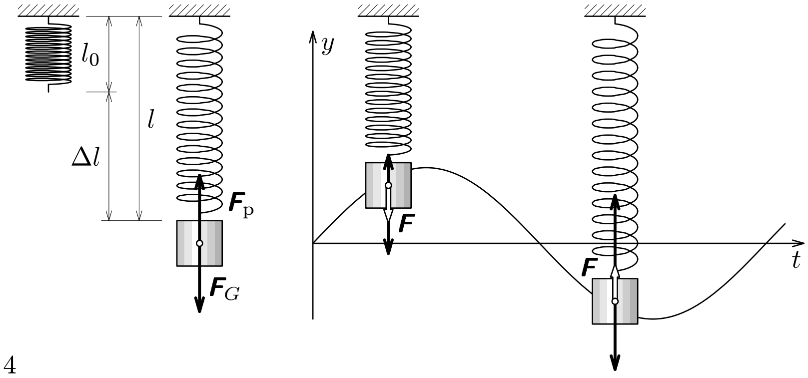
$$F_\mathrm{p} = k\Delta l = F_G = mg\,, \tag{10}$$

kde k je *tuhost pružiny*. Rozkmitáme-li závaží ve svislém směru, mění se velikost síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$, zatímco síla $\boldsymbol{F}_G$ je konstantní. Nad rovnovážnou polohou převládne síla tíhová a pod ní naopak síla pružiny. Pro souřadnici výsledné síly $\boldsymbol{F}$ platí

$$F = F_\mathrm{p} - F_G = k(\Delta l - y) - mg = k\Delta l - ky - mg = -ky\,. \tag{11}$$

Dostali jsme *pohybovou rovnici* pružinového oscilátoru

$$F = ma = -ky\,. \tag{12}$$



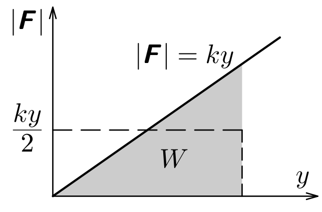
Obr. 4

Po dosazení ze vztahu (9) do pohybové rovnice (12) určíme úhlovou frekvenci, frekvenci a periodu oscilátoru:

$$-m\omega^2 y = -ky\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{13}$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít také pomocí *zákona zachování energie*. Během kmitání pružinového oscilátoru se mění kinetická a potenciální tíhová energie závaží a také potenciální energie elastická pružiny. Kinetická energie je největší při průchodu závaží rovnovážnou polohou, kdy potenciální energii *soustavy* zvolíme jako nulovou.

Vzdaluje-li se závaží z rovnovážné polohy, pohybuje se proti výsledné síle $\boldsymbol{F}$ a soustava získává potenciální energii, která je rovna práci spotřebované silou $\boldsymbol{F}$. Než dosáhne okamžité výchylky y, spotřebuje výsledná síla práci, která je číselně rovna obsahu obrazce omezeného grafem síly na obr. 5. Můžeme ji také vypočítat jako součin průměrné velikosti síly $ky/2$ a dráhy y:

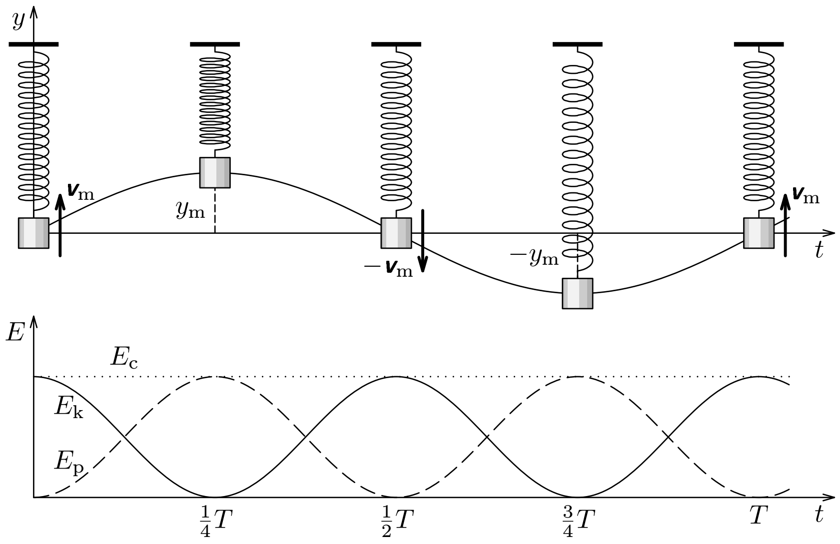


Obr. 5

$$W = \frac{1}{2}ky^2 = E_\mathrm{p}\,. \tag{14}$$

Celková mechanická energie harmonického kmitání je konstantní (obr. 6 — pro jednoduchost sledujeme kmitání s nulovou počáteční fází):

$$E_\mathrm{c} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 \cos^2 \omega t = konst. \tag{15}$$



Obr. 6

Potenciální energie v krajní poloze je stejná jako kinetická energie při průchodu rovnovážnou polohou:

$$\frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2\,, \qquad \text{přičemž} \qquad v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m}\,. \tag{16}$$

Po dosazení a úpravě opět dostáváme vztahy (13):

$$k = m\omega^2\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

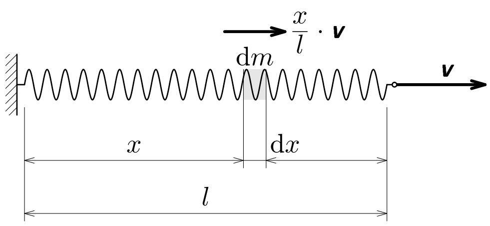
Určení periody nebo frekvence harmonických kmitů mechanické soustavy patří k často se vyskytujícím úlohám. Na pružinovém oscilátoru jsme si ukázali *dva základní způsoby řešení*:

a) Vyjdeme z pohybové rovnice a použijeme vztah $a = -\omega^2 y$.

b) Vyjdeme ze zákona zachování energie a použijeme vztah $v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m}$.

Řešení složitějších případů většinou provádíme druhým způsobem.

Při přesnějším výpočtu periody kmitů pružinového oscilátoru musíme přihlédnout k hmotnosti pružiny m_0. Ta se uplatňuje jen částečně, neboť pouze dolní konec pružiny kmitá se závažím. Ostatní části se pohybují pomaleji a horní konec nekmitá vůbec. Kinetickou energii pružiny, jejíž jeden konec je upevněn a druhý se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$, vypočítáme užitím integrálního počtu podle obr. 7:



Obr. 7

$$\mathrm{d}m = m_0\frac{\mathrm{d}x}{l}\,, \qquad E_\mathrm{k} = \int\limits_0^m \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m\left(v\frac{x}{l}\right)^2 = \frac{m_0 v^2}{2l^3}\int\limits_0^l x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{m_0}{3}v^2\,. \tag{17}$$

Hmotnost pružiny se tedy uplatní jen jednou třetinou. Podle zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_0}{3}\right)v_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m_0}{3}\right)\omega^2 y_\mathrm{m}^2\,, \tag{18}$$

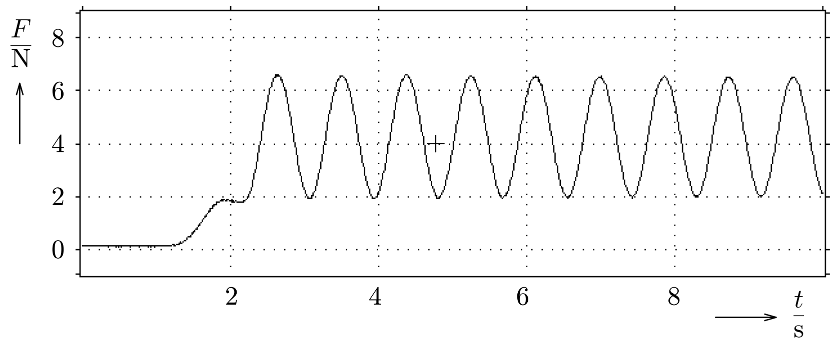
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{m_0}{3}}{k}}\,. \tag{19}$$

Úloha 3

Na lehkou pružinu bylo zavěšeno závaží o neznámé hmotnosti, které po uvolnění začalo kmitat okolo rovnovážné polohy. Celý děj byl sledován pomocí elektronického siloměru, ke kterému byla pružina horním koncem upevněna. Na připojeném počítači byl získán graf, který zachycuje časový průběh velikosti síly působící na siloměr (obr. 8). Počáteční velikost síly je dána tíhou samotné pružiny.

a) Určete hmotnost závaží a tuhost pružiny.

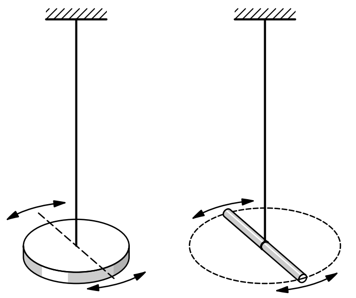
b) Určete amplitudu výchylky a amplitudu rychlosti pozorovaných kmitů.



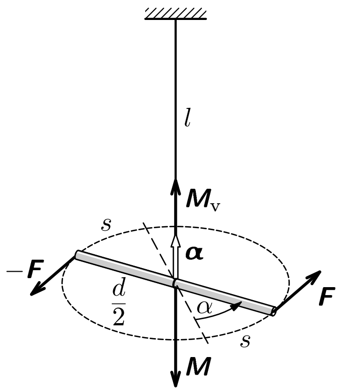
Obr. 8

3 Torzní oscilátor

Dosud jsme se zabývali harmonickými kmity pružinového oscilátoru, které probíhaly ve svislém směru jako pohyb posuvný. Analogické zákony platí i pro otáčivý kmitavý pohyb osově souměrného tělesa, které je zavěšeno na drátě splývajícím s osou souměrnosti (obr. 9). Kmity jsou způsobeny pružnými silami v drátu vyvolanými jeho kroucením (torzí) při pootočení tělesa z rovnovážné polohy.



Obr. 9



Obr. 10

Chceme-li drát délky l a poloměru r, který je vyroben z materiálu o *modulu pružnosti ve smyku* G, držet zkroucený o úhel α, musíme na konec drátu působit *dvojicí* vnějších sil, jejíž moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{v}$, je přímo úměrný úhlové výchylce $\boldsymbol{\alpha}$ (obr. 10). Platí

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{v} = \frac{\pi G r^4}{2l}\boldsymbol{\alpha} = D\boldsymbol{\alpha} \tag{20}$$

Konstanta úměrnosti D se nazývá *direkční moment*. Moment vnějších sil je v rovnováze s momentem $\boldsymbol{M}$ pružných sil drátu působících proti deformaci:

$$\boldsymbol{M} = -D\boldsymbol{\alpha} \tag{21}$$

Momenty $\boldsymbol{M}_\mathrm{v}$ a $\boldsymbol{M}$, úhlovou výchylku $\boldsymbol{\alpha}$ a také úhlovou rychlost $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}/\mathrm{d}t$ a úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}/\mathrm{d}t$ otáčejícího se tělesa zavádíme jako vektorové veličiny, které umisťujeme do osy otáčení podle známého *pravidla pravé ruky*. Jejich souřadnice M_v, M, α, Ω a ε jsou kladné, pokud vektor směřuje nahoru.

Působí-li dvojice vnějších sil $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}$ kolmo na konce vratidla délky d, mají síly velikost

$$F = \frac{M_\mathrm{v}}{d} = \frac{D\alpha}{d}\,. \tag{22}$$

Během pootočení o úhel α se velikost sil postupně zvětšuje. Vnější síly vykonají práci a zkroucený drát získá *potenciální energii elastickou*

$$E_\mathrm{p} = W = 2F_\text{prům} \cdot s = 2 \cdot \frac{D\alpha}{2d} \cdot \alpha\frac{d}{2} = \frac{1}{2}D\alpha^2\,. \tag{23}$$

Uvedeme-li zavěšené těleso o momentu setrvačnosti J do otáčivého pohybu a přestaneme na ně působit vnějšími silami (kromě síly tíhové), rozkmitá se působením momentu $\boldsymbol{M}$ pružných sil drátu okolo rovnovážné polohy. Úhlová výchylka, úhlová rychlost a úhlové zrychlení tohoto pohybu se řídí kinematickými zákony analogickými k (1) až (6) a (9), které platily u pružinového oscilátoru:

$$\alpha = \alpha_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \tag{24}$$

$$\Omega = \Omega_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad \Omega_{\mathrm{m}} = \omega \alpha_{\mathrm{m}}\,, \tag{25}$$

$$\varepsilon = -\varepsilon_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0)\,, \qquad \varepsilon_{\mathrm{m}} = \omega^2 \alpha_{\mathrm{m}}\,. \tag{26}$$

$$\varepsilon = -\omega^2 \alpha\,. \tag{27}$$

Pozor na rozdíl mezi souřadnicí Ω úhlové rychlosti tělesa, která se během kmitů neustále mění, a úhlovou frekvencí kmitů $\omega = 2\pi/T$, která pro dané kmity konstantní a udává přírůstek fáze za jednotku času!

Dosazením z (25) do *pohybové rovnice torzních kmitů*

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\varepsilon} = -D\boldsymbol{\alpha} \tag{28}$$

a úpravou odvodíme vztah pro výpočet periody torzních kmitů:

$$-J\omega^2\alpha = -D\alpha\,, \qquad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{D}{J}\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\,. \tag{29}$$

Vidíme, že direkční moment drátu D a moment setrvačnosti zavěšeného tělesa J mají u torzního oscilátoru stejný význam jako tuhost pružiny k a hmotnost závaží m u oscilátoru pružinového.

Při odvození téhož vztahu užitím zákona zachování energie vycházíme z předpokladu, že potenciální energie elastická drátu v krajní poloze je stejná jako kinetická energie tělesa při průchodu rovnovážnou polohou:

$$\frac{1}{2}D\alpha_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}J\Omega_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}J\omega^2\alpha_{\mathrm{m}}^2\,. \quad \text{Z toho} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{J}}\,. \tag{30}$$

Úloha 4

Jako těleso torzního oscilátoru zvolíme vodorovnou tyč stálého průřezu o délce $l = 1$ m a hmotnosti $m = 0{,}20$ kg, kterou zavěsíme uprostřed na kus drátu. Jaký je direkční moment drátu, kmitá-li oscilátor s periodou 6,0 s? Jak by se změnila perioda oscilátoru, kdybychom tyč zkrátili na polovinu? Moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející kolmo jejím středem je $J = ml^2/12$.

4 Kyvadla

Jako kyvadlo můžeme označit každé těleso, které se může bez tření otáčet okolo vodorovné osy neprocházející jeho těžištěm. Učebnice fyziky pro střední školy (např. [1]) se obvykle omezují jen na rozbor vlastností kyvadla tvořeného malou kuličkou o hmotnosti m zavěšenou na tenkém vlákně délky l. Hmotnost vlákna, jeho deformace a odpor vzduchu zanedbáváme. Kuličku považujeme za hmotný bod, jehož pohyb je vázán na kružnici. Takto idealizované kyvadlo nazýváme *kyvadlo matematické*.

Změny pohybového stavu matematického kyvadla způsobuje pohybová složka $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$, jejíž velikost určíme podle obr. 11:

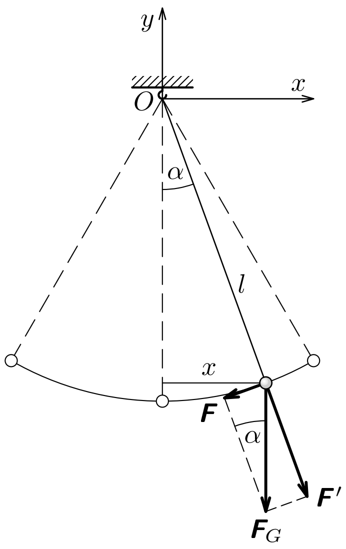
$$|\boldsymbol{F}| = F_G \sin\alpha = \frac{mg}{l}|x|\,. \tag{31}$$

Je-li amplituda kmitů velmi malá, pohybuje se kulička téměř vodorovně a souřadnici x středu kuličky můžeme považovat za okamžitou výchylku z rovnovážné polohy. Síla $\boldsymbol{F}$ je v takovém případě přímo úměrná výchylce a má opačný směr. Jsou tedy splněny podmínky pro vznik harmonických kmitů

$$x = x_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi_)\,. \tag{32}$$

Z *pohybové rovnice*

$$F = ma = -m\omega^2 x = -\frac{mg}{l}x\,, \tag{33}$$



Obr. 11

kde F, a jsou x-ové souřadnice síly a zrychlení, odvodíme vztah pro výpočet periody matematického kyvadla:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{g}{l}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{34}$$

Při odvození těchže vztahů užitím *zákona zachování energie* vycházíme z obr. 12. Potenciální energie kuličky v krajní poloze je stejná jako kinetická energie při průchodu rovnovážnou polohou, kdy rychlost kuličky dosahuje amplitudy v_m:

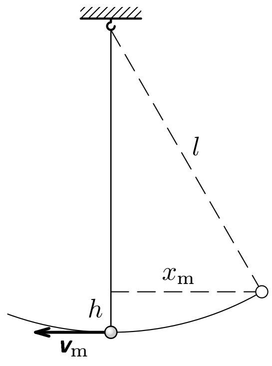
$$mgh = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2\,. \tag{35}$$

Dále platí

$$v_{\mathrm{m}} = \omega x_{\mathrm{m}} = \frac{2\pi}{T} x_{\mathrm{m}}\,, \tag{36}$$

$$h = l - \sqrt{l^2 - x_{\mathrm{m}}^2} = l - l\sqrt{1 - \frac{x_{\mathrm{m}}^2}{l^2}} \doteq$$

$$\doteq l - l\left(1 - \frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2l^2}\right) = \frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2l}\,. \tag{37}$$



Obr. 12

Po dosazení do (35) dostaneme

$$mg\frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2l} = \frac{1}{2}m\frac{4\pi^2}{T^2}x_{\mathrm{m}}^2\,, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{38}$$

Obdobně odvodíme vztah pro výpočet doby kmitu pomocí zákona zachování energie i u jiných kyvadel. Na obr. 13 je znázorněna krajní a rovnovážná poloha kyvadla o hmotnosti m, jehož těžiště T se nachází ve vzdálenosti d od osy procházející bodem O kolmo k nákresně. Při malé amplitudě kmitů koná těžiště kyvadla harmonické kmity s amplitudou x_{m} a jeho rychlost při průletu rovnovážnou polohu má velikost $v_{\mathrm{m}} = \omega x_{\mathrm{m}}$.

Potenciální energie kyvadla v krajní poloze závisí na výšce těžiště h:

$$E_{\mathrm{p}} = mgh = mg\left(d - \sqrt{d^2 - x_{\mathrm{m}}^2}\right) \doteq mg\frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2d}\,. \tag{39}$$

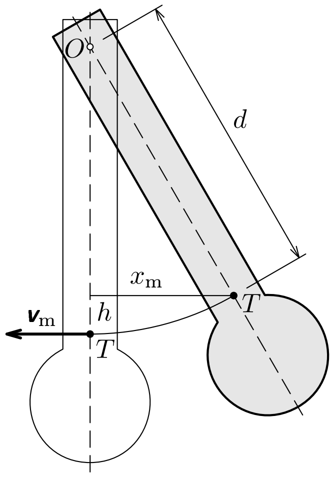
Stejně velká je kinetická energie kyvadla při průchodu rovnovážnou polohou:

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}J\Omega_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}J\left(\frac{v_{\mathrm{m}}}{d}\right)^2 \doteq \frac{1}{2}J\frac{\omega^2 x_{\mathrm{m}}^2}{d^2}\,. \tag{40}$$

Moment setrvačnosti J kyvadla závisí na vzdálenosti těžiště od osy podle *Steinerovy věty*

$$J = J_0 + md^2\,, \tag{41}$$

kde J_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžně s osou kyvadla.



Obr. 13

Z rovnosti energií dostaneme hledaný vztah pro výpočet doby kmitu:

$$mg\frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2d}=\frac{1}{2}J\frac{\omega^2x_{\mathrm{m}}^2}{d^2}\,,\qquad \omega^2=\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{mgd}{J}\,,\tag{42}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}=2\pi\sqrt{\frac{J_0+md^2}{mgd}}\,.\tag{43}$$

V učebnicích fyziky bývá předcházející vztah častěji odvozen na základě *pohybové rovnice otáčivého pohybu*, ke které dojdeme z obr. 14:

$$M=J\varepsilon=J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}=-mgd\sin\alpha\doteq-mgd\alpha=-D\alpha\,.\tag{44}$$

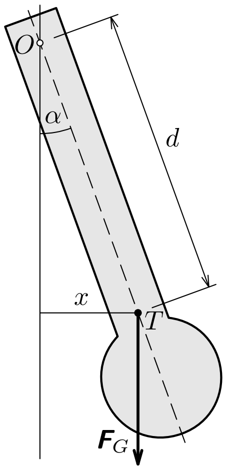
Veličina $D=mgd$ se nazývá *direkční moment* kyvadla.

Jestliže kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy v kladném smyslu (proti smyslu obíhání hodinových ručiček), je moment tíhové síly záporný, a naopak při výchylce kyvadla v záporném smyslu je moment tíhové síly kladný. Proto se v rovnici (44) objevuje záporné znaménko podobně jako v pohybové rovnici pružinového oscilátoru (12). Z analogie obou rovnic plyne, že rovnici (44) vyhovuje řešení analogické k (1) a (13):

$$\alpha=\alpha_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\varphi_0)\,,\quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{D}{J}}\,,$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{J_0+md^2}{mgd}}\,,\tag{45}$$

které popisuje závislost okamžité úhlové výchylky α na čase.



Obr.14

Naše odvození vztahu pro výpočet doby kyvu kyvadla se neobešlo bez použití přibližných vzorců

$$h\doteq\frac{x_{\mathrm{m}}^2}{2d}\,,\qquad \sin\alpha\doteq\alpha\,.\tag{46}$$

Proto vztahy (33), (44) platí s dostatečnou přesností jen při malých amplitudách kmitů. (Pro $\alpha_{\mathrm{m}}=1°$ je skutečná doba kmitu větší asi o 0,002 %, pro $\alpha_{\mathrm{m}}=5°$ asi o 0,05 %.) Tím se kyvadla liší od torzních oscilátorů, kde pohybová rovnice $J\varepsilon = -D\alpha$ platí přesně i pro velké úhlové výchylky, dokud deformace kroucením nepřekročí meze platnosti *Hookova zákona*.

Při větších amplitudách výchylky nejsou už kmity kyvadla přesně harmonické. Jejich časový průběh a dobu kmitu můžeme dostatečně přesně určit numerickým modelováním, které je popsáno ve studijním textu [2].

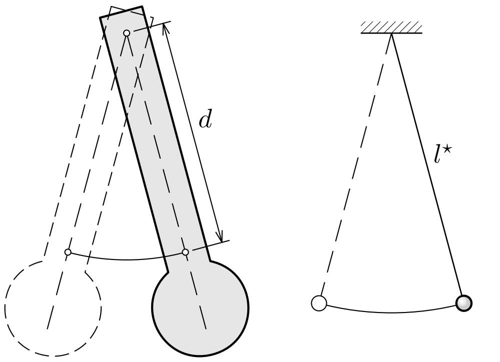
Vedle doby kmitu se u kyvadla zavádí i *doba kyvu* $\tau = T/2$. Jestliže $\tau = 1$ s, nazývá se kyvadlo *sekundové*.

Každému kyvadlu můžeme přiřadit *redukovanou délku* $l^\star$, kterou definujeme jako délku matematického kyvadla se stejnou dobou kyvu (obr. 15). Z rovnosti

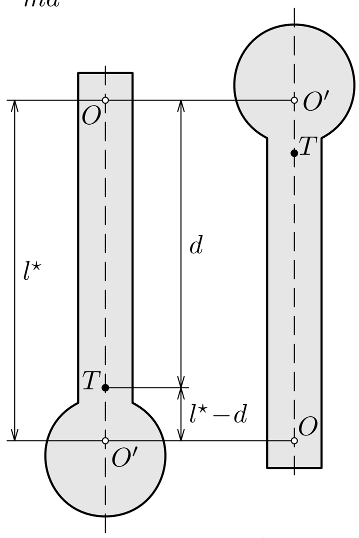
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + md^2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^\star}{g}} \tag{47}$$

odvodíme vztah pro výpočet redukované délky

$$l^\star = \frac{J}{md} = \frac{J_0 + md^2}{md} = d + \frac{J_0}{md} > d\,. \tag{48}$$



Obr. 15



Obr. 16

Naneseme-li od bodu O na polopřímku OT redukovanou délku $l^\star$, dostaneme bod O', kterým můžeme vést novou osu, opět kolmou k nákresně (obr. 16). Okolo této osy bude kyvadlo kývat s dobou kyvu T', která je stejná jako doba kyvu T okolo původní osy. Platí totiž

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{J'}{mg(l^\star - d)}} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m(l^\star - d)^2}{mg(l^\star - d)}} =$$

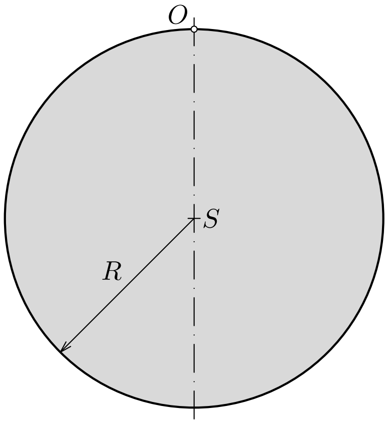
$$= 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m\left(\frac{J_0}{md}\right)^2}{mg\left(\frac{J_0}{md}\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{md^2 + J_0}{mgd}} = T\,. \tag{49}$$

Úlohy

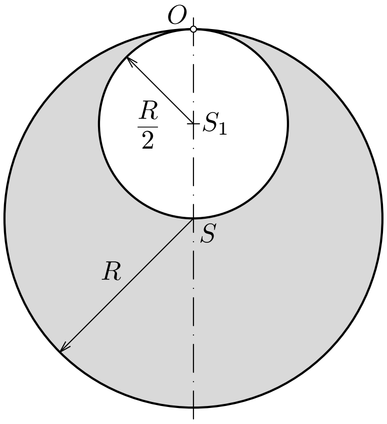
5. Určete vztah pro výpočet doby kmitu homogenní tyče hmotnosti m a délky l, která kmitá kolem osy kolmé k tyči a procházející jejím koncem.

6. Kruhová homogenní deska kmitá kolem vodorovné osy kolmé k rovině desky. Osa prochází jejím obvodem (obr. 17). V jaké jiné vzdálenosti od středu desky by mohla být osa, aniž by se doba kmitu změnila?

7. Určete dobu kmitu kotouče znázorněného na obr. 18 kolem vodorovné osy jdoucí bodem O kolmo na rovinu kotouče. Plná část kotouče je homogenní.



Obr. 17



Obr. 18

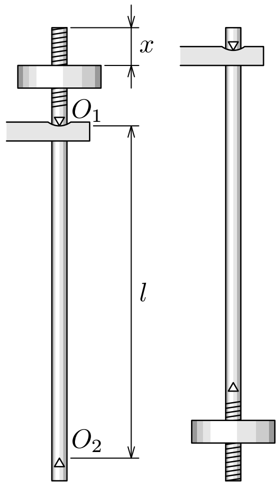
8. Tenká obruč o poloměru R zavěšená na skobě se po malém vychýlení z rovnovážné polohy stane kyvadlem. Určete jeho dobu kmitu a redukovanou délku.

5 Užití kyvadel při měření tíhového zrychlení

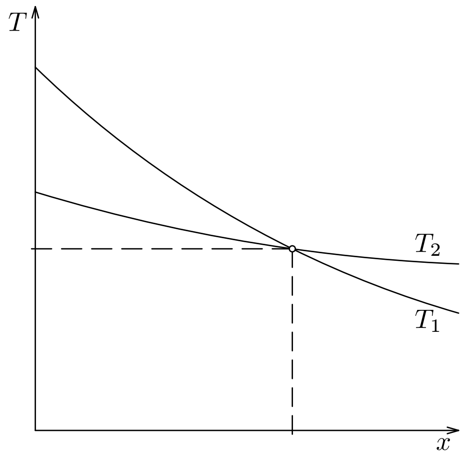
Absolutní měření tíhového zrychlení v určitém místě na Zemi můžeme přesně realizovat pomocí reverzního kyvadla sestrojeného např. podle obr. 19. Těžká tyč je opatřena dvěma závěsnými břity O_1, O_2 otočenými ostřím proti sobě a závažím, jehož vzdálenost x od konce tyče můžeme plynule měnit a regulovat tak doby kmitu T_1, T_2 okolo obou břitů. Naměřené hodnoty vyneseme do grafu (obr. 20), ze kterého zjistíme, pro kterou polohu závaží jsou obě doby kmitu stejné a jaká je jejich hodnota $T_1 = T_2 = T$. V takovém případě je vzdálenost břitů l rovna redukované délce kyvadla a tíhové zrychlení určíme ze vztahu

$$g = \frac{4\pi l}{T^2}\,. \tag{50}$$

Vzdálenost břitů a doba kmitu mohou být stanoveny se značnou přesností. Tím je zajištěna i přesnost konečného výsledku.



Obr. 19



Obr. 20

Známe-li hodnotu tíhového zrychlení g_A pro nějakou základní stanici A, můžeme určit tíhové zrychlení g_B na kterémkoliv jiném místě B tak, že změříme tímtéž kyvadlem doby kmitu T_A, T_B na obou místech. Pak platí

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg_A d}}\,, \qquad T_B = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg_B d}}\,, \qquad g_B = g_A\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2\,. \tag{51}$$

Poznámka: Před r. 1930 vykonal základní měření ve sklepě České techniky v Brně fyzik *B. Kladivo*. Určil hodnotu tíhového zrychlení

$$g = (9{,}809\,61 \pm 0{,}000\,01)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

6 Příklady složitějších oscilátorů

A. Spojování pružin

Na obr. 21 jsou zobrazeny tři oscilátory tvořené závažím o hmotnosti m a dvěma pružinami se zanedbatelnou hmotností o klidových délkách l_1, l_2 a tuhostech k_1 a k_2. Jednotlivé případy probereme postupně. Prodloužení pružin v rovnovážné poloze oscilátoru pokaždé označíme Δl_1, Δl_2.

a) Při paralelním spojení pružin se tíha závaží rozloží na obě pružiny. V rovnovážné poloze platí

$$mg = k_1 \Delta l_1 + k_2 \Delta l_2\,. \qquad (52)$$

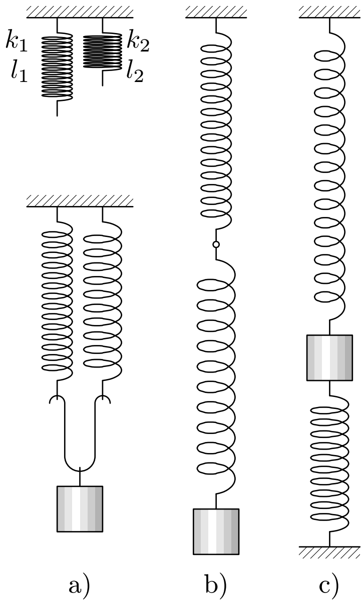
Vychýlíme-li závaží do výšky y, síly pružin se zmenší a na závaží působí výsledná síla o souřadnici

$$F = k_1(\Delta l_1 - y) + k_2(\Delta l_2 - y) - mg = \\ = -(k_1 + k_2)y\,. \qquad (53)$$

Oscilátor kmitá stejně, jako kdybychom použili jedinou pružinu o tuhosti

$$k = k_1 + k_2\,. \qquad (54)$$

Při paralelním spojení pružin se jejich tuhosti sčítají.



Obr. 21

b) Sériově spojené pružiny jsou v rovnovážné poloze obě zatíženy celou tíhou závaží:

$$mg = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2\,. \qquad (55)$$

Vychýlíme-li závaží do výšky y, zkrátí se první pružina o y_1, druhá o y_2 a obě budou napnuty stejnou silou o velikosti

$$F_\mathrm{p} = k_1(\Delta l_1 - y_1) = k_2(\Delta l_2 - y_2)\,. \tag{56}$$

Na závaží působí výsledná síla o souřadnici

$$F = F_\mathrm{p} - mg = -k_1 y_1 = -k_2 y_2\,. \tag{57}$$

Porovnáním vztahů dostaneme:

$$y = y_1 + y_2 = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} = -\frac{F}{k}\,, \qquad F = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}y\,. \tag{58}$$

Oscilátor kmitá stejně, jako kdybychom použili jedinou pružinu, pro jejíž tuhost platí

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\,, \qquad k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,. \tag{59}$$

Při sériovém spojení pružin se sčítají převrácené hodnoty jejich tuhostí.

c) Ve třetím případě působí na závaží síly pružin v opačných směrech. V rovnovážné poloze platí

$$mg = k_1 \Delta l_1 - k_2 \Delta l_2\,. \tag{60}$$

Vychýlíme-li závaží do výšky y, bude na ně působit výsledná síla o souřadnici

$$F = k_1(\Delta l_1 - y) - k_2(\Delta l_2 + y) - mg = -(k_1 + k_2)y\,. \tag{61}$$

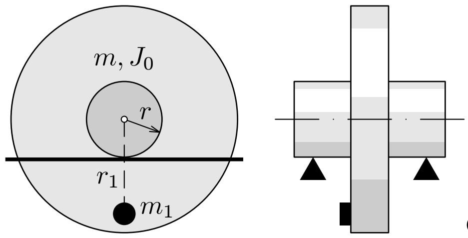
Oscilátor kmitá stejně, jako kdybychom použili jedinou pružinu o tuhosti

$$k = k_1 + k_2\,. \tag{62}$$

Případy a) a c) jsou tedy co do periody kmitů ekvivalentní.

B. Kolébání nesymetrického tělesa

Setrvačník o hmotnosti m a momentu setrvačnosti J_0 je hřídelí o poloměru r položen na vodorovné kolejnice (obr. 22). Ve vzdálenosti r_1 od osy je k setrvačníku připevněn malý přívažek o hmotnosti m_1.



Obr. 22

Odvalíme-li setrvačník z rovnovážné polohy tak, že se otočí o malý úhel α_m, bude osa setrvačníku po jeho uvolnění konat harmonický kmitavý pohyb s amplitudou x_m a při průchodu rovnovážnou polohou bude mít rychlost v_m (obr. 23):

$$x_\mathrm{m} \doteq r\alpha_\mathrm{m}\,, \qquad v_\mathrm{m} \doteq \omega x_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{T}x_\mathrm{m},. \tag{63}$$

Potenciální energie v krajní poloze

$$E_\mathrm{p} = m_1 gh = m_1 g r_1(1-\cos\alpha_\mathrm{m}) = m_1 g r_1\left(1-\sqrt{1-\sin^2\alpha_\mathrm{m}}\right) \doteq$$

$$\doteq m_1 g r_1 \frac{\sin^2\alpha_\mathrm{m}}{2} = m_1 g r_1 \frac{x_\mathrm{m}^2}{2r^2} \tag{64}$$

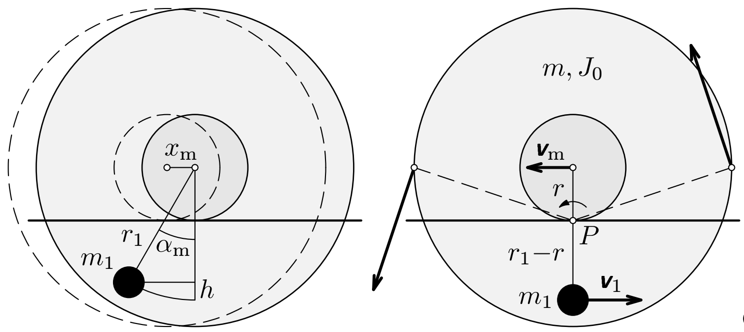
je stejná jako kinetická energie při průchodu rovnovážnou polohou, kdy se setrvačník otáčí okolo okamžité osy procházející bodem P úhlovou rychlostí Ω_m:

$$\Omega_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}}{r}\,, \qquad E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\Omega_\mathrm{m}^2\,, \quad \text{kde} \quad J = J_0 + mr^2 + m_1(r_1-r)^2 \tag{65}$$

je moment setrvačnosti vzhledem k okamžité ose. Porovnáním vztahů dostaneme:

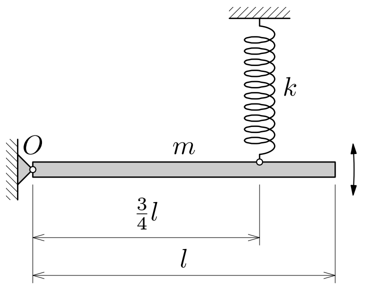
$$m_1 r_1 g\frac{x_\mathrm{m}^2}{2r^2} = \frac{1}{2}[J_0 + mr^2 + m_1(r_1-r)^2]\frac{\omega^2 x_\mathrm{m}^2}{r^2}\,, \tag{66}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 r_1 g}{J_0 + mr^2 + m_1(r_1-r)^2}}\,. \tag{67}$$



Obr. 23

C. Kývání tyče působením pružné síly



Obr. 24

Homogenní tyč stálého průřezu o hmotnosti m a délce l je je jedním koncem otáčivě upevněna v bodě O. Ve vodorovné rovnovážné poloze je držena svislou pružinou o tuhosti k a zanedbatelné hmotnosti, která je k tyči připevněna ve třech čtvrtinách délky (obr. 24). Tyč rozkýváme ve svislém směru tak, že bod, ve kterém je pružina upevněna k tyči, koná harmonické kmity s malou amplitudou y_{m}. Při průchodu rovnovážnou polohou má tedy rychlost $v_{\mathrm{m}} = \omega y_{\mathrm{m}}$.

V krajní poloze má soustava potenciální energii $E_{\mathrm{p}} = k y_{\mathrm{m}}^2/2$. Při průchodu rovnovážnou polohou se tyč otáčí úhlovou rychlostí Ω_{m} a má kinetickou energii $E_{\mathrm{k}} = J\Omega_{\mathrm{m}}^2/2$, kde J je moment setrvačnosti tyče vzhledem k bodu O:

$$\Omega_{\mathrm{m}} = \frac{v_{\mathrm{m}}}{\frac{3}{4}l} = \frac{4\omega y_{\mathrm{m}}}{3l}\,, \qquad J = \frac{1}{3}ml^2\,. \tag{68}$$

Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}k y_{\mathrm{m}}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{ml^2}{3}\cdot\frac{16\omega^2 y_{\mathrm{m}}^2}{9l^2}\,, \qquad \omega = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3k}{m}}\,. \tag{69}$$

Úloha 9

Určete periodu malých kmitů homogenní kuličky o poloměru r, kterou položíme na dno misky tvaru kulového vrchlíku o poloměru $R > r$ a vychýlíme z rovnovážné polohy.

Řešení úloh

1. a) $T = 1{,}20\ \mathrm{s}$, $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}833\ \mathrm{Hz}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5{,}24\ \mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$,

b) $y_\mathrm{m} = 6{,}0\ \mathrm{cm}$, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}\ \mathrm{rad}$, c) $v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = 0{,}314\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,

d) $a_\mathrm{m} = \omega^2 y_\mathrm{m} = 1{,}64\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

e) Měřítka na osách rychlosti a zrychlení:

$$1\ \mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, \quad 1\ \mathrm{cm} \mathrel{\widehat{=}} 2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

f) $\{y\} = 0{,}060 \sin\left(5{,}24\{t\} + \dfrac{\pi}{6}\right)$, g) $\{v\} = 0{,}314 \cos\left(5{,}24\{t\} + \dfrac{\pi}{6}\right)$,

h) $\{a\} = -1{,}64 \sin\left(5{,}24\{t\} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. Řešením soustavy rovnic $y_0 = y_\mathrm{m} \sin\varphi_0$, $v_0 = \omega y_\mathrm{m} \cos\varphi_0$ dostaneme

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\omega y_0}{v_0} = \frac{2\pi y_0}{T v_0} = -0{,}27187 \quad \wedge \quad \sin\varphi_0 > 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_0 = 2{,}88\ \mathrm{rad},$$

$$y_\mathrm{m} = \frac{y_0}{\sin\varphi_0} = 17{,}2\ \mathrm{cm}.$$

3. a) Uvolněné závaží kmitá okolo rovnovážné polohy, ve které by se po delší době zastavilo. Když se závaží nachází v dolní krajní poloze, působí na siloměr síla o velikosti 6,6 N. Když se nachází v horní krajní poloze, působí na siloměr síla o velikosti 2,0 N. Po ustálení závaží v rovnovážné poloze bude tedy na siloměr působit síla o velikosti 4,3 N. Tíha samotné pružiny je přibližně 0,2 N. Tíha závaží má tedy velikost 4,1 N a hmotnost závaží je $m = 0{,}42\ \mathrm{kg}$. Hmotnost pružiny je malá v porovnání s hmotností závaží. Proto ji zanedbáme.
Z grafu odečteme periodu kmitů: $8T = 7{,}0\ \mathrm{s}$, $T = 0{,}87\ \mathrm{s}$.
Pružina má tuhost $k = m\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} \doteq 22\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

b) Amplituda výsledné síly, která během kmitání působí na závaží, je $F_\mathrm{m} = 2{,}3\ \mathrm{N}$. Tomu odpovídají amplitudy výchylky a rychlosti

$$y_\mathrm{m} = \frac{F_\mathrm{m}}{k} = 0{,}115\ \mathrm{m} \qquad v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = \frac{2\pi y_\mathrm{m}}{T} = 0{,}76\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},.$$

4. $D = J\omega^2 = \dfrac{4\pi^2 m l^2}{12 T^2} = 0{,}018\ \mathrm{N\cdot m\cdot rad^{-1}}$.

Moment setrvačnosti tyče poloviční délky je $J_1 = \frac{1}{12} \cdot \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{J}{8}$.

Periody jsou v poměru $\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{J_1}{J}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

5. Do vztahu (43) pro výpočet doby kmitu kyvadla dosadíme

$$d = \frac{l}{2}, \quad J = J_0 + md^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

a dostaneme hledaný vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{\frac{mgl}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}\,.$$

Doba kmitu homogenní tyče při dané poloze osy je $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$.

6. Pomocí Steinerovy věty určíme moment setrvačnosti vzhledem k ose kyvadla:

$$J = J_0 + mR^2 = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2\,.$$

Doba kmitu potom je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3mR^2}{2}}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^\star}{g}}$$

a redukovaná délka

$$l^\star = \frac{3}{2}R\,.$$

Přemístíme-li osu do vzdálenosti $l^\star - R = R/2$ od těžiště desky, doba kmitu se nezmění.

7. Řešení rozdělíme na několik částí:

a) Určení polohy těžiště útvaru — kotouče s vyříznutým otvorem: Podobné úlohy jste řešili v 1. ročníku. Přesvědčte se, že těžiště kyvadla leží ve vzdálenosti $R/6$ pod středem kotouče S.

b) Určení momentu setrvačnosti vzhledem k ose kyvadla: Od momentu setrvačnosti plného kotouče, jehož hmotnost označíme m, odečteme moment setrvačnosti vyříznutého kotouče:

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{4} \cdot \frac{R^2}{4} - \frac{m}{4} \cdot \frac{R^2}{4} = \frac{45}{32} mR^2 \,.$$

c) Určení doby kmitu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\frac{3m}{4} gd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{45mR^2}{32}}{\frac{3m}{4} g \frac{7R}{6}}} = 3\pi \sqrt{\frac{5R}{7g}} \,.$$

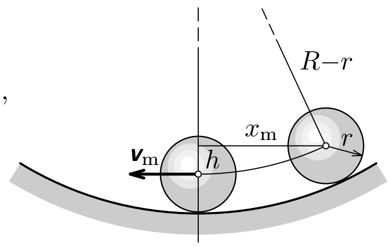
8. $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{J}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{2mR^2}{mgR}} = 2\pi \sqrt{\dfrac{2R}{g}} \,, \qquad l^\star = 2R \,.$

9. Vyjdeme z obr. 25:

$$h = (R-r) - \sqrt{(R-r)^2 - x_\mathrm{m}^2} \doteq \frac{x_\mathrm{m}^2}{2(R-r)} \,,$$

$$v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m}, \quad \Omega_\mathrm{m} = \frac{v_\mathrm{m}}{r}, \quad J = \frac{2}{5} mr^2 \,,$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v_\mathrm{m}^2 + \frac{1}{2} J \Omega_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m v_\mathrm{m}^2 \,,$$



Obr. 25

$$mg \frac{x_\mathrm{m}^2}{2(R-r)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} m \omega^2 x_\mathrm{m}^2 \,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \,, \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{7(R-r)}{5g}} \,.$$

Literatura

[1] Lepil, O.: *Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění*. Prometheus, Praha 1994

[2] Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami*. Knihovnička fyzikální olympiády č. 38, MAFY, Hradec Králové 1999

[3] Vybíral, B.: *Řešení kmitavých soustav užitím energie*. Studijní text 13. ročníku FO, 1971

[4] Košťál, R.: *Jednoduchý kmitavý pohyb*. Studijní text 18. ročníku FO, 1976

[5] Košťál, R.: *Jednoduchý kmitavý pohyb II*. Studijní text 19. ročníku FO, 1977