ELEKTROMAGNETICKÁ INDUKCE

(Elektrodynamika 3)

Studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod

Elektromagnetická indukce patří k významným fyzikálním jevům, které tvoří nejen jeden z důležitých pilířů teorie elektromagnetického pole, nýbrž který také nachází široké aplikace v technice, např. v energetice, měřící či komunikační technice. Bez zařízení jako jsou alternátory, transformátory, betatrony, antény aj., by stěží mohla existovat současná civilizace, i když si to řadový občan ani neuvědomuje.

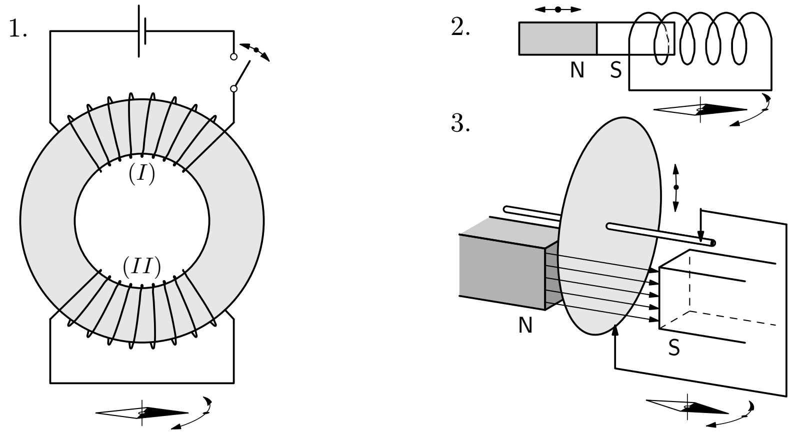
Předložený text se zabývá elektromagnetickou indukcí a jejími základními fyzikálními aplikacemi. Tvoří třetí díl elektrodynamiky – volně navazuje na texty [13], [14], které byly zaměřeny na magnetické pole. Nejprve je věnována pozornost zákonu elektromagnetické indukce – rozboru Faradayových experimentů a matematické formulaci zákona. Poté se definuje a počítá vlastní a vzájemná indukčnost vodičů. Pozornost je věnována rovněž energii magnetického pole, přechodným jevům a významným obvodům střídavého proudu. Důležitou součástí textu jsou aplikace elektromagnetické indukce, které jsou fyzikálně zajímavé a prakticky významné – vázané oscilační obvody, transformátor, Foucaltovy proudy, skinefekt a betatron.

Při výkladu látky byla dodržena osvědčená metoda – popis experimentu, teoretický výklad, formulace zákonitosti, aplikace, řešený příklad, úlohy. V textu je zařazeno 11 příkladů. Na závěr je zadáno 16 úloh k řešení, přičemž výsledky řešení (případně u obtížnějších úloh i naznačené řešení) jsou uvedeny.

1 Zákon elektromagnetické indukce

1.1 Historie objevu

Po roce 1820, kdy byl učiněn objev, že při průchodu elektrického proudu vodičem vzniká v jeho okolí magnetické pole, začali fyzikové hledat děj opačný – jak magnetickým polem vyvolat elektrický proud. Problémem se od r. 1821 intenzivně zabýval zejména Angličan Michael Faraday (1791 – 1867). Je překvapující, že tento původem knihařský tovaryš, syn kováře bez systematického vzdělání, vyslovil ideu o jednotě všech sil a jevů v přírodě (podobně jako už před ním I. Newton) a ideu o existenci elektrického a magnetického pole[1] jako entity šířící se konečnou rychlostí v prostoru. To jej přivádí k myšlence, že když elektrický proud vyvolává magnetické účinky, pak by se měl magnetickým polem nějak vyvolat elektrický proud (ptá se: „jak přeměnit magnetismus v elektřinu?“). Faraday byl ryzí experimentátor bez matematického vzdělání (ve své době to bylo svým způsobem štěstí, protože jej to nesvedlo na scestí v době vznikajících teorií končících mnohdy ve slepé uličce). Několik let soustavně a pečlivě experimentoval až konečně r. 1831, v době od srpna do října provedl tři základní experimenty s elektromagnetickou indukcí (viz obr. 1):



Obr. 1 Faradayovy experimenty s elektromagnetickou indukcí

[1]Faraday je i autorem fyzikálního pojmu *pole,* jako reality, která se rozprostírá mezi interagujícími objekty a která zprostředkovává konečnou rychlostí silové působení (interakci). Tím řešil staletý problém okamžitého působení na dálku („actio indistans“). Nebyl však ve své době pochopen.

1. Vytvořil soustavu dvou cívek na společném železném prstenci. Když pak do jedné (I) přivedl přes spínač elektrický proud z baterie, tak se magnetka[2], rovnoběžně umístěná pod vodorovným drátem spojujícím konce druhé cívky (II), vychýlila a poté se vrátila do původní polohy. Po přerušení proudu v první cívce se magnetka vychýlila na opačnou stranu a vrátila zpět.

2. Při druhém pokusu zasouval do vzduchové cívky (solenoidu) tyčový permanentní magnet. Při vsouvání magnetu zjistil výchylku na jednu stranu, při vysouvání na opačnou stranu. Jakmile pohyb magnetu zastavil, vrátila se magnetka do původní polohy. Přitom je lhostejné, zda pohybujeme magnetem nebo cívkou, rozhodující je relativní pohyb.

3. Pro třetí pokus zhotovil měděný kotouč, jehož obvod a osa byly pomocí klouzavého kontaktu vodivě spojeny drátem, pod nímž se nacházela indikační magnetka. Když kotoučem otáčel v magnetickém poli permanentního magnetu, pozoroval výchylku magnetky v jednom směru; když směr otáčení změnil, přešla výchylka magnetky v opačnou.

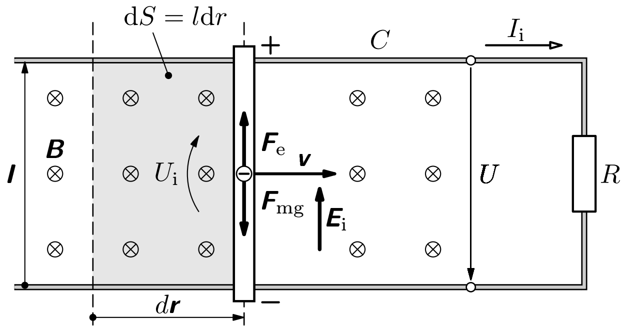
Těmito pokusy Faraday prokázal, že změnou magnetického pole se indukuje elektrické pole. Všechny tyto tři jevy se dají popsat jediným obecně platným indukčním zákonem. Jeho matematickou formulaci podal až v r. 1845 teoretik F. E. Neumann (1798 – 1895). Faradayův indukční zákon zařadil r. 1855 J. C. Maxwell (1831 –1879) do své soustavy hlavních rovnic elektromagnetického pole. Faradayovým objevem se začala rozvíjet teorie nestacionárního elektromagnetického pole.

V následujícím textu provedeme teoretický výklad Faradayových pokusů a odvodíme obecný tvar indukčního zákona. Zajímavé přitom je, že vystačíme se zákony pro magnetické pole elektrického proudu, jejichž výklad byl předmětem publikace [13].

1.2 Elektrické pole indukované pohybem vodiče v magnetickém poli

Nejprve se budeme věnovat nejjednoduššímu případu elektromagnetické indukce, který je jednoduchou variantou experimentu 2 na obr. 1.

[2]Faraday použil zavěšenou astatickou magnetku – viz [14] str. 34. Jde o soustavu dvou rovnoběžných magnetek se vzájemně opačně orientovanými póly; pak je výchylka nezávislá na geomagnetickém poli. Výhodné je umístit spojovací vodič se zkoumaným proudem u našeho pokusu mezi tyto magnetky – citlivost bude dvojnásobná. Při použití jen jedné magnetky musí mít spojovací vodič severojižní orientaci. Dnes užíváme pro indikaci indukovaného proudu galvanometr.



Obr. 2 K elektromagnetické indukci při pohybu vodiče v magnetickém poli

Nechť se v homogenním příčném a časově neměnném magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}(= \boldsymbol{konst})$ nachází pohyblivý přímý vodič (tyčka) o aktivní délce l (obr. 2). Vodič se může posouvat po rovnoběžných drátech (o zanedbatelném odporu) připojených k rezistoru o odporu R. Budeme-li vodičem vůči magnetickému poli pohybovat relativní rychlostí $\boldsymbol{v}$, bude na záporné nositele náboje $q = -e$ (elektrony) působit magnetická složka Lorentzovy síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{mg} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ (viz [13], str. 30), která má v našem případě velikost $F_\mathrm{mg} = evB$, neboť $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{B}$.

Působením magnetické síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{mg}$ se elektrony budou přemísťovat k dolní části vodiče, přičemž pohyb elektronů je omezen na úsečku (lineárního) vodiče. Tak se dolní část vodiče nabíjí záporně a horní kladně. Tím vzniká ve vodiči elektrostatické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, které působí na elektrony silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = -e\boldsymbol{E}$ opačného směru než má síla magnetická. Jak hustota elektronů na dolní části vodiče vzrůstá, tak se silový účinek magnetického pole na elektrony v pohybujícím se vodiči postupně zeslabuje a zcela vymizí, když v rovnovážném stavu bude platit $\boldsymbol{F}_\mathrm{mg} + \boldsymbol{F}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$, neboli $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.

Primárním činitelem probíhajícího děje uvnitř vodiče je magnetická (neelektrostatická) síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{mg}$. Její „motorické“ působení na záporně nabité elektrony modelujeme *indukovaným elektrickým polem* o intenzitě

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{mg}}{-\,e} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{1}$$

Ve výše popsaném stavu rovnováhy bude tedy platit rovnice $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$, neboli intenzita $\boldsymbol{E}$ elektrostatického pole je namířena proti intenzitě $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ indukovaného (neelektrostatického) pole.

Protože aktivní část pohybujícího se vodiče je přímá a v každém bodě předpokládáme stejné $\boldsymbol{B}$ (magnetické pole jsme volili homogenní), bude i indukované elektrické pole podél vodiče homogenní a můžeme proto snadno vypočítat *indukované elektromotorické napětí* mezi konci tyčky

$$U_\mathrm{i} = E_\mathrm{i} l = Blv. \tag{2}$$

Příslušné indukované elektromotorické napětí lze vyjádřit i obecněji pomoci integrálu – viz např. [13], str. 12. Pak

$$U_\mathrm{i} = \oint_C \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{l} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l}, \tag{3}$$

neboť podél uzavřené křivky C (viz obr. 2), resp. v uzavřeném elektrickém obvodu, vzniká elektrické pole jen podél úseku $\boldsymbol{l}$, kde je $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \boldsymbol{konst}$.

V uzavřeném elektrickém obvodu, tj. po připojení rezistoru o odporu R (viz obr. 2), prochází indukovaný elektrický proud

$$I_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{i}}{R} = \frac{Blv}{R}. \tag{4}$$

Směr indukovaného proudu je zřejmý z obr. 2 a obecně jej určuje *Flemingovo pravidlo pravé ruky:* Položíme-li pravou ruku na vodič tak, aby indukční čáry magnetického pole vstupovaly do dlaně a palec ukazoval směr pohybu vodiče, pak prsty ukazují směr indukovaného proudu.

Pro vektorové vyjádření ve výrazu (3) jsme tyčku popsali vektorem $\boldsymbol{l}$ ve směru indukovaného proudu, resp. intenzity $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ indukovaného pole.

Vrátíme se k výsledku (3), který nám umožní obecnější vyjádření indukčního zákona. Především skalární součin $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \boldsymbol{l}$ popisuje obecnější případ než znázorňuje obr. 2 – tyčka se může vzhledem k rovnoběžným drátům pohybovat šikmo.

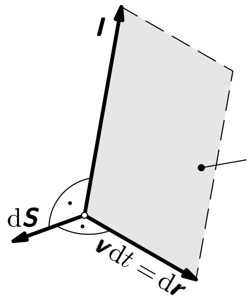
Z matematického hlediska představuje vztah (3) smíšený vektorový součin tří vektorů, pro který platí pravidlo o záměně členů[3]. Násobíme-li rovnici ještě faktorem $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}$, dostaneme

$$U_\mathrm{i} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l} = -(\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{l} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B} =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{v}\mathrm{d}t \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{1}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B},$$

kde $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ je vektorový element plochy rovinného elektrického obvodu opsané tyčkou za čas $\mathrm{d}t$. Element plochy lze považovat za vektor, využijeme-li vlastnosti vektorového součinu (viz obr. 3).

[3] Platí $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b}$, neboť na základě geometrické interpretace vyjadřuje tento součin objem rovnoběžnostěnu nad vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. V posledním výrazu bylo využito pravidlo pro vektorový součin: $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$.



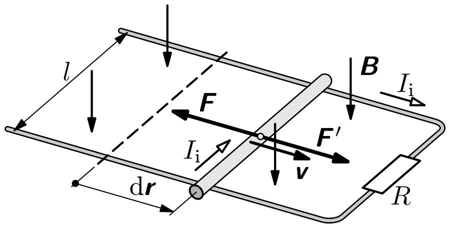
Obr. 3 Vektor d$\boldsymbol{S}$ elementu plochy jako aplikace vektorového součinu; směr vektoru d$\boldsymbol{S}$ je kolmý k ploše a určuje se podle pravidla pravé ruky

Uvážíme-li dále, že $\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{d}\Phi$ je element magnetického indukčního toku, můžeme vztah pro indukované elektromotorické napětí psát v konečném tvaru

$$\boxed{U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}, \tag{5}$$

který je obecným vyjádřením *Faradayova zákona elektromagnetické indukce.* Neboli *indukované elektromotorické napětí v elektrickém obvodu je rovno rychlosti změny magnetického indukčního toku procházejícího obvodem.* Znaménko minus v (5) vyjadřuje jev, že *indukované napětí je takového směru, že brání změně magnetického indukčního toku, která jej vyvolala.* Tak to vyjádřil r. 1834 H. F. Lenz (1804 – 1865) a jev se označuje jako *Lenzův zákon.*

Popsaný indukční jev je v obecném souladu se zákonem zachování energie, jak si ukážeme energetickou bilancí pokusu z obr. 2. Pohybem vodiče rychlostí $\boldsymbol{v}$ se bude v obvodu indukovat proud I_i podle (4). Působením magnetického pole $\boldsymbol{B}$ pak bude na pohyblivou tyčku působit reakční magnetická síla $\boldsymbol{F}$, která má podle Ampérova zákona (viz [13], str. 24) velikost $F = BI_\mathrm{i}l = \dfrac{B^2l^2v}{R}$.



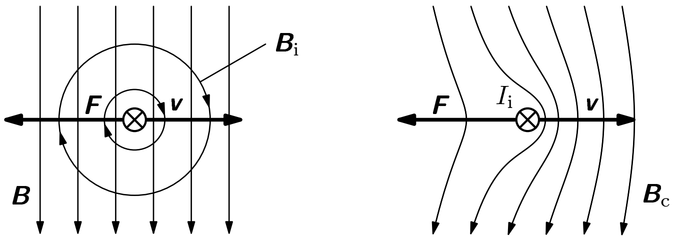
Obr. 4 K energetické bilanci elektromagnetické indukce

Abychom vodič udrželi v rovnoměrném přímočarém pohybu rychlostí $\boldsymbol{v}$, musíme na něj působit vnější silou $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$ (viz obr. 4), a tím vykonat na dráze $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ elementární práci

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}' \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F'v\ \mathrm{d}t = \frac{B^2l^2v^2}{R}\mathrm{d}t = \frac{U_\mathrm{i}^2}{R}\mathrm{d}t = RI_\mathrm{i}^2\mathrm{d}t, \tag{6}$$

kde U_i a I_i je dáno vztahy (2) a (4). Tato práce se spotřebuje na zvětšení kinetické energie volných elektronů ve vodiči, tedy $\mathrm{d}W = \mathrm{d}E_\mathrm{k}$ [4]. V důsledku ohmického odporu R vodiče se tato energie projeví jako přírůstek vnitřní energie $\mathrm{d}U$ rezistoru, tedy jako přírůstek kinetické energie kmitavého pohybu iontů v krystalické mřížce rezistoru, neboli zvýšením teploty vodiče. Tato změna vnitřní energie je rovna *Jouleovu teplu* $\mathrm{d}U = \mathrm{d}W$.

Jev popsaný Lenzovým zákonem (tj. indukovaný proud je takového směru, že brání změně, která jej vyvolala) můžeme vysvětlit i superpozicí magnetických polí. Složíme-li primární magnetické pole $\boldsymbol{B}$ s magnetickým polem $\boldsymbol{B}_\mathrm{i}$ vyvolaným indukovaným proudem I_i (obr. 5a), dostaneme výsledné pole $\boldsymbol{B}_\mathrm{c} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}_\mathrm{i}$ (obr. 5b), které zřejmě naznačuje, že proti pohybu vodiče, podmiňujícím magnetickou indukci, působí mechanický odpor popsaný reakční magnetickou silou $\boldsymbol{F}$.



Obr. 5 K výkladu Lenzova zákona užitím superpozice magnetických polí; $\boldsymbol{F}$ je reakční magnetická síla působící proti pohybu vodiče rychlostí $\boldsymbol{v}$

Velikost indukovaného napětí závisí podle Faradayova zákona (5) na rychlosti změny magnetického indukčního toku. Té se ve vyšetřovaném případě dosahuje časovou proměnností plochy, kterou tok prochází. Typickým příkladem je otáčení smyčky v homogenním magnetickém poli (viz příklad 1). Na tomto principu je založena výroba elektrického proudu v alternátorech a dynamech.

Poznámka: V dosavadním výkladu jsme soustavně pracovali s veličinou *elektromotorické napětí* U_e, za kterou považujeme i indukované napětí U_i podle výrazů (2), (3) a (5). V teorii elektrických obvodů se pracuje s obvodovou veličinou *svorkové napětí* U – je to napětí, které naměříme na zdroji (např. na baterii nebo na cívce, v níž se indukuje napětí) elektronickým voltmetrem (s velkým vnitřním odporem) nebo osciloskopem jako *napětí naprázdno* (U_0). Toto napětí

[4]Energii budeme v této publikaci označovat všeobecně užívaným symbolem E, i když v teorii elektromagnetického pole se označuje W, aby se odstranila kolize se symbolem pro velikost E intenzity $\boldsymbol{E}$.

U má definovaný kladný směr od bodu s větším potenciálem k bodu s potenciálem nižším (resp. u zdroje stejnosměrného proudu od pólu plus k minus). Podstatné je, že má tedy opačnou orientaci než napětí elektromotorické U_e. Na obr. 2 je orientovaným obloukem označeno indukované elektromotorické napětí U_e a orientovanou úsečkou napětí na svorkách U, a to v opačném směru. Pak *svorkové*, resp. *obvodové indukované napětí* bude

$$U = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

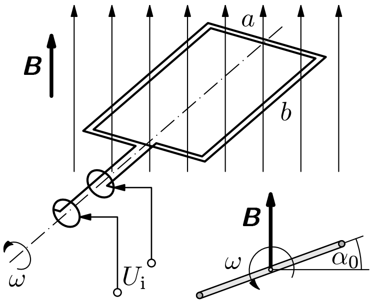
Nebude-li řečeno jinak, budeme v dalším textu pracovat s napětím elektromotorickým podle (5). Viz rovněž poznámku na str. 42.

Příklad 1 – jednoduchý alternátor

Obdélníková cívka o rozměrech a, b a N závitech se rovnoměrně otáčí úhlovou rychlostí ω v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. Rovina cívky svírá s rovinou kolmou k indukčním čarám počáteční úhel α_0 (obr. 6).

a) Odvoďte vztah pro napětí na svorkách tohoto jednoduchého generátoru střídavého proudu (alternátoru).

b) Jaká bude časová závislost momentu síly a výkonu motoru, který bude otáčet rotorem tohoto generátoru při jeho zatížení rezistorem o odporu R (indukčnost obvodu pro jednoduchost neuvažujte).



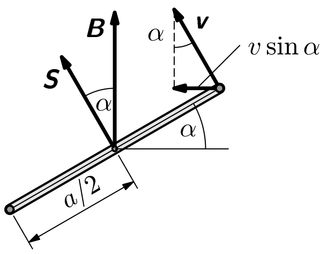
Obr. 6 Cívka v magnetickém poli

Řešení

a) *První způsob*

Strana cívky o délce b protíná v poloze popsané úhlem $\alpha = \omega t + \alpha_0$ indukční čáry rychlostí o velikosti (obr. 7)

$$v \sin\alpha = \omega \frac{a}{2} \sin(\omega t + \alpha_0).$$



Obr. 7 K výpočtu indukovaného napětí

Na $2N$ stranách cívky o délce b se v souladu se vztahem (2) indukuje elektromotorické napětí

$$U_i = B \cdot 2Nb \cdot v \sin\alpha = NBab\omega \sin(\omega t + \alpha_0) = NBS\omega \sin(\omega t + \alpha_0),$$

kde $S = ab$ je plošný obsah jednoho závitu. Indukované elektromotorické napětí je zřejmě střídavé o amplitudě $NBS\omega$.

Druhý způsob

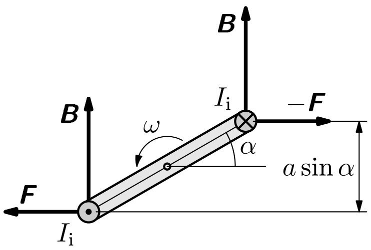
K výsledku se dostaneme rychleji užitím obecného tvaru (5) indukčního zákona. V obecné poloze popsané úhlem α cívky prochází jedním závitem indukční tok daný skalárním součinem vektoru indukce $\boldsymbol{B}$ a vektoru S rovinné plochy závitu (viz obr. 7), tj. $\Phi_1 = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = Bab\cos\alpha = BS\cos(\omega t + \alpha_0)$. Protože cívka má N závitů, bude celkový tok $\Phi = N\Phi_1$. Indukované napětí dostaneme ze vztahu (5) derivací:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin(\omega t + \alpha_0). \tag{8}$$

b) Při zatížení alternátoru rezistorem o odporu R bude obvodem cívky procházet proud

$$I_i = \frac{U_i}{R} = \frac{NBS\omega}{R} \sin(\omega t + \alpha_0) \tag{9}$$

a proti otáčení působí na cívku dvojice sil $\boldsymbol{F}$, jejichž směr je zřejmý z obr. 8.



Obr. 8 K výpočtu momentu síly

Pro jejich velikost platí $F = BI_iNb$. Hnací motor alternátoru musí tedy překonávat moment dvojice sil

$$M = Fa\sin\alpha = (NBS)^2 \frac{\omega}{R} \sin^2(\omega t + \alpha_0).$$

Týž výsledek dostaneme, vypočteme-li užitím výrazů (8) a(9) výkon $P = U_iI_i$ alternátoru a vyjádříme jej pomocí momentu síly. Pak $M = \frac{P}{\omega} = \frac{U_i^2}{\omega R}$, po dosazení za U_i

$$M = (NBS)^2 \frac{\omega}{R} \sin^2(\omega t + \alpha_0).$$

Neuvažujeme-li mechanické ztráty, je výkon hnacího motoru roven elektrickému výkonu alternátoru, tj.

$$P = M\omega = U_iI_i = \frac{(NBS\omega)^2}{R} \sin^2(\omega t + \alpha_0).$$

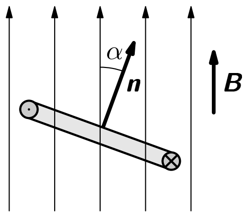
Z odvozených výsledků je zřejmé, že síla $\boldsymbol{F}$ mění znaménko (v souladu s průběhem funkce $\sin\alpha$), kdežto moment síly a výkon jsou nezáporné (v souladu s průběhem funkce $\sin^2\alpha$).

Příklad 2 – balistický magnetometr

Čtvercová cívka o straně a má N závitů a je umístěna v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$ tak, že její normála $\boldsymbol{n}$ svírá se směrem indukce úhel $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$.

a) Jaký náboj Q projde galvanometrem připojeným k cívce, když cívkou pootočíme z polohy α_1 do α_2. Elektrický odpor obvodu je R.
b) Poznatku z bodu a) využijte k určení velikosti $\boldsymbol{B}$, když při otočení z polohy $\alpha_1 = 0$ do $\alpha_2 = \pi$ prošel galvanometrem náboj Q_0.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty: $a = 20$ mm, $N = 6$, $Q_0 = 30\ \mu$C a $R = 1{,}6\ \Omega$.



Obr. 9 K výpočtu momentu síly

Řešení

a) Podle indukčního zákona a Ohmova zákona platí

$$U_\mathrm{i} = -\frac{B\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}, \quad U_\mathrm{i} = RI = R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

kde $\mathrm{d}S = \mathrm{d}(Na^2 \cos\alpha) = Na^2 \mathrm{d}(\cos\alpha) = -Na^2 \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha$ je celková změna plochy všech závitů při pootočení cívky v obecné poloze o $\mathrm{d}\alpha$.
Pak $\mathrm{d}Q = -\frac{B}{R}\mathrm{d}S = \frac{Na^2 B}{R} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha$,

$$Q = \frac{Na^2 B}{R} \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha = \frac{Na^2 B}{R} \overbrace{(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}^{2 \text{ pro } \alpha_1 = 0,\, \alpha_2 = \pi}$$

b) Protože v uvažovaném případě $(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 2$, bude pro velikost měřené indukce platit $B = \frac{Q_0 R}{2Na^2} = 10$ mT.

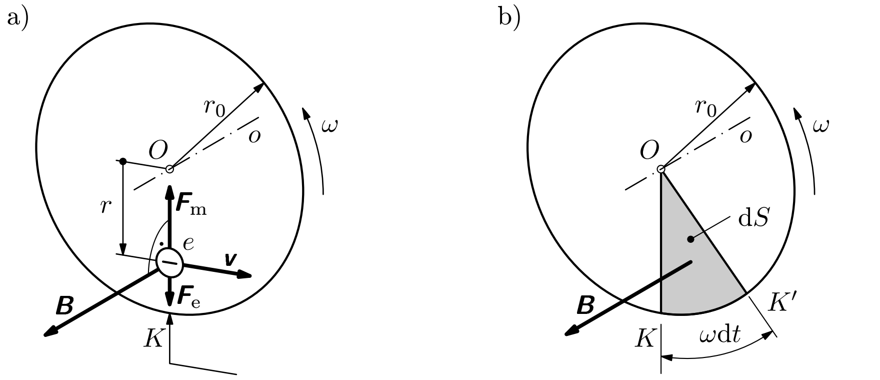
Poznámky

- Náboj měříme málo zatlumeným galvanometrem s dlouhou dobou kyvu (tj. balistickým galvanometrem – viz úlohu 15) tak, že při projití náboje v krátkém časovém intervalu změříme jeho první (tj. balistickou) výchylku β. Náboj pak je $Q = k\beta$, kde k je balistická konstanta určovaná experimentálně průchodem známého náboje (při vybití kondenzátoru $Q = CU$).

- Měříme-li pole elektromagnetu, nemusíme cívkou otáčet. Postavíme ji kolmo k indukčním čarám a vypneme (nebo zapneme) proud do elektromagnetu. Potom je $S = konst.$ a B se změní od B do 0. Pak $B = \dfrac{Q_0 R}{Na^2}$.

1.3 Elektrické pole indukované rotací Faradayova kotouče

Nyní se zaměříme na výklad třetího Faradayova experimentu z obr. 1. Ten není z hlediska indukčního zákona ve formulaci (5) na první pohled již tak zřejmý. Kotouč se otáčí v homogenním časově neproměnném magnetickém poli a linie obvodu, v němž se indukuje proud, zůstává rovněž časově neproměnná.



Obr. 10 K výkladu indukovaného pole u Faradayova kotouče; magnetické pole $\boldsymbol{B}$ je na celé polovině, tj. od osy O ke kontaktu K, homogenní

Nejprve provedeme výklad mikroskopický (obr. 10a). Na vodivostní elektron nacházející se na poloměru r mezi osou O a klouzavým kontaktem K, působí v magnetickém poli $\boldsymbol{B}$ v důsledku jeho rychlosti $\boldsymbol{v}$ magnetická složka Lorentzovy síly

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{mg} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \quad \text{kde } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Protože jednotlivé vektory jsou na sebe kolmé, má síla velikost $F_\mathrm{mg} = Be\omega r$ a míří v našem případě k ose O. Hustota elektronů u osy se bude zvětšovat, kdežto u obvodu kotouče zmenšovat. Mezi kontaktem K a osou O vznikne elektrostatické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$, které na elektrony působí silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{e} = -e\boldsymbol{E}$ opačného směru než je síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{mg}$. V rovnovážném stavu bude $\boldsymbol{F}_\mathrm{mg} + \boldsymbol{F}_\mathrm{e} = \boldsymbol{0}$, neboli $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$. Intenzita neelektrostatického indukovaného elektrického pole $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ je

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = \frac{\boldsymbol{F}_\mathrm{mg}}{-e} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

stejně jako v případě prvního Faradayova experimentu – viz výraz (1). Pro velikost intenzity indukovaného elektrického pole zřejmě platí

$$E_\mathrm{i} = Bv = B\omega r.$$

Indukované elektrické pole je nehomogenní, protože závisí na vzdálenosti r od osy O. Napětí indukované v elektrickém obvodu C kotouče, tedy napětí mezi body O a K, je

$$U_\mathrm{i} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^{r_0} B\omega r \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} B\omega r_0^2.$$

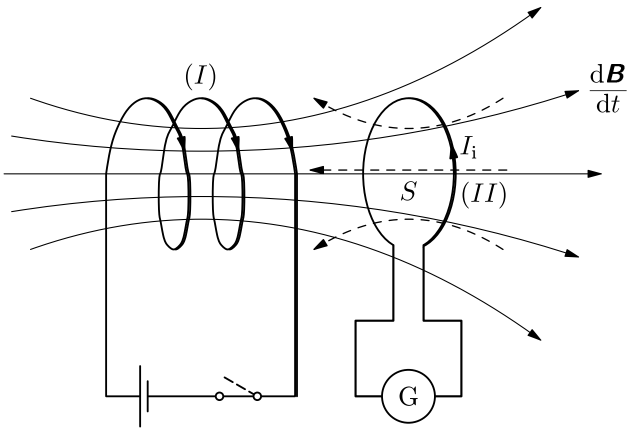
Budeme-li chtít jev indukce vysvětlit užitím zákona ve tvaru (5), představíme si, že část uzavřeného obvodu mezi O a K je dána pohyblivým poloměrem délky r_0, který se za element doby $\mathrm{d}t$ pootočí o elementární úhel $\omega \mathrm{d}t$ (viz obr. 10b) a opíše plošku $\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r_0^2 \omega \mathrm{d}t$. Velikost indukovaného napětí pak bude

$$|U_\mathrm{i}| = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} B\omega r_0^2$$

v souladu s výše odvozeným výrazem.

1.4 Elektrické pole indukované časovou změnou magnetického pole

Nyní se konečně dostáváme k výkladu prvního Faradayova experimentu na obr. 1.



Obr. 11 K výkladu elektromagnetické indukce změnou budicího proudu

Z tvaru (5) indukčního zákona je zřejmé, že pro velikost indukovaného napětí je rozhodující rychlost změny magnetického toku. V případě experimentu 2 a 3 na obr. 1 se jí dosahovalo proměnností plochy elektrického okruhu, v případě experimentu 1, jehož jiná obdoba je na obr. 11, se jí dosahuje změnou indukce magnetického pole buzeného v cívce (I), tj. zapínáním a vypínáním budicího proudu. Rozhodující přitom je rychlost změny magnetického indukčního toku Φ, který projde plošným obsahem S rovinné plochy závitů cívky (II). Můžeme psát

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{S} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}, \quad \text{kde } \boldsymbol{S} = \textbf{\textit{konst}}. \tag{10}$$

je vektor *rovinné* plochy, který má velikost rovnou plošnému obsahu S a směr daný směrem vnější normály podle pravidla pravé ruky (srovnejte s obr. 3b).

Ze srovnání experimentů z obr. 1 a obr. 11 můžeme posoudit prozíravost Faradayova uspořádání, který cívky navinul na prstencové železné jádro. Tím oproti vzduchovým cívkám při pokusu na obr. 11 podstatně ($\mu_\mathrm{r} \approx 10^3$ krát) zvětšil – při stejném budicím proudu – indukci $\boldsymbol{B}$ a současně výrazně omezil rozptyl magnetického pole.

Z obr. 11 můžeme rovněž posoudit jev, který popisuje Lenzův zákon. Indukovaný proud I_i je takového směru, že magnetické pole, které vytváří (jeho indukční čáry jsou na obr. 11 vyznačeny čárkovaně), je namířeno proti poli, které je vybudilo.

Na tomto prvním Faradayově experimentu jsou založeny transformátory střídavého proudu. Výpočtu transformátoru bude věnována pozornost v článku 4.2.

Poznámka: K výpočtu elektromotorického napětí při elektromagnetické indukci vznikající při pohybu vodiče v magnetickém poli (čl. 1.2) i při časové změně magnetického pole (čl. 1.4) jsme použili stejný konečný tvar (5) indukčního zákona, jehož aplikaci jsme rozšířili i na případ $B = B(t)$. *Fyzikální podstata obou těchto indukčních jevů je však zcela odlišná.* Původ *pohybového indukovaného pole* je v setrvačném pohybu nabité částice ve vnějším magnetickém poli, např. v pohybu vodiče v magnetickém poli $\boldsymbol{B} = \textbf{\textit{konst}}$. Druhý jev, tzv. *akcelerační indukované pole,* vzniká při zrychleném pohybu nabité částice, např. při časově proměnném proudu ve vodiči (a to buď v tomto vodiči anebo ve druhém vodiči, který je v jeho blízkosti). Jestliže podstatu pohybového indukčního zákona lze najít v zákonech *speciální teorie relativity,* je podstata akceleračního indukčního jevu v základech *obecné teorie relativity.* Relativistické odvození akceleračního indukovaného pole poprvé podal (r. 1962) český fyzik Zdeněk Horák (1898 – 1987). Relativistická podstata obou jevů je diskutována v [10], podrobně ve [4]. Ve vydání [4] z r. 1976 a 1981 lze najít řešení i pro rychle proměnné (nestacionární) proudy, které je již náročné. Na problém rozdílnosti popisovaných indukčních jevů upozornil i R. P. Feynman ve svých přednáškách z r. 1962/63 (viz např. [6], 2. díl, str. 295); vysvětlení ovšem nepodává.

I když jsou oba popisované indukční jevy svou podstatou zcela odlišné, je velmi pozoruhodné, že výpočet indukovaného elektromotorického napětí při obou těchto jevech je dán jediným výsledným (a jednoduchým) vztahem (5). Z tohoto vztahu budeme vycházet v dalších úvahách.

1.5 Indukované elektrické pole

Nejprve shrneme a zobecníme poznatky získané rozborem základních Faradayových experimentů. Nechť magnetické pole na uvažované ploše obvodu je funkcí času, tj. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(t)$ a rovněž plošný obsah S rovinného proudového obvodu je také funkcí času, tj. vektor $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}S(t)$, kde $\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor vnější normály rovinné plochy. Pak se magnetický indukční tok $\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}$ mění s časem v důsledku změn obou veličin a indukované elektromotorické napětí (5) v obvodu podle pravidla o derivaci součinu funkcí bude

$$\boxed{U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S}) = -\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\right)}. \tag{11}$$

U prvního Faradayova experimentu (obr. 1/1, resp. obr. 11) je druhý člen v (11) nulový, u druhého experimentu (obr. 1/2, resp. obr. 2) je naopak nulový první člen.

Časové změny magnetického indukčního toku lze dosáhnout rovněž tím, že bude časově proměnný úhel $\alpha = \alpha(t)$ mezi vektory $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}S$, i když tyto vektory budou mít časově neproměnnou velikost. Časově proměnná pak bude efektivní plocha, kterou prochází indukční tok. Pak $\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = BS\cos\alpha(t)$, jak jsme poznali u příkladu 1, kde šlo o rovnoměrnou rotaci cívky ($\alpha = \omega t + \alpha_0$). Indukované elektromotorické napětí při rovnoměrné rotaci je

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\sin\alpha(t) = BS\omega\sin(\omega t + \alpha_0). \tag{12}$$

Bude-li rotovat cívka o N stejných závitech plošného obsahu S_1, bude $S = NS_1$.

Způsoby, jak provádět časovou změnu magnetického indukčního toku, můžeme shrnout takto:

1. Změnou velikosti $\boldsymbol{B}$, tj. $B = B(t)$

2. Změnou plošného obsahu S obvodu vodiče v magnetickém poli, tj. $S = S(t)$, (např. pohybem části vodiče nebo vysouváním – zasouváním cívky do magnetického pole)

3. Změnou úhlu α mezi směrem $\boldsymbol{B}$ a směrem $\boldsymbol{S}$, tj. $\alpha = \alpha(t)$, (např. otáčením cívky v magnetickém poli)

Nyní se ještě podívejme na indukční zákon (5) resp. (11) z jiného hlediska. Elektromotorické napětí

$$U_\mathrm{e} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{13}$$

v rovinném uzavřeném elektrickém obvodu popsaném křivkou C – viz str. 12 v [13] – představuje práci, kterou elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}$ vykoná při přemístění kladného jednotkového náboje podél orientované uzavřené křivky C. Dosadíme-li (13) do indukčního zákona, dostaneme vztah

$$\boxed{\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}}, \tag{14}$$

který má velký význam v Maxwellově teorii elektromagnetického pole. Rovnice (14) vyjadřuje, že měnícím se magnetickým polem je indukováno elektrické pole, které cirkuluje po uzavřené křivce C.

Bude ještě vhodné porovnat vlastnosti elektrostatického pole s elektrickým neelektrostaickým polem vzniklým elektromagnetickou indukcí. Elektrostatické pole je vytvářeno náboji v klidu a platí pro ně

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0, \tag{15}$$

jak jsme poznali v [12], str. 17. Proto mohl být pro ně zaveden elektrický potenciál φ. Vztah (15) říká, že *elektrostatické pole je nevírové.*

Zcela jiná situace je u elektrického pole vzniklého elektrostatickou indukcí, jak vyplývá ze srovnání vztahů (14) a (15). *Indukované elektrické pole je vírové.* Pravá strana rovnice (14) je nenulová a tudíž *pro toto pole nelze zavést elektrický potenciál.* Tento výrok si můžeme vysvětlit např. na situaci částice s kladným jednotkovým nábojem. Když s ní oběhneme po libovolné uzavřené křivce (např. po kružnici) v elektrostatickém poli z určitého bodu a vrátíme se do něho, bude vykonaná práce nulová bez ohledu na velikost a tvar této křivky.

V indukovaném elektrickém poli bude v důsledku platnosti rovnice (14) tato práce při přenesení kladného jednotkového náboje nenulová, číselně rovna indukovanému napětí (např. $U_\mathrm{i} = 3$ V). Kdybychom v tomto poli chtěli zavést potenciál, musel by vzrůst o tuto hodnotu. To ovšem není možné, protože bychom měli pro určitý bod prostoru dva potenciály. Nejen to – na jiné křivce anebo při jiné rychlosti změny magnetického pole – bychom dostali libovolné jiné napětí (např. $U_\mathrm{i} = 5$ V). Neboli, kdyby v bodě A byl potenciál $\varphi(A)$, musel by v tomto bodě být zároveň i potenciál $\varphi(A) + U_\mathrm{i}$. Protože ve vírovém poli je $U_\mathrm{i} \neq 0$, není možné pro indukované elektrické pole potenciál zavést jednoznačně.

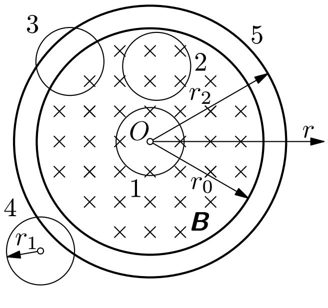
Příklad 3 – vírové elektrické pole

Prozkoumejme vlastnosti elektrického pole indukovaného proměnným magnetickým polem, které homogenně vyplňuje prostor válce o poloměru r_0, tj. určete jaký bude mít směr intenzita $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ tohoto pole v rovině kolmé k indukci $\boldsymbol{B}$ a jak se bude měnit velikost $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ v závislosti na vzdálenosti r od osy magnetického pole. Uvažujme tyto případy časové proměnnosti magnetického pole

a) $B = B_\mathrm{m} \sin \omega t$,

b) $\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = A = konst.$, přičemž závislost $E = E(r)$ znázorněte v případě b) graficky pro $r \in \langle 0, 250 \text{ mm}\rangle$, bude-li $r_0 = 50$ mm a $A = 2{,}0\ \mathrm{T \cdot s^{-1}}$.

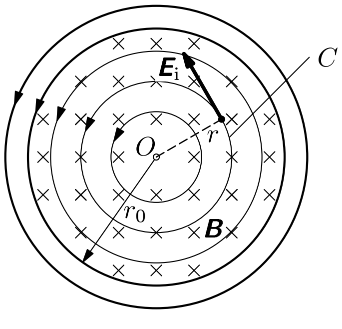
c) Vypočtěte indukované napětí a proud v kovovém prstenci o poloměru $r_1 = 10$ mm a odporu $R_1 = 1{,}0\ \Omega$ v případě časové změny magnetického pole podle bodu b), umístíme-li tento prstenec do čtyř poloh podle obr. 12.



Obr. 12 K příkladu 3

V poloze 3 leží právě polovinou své plochy v oblasti měnícího se magnetického pole, v poloze 4 již leží mimo tuto oblast. Jaké napětí a proud se bude indukovat v prstenci 5 o poloměru $r_2 = 6r_1$, který leží mimo magnetické pole tak, že je obepíná (obr. 12). Jeho odpor je $R_2 = 6R_1$.

Řešení



Obr. 13 Vírové elektrické pole

Z Faradayova zákona (viz např. obr. 13) je zřejmé, že elektrické pole se indukuje v rovnině kolmé ke změně indukce $\boldsymbol{B}$. Pro jeho výpočet si v této rovině zvolíme uzavřenou křivku C, za niž budeme z hlediska symetrie úlohy volit kružnici se středem na ose o (procházející bodem O) a o poloměru r (obr. 13). Protože indukované pole má intenzitu $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ ve směru tečny k této kružnici, je zvolená křivka C siločárou tohoto pole. Protože tyto siločáry jsou uzavřené, je *indukované elektrické pole vírové.*

Pro výpočet velikosti intenzity $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$, resp. funkční závislosti $E_\mathrm{i} = E_\mathrm{i}(r)$, použijeme indukční zákon ve tvaru (14). Za uzavřenou křivku C užijeme kružnici, resp. siločáru o poloměru r. Její element $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ a vektor $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ mají v určitém jejím bodě stejný směr a vektor $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$ ve všech jejích bodech stejnou velikost. Proto můžeme psát

$$\oint_C \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_C E_\mathrm{i} \mathrm{d}l = E_\mathrm{i} \oint_C \mathrm{d}l = 2\pi r E_\mathrm{i} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Protože vektory indukce $\boldsymbol{B}$ a plochy $\boldsymbol{S}$ vymezené rovinnou křivkou C mají vzájemně opačný směr (např. vektor $\boldsymbol{B}$ na obr. 13 míří do nákresny a vektor $\boldsymbol{S}$ v souladu se směrem oběhu po hraniční křivce C míří z nákresny), můžeme psát

$$\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{S} = BS \cos 180^\circ = -\pi r^2 B \quad \text{pro } r \in \langle 0, r_0 \rangle,$$

$$\Phi = -\pi r_0^2 B \quad \text{pro } r \geq r_0.$$

Pak

$$E_\mathrm{i} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \quad \text{pro } r \in \langle 0, r_0 \rangle, \tag{16}$$

$$E_\mathrm{i} = \frac{r_0^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \quad \text{pro } r \geq r_0. \tag{17}$$

V jednotlivých případech je

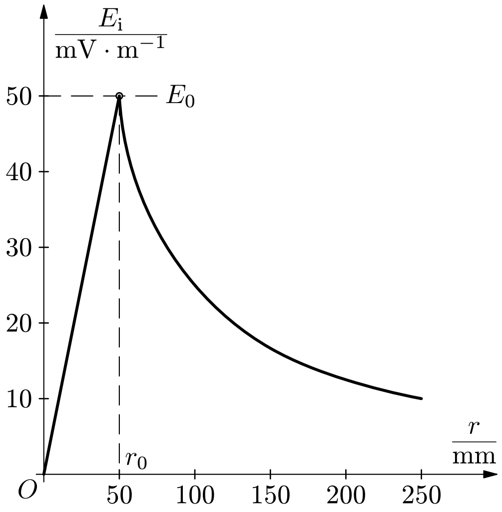
a) $E_\mathrm{i} = \dfrac{rB_\mathrm{m}\omega}{2} \cos \omega t$ pro $r \in \langle 0, r_0 \rangle$,

$E_\mathrm{i} = \dfrac{r_0^2 B_\mathrm{m}\omega}{2r} \cos \omega t$ pro $r \geq r_0$.

b) $E_\mathrm{i} = \dfrac{A}{2} r$ pro $r \in \langle 0, r_0 \rangle$,

$E_\mathrm{i} = \dfrac{r_0^2 A}{2}\dfrac{1}{r}$ pro $r \geq r_0$,

přičemž funkční závislost $E = E(r)$ pro tento případ a zadané numerické hodnoty je znázorněna na obr. 14.



Pole má zřejmě největší intenzitu $E_0 = 50\ \text{mV}\cdot\text{m}^{-1}$ pro $r = r_0$. Intenzita lineárně vzrůstá od osy magnetického pole až k jeho okraji, vně klesá podle rovnoosé hyperboly. Pozoruhodné je, že indukované pole je nenulové i na kružnicích o poloměru $r > r_0$, které již neleží v magnetickém poli.

Obr. 14 Indukované elektrické pole v příkladu 2b

c) Pro elektromotorické napětí indukované v kroužcích 1 až 5 je rozhodující indukční zákon, ze kterého ve sledovaném případě vychází

$$U_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{S}) = S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = SA,$$

kde S je obsah plochy příslušného kroužku, kterou prochází proměnné magnetické pole. Pro jednotlivé kroužky je $S_1 = S_2 = \pi r_1^2$, $S_3 = \frac{1}{2}\pi r_1^2$, $S_4 = 0$, $S_5 = \pi r_0^2 = 25 S_1$. Pro zadané A vychází $U_1 = U_2 = 2\pi\cdot 10^{-4}$ V, $U_3 = \pi\cdot 10^{-4}$ V, $U_4 = 0$, $U_5 = 5\pi\cdot 10^{-3}$ V. Indukovaný proud je $I_1 = I_2 = 2\pi\cdot 10^{-4}$ A, $I_3 = \pi\cdot 10^{-4}$ A, $I_4 = 0$, $I_5 = \frac{5}{6}\pi\cdot 10^{-3}$ A.

U symetrických úloh, tj. u kroužku 1 a 5 si můžeme správnost řešení ověřit i užitím výsledků (16) a (17) pro intenzitu indukovaného pole. Indukované napětí v těchto případech je $U_\mathrm{i} = 2\pi r E_\mathrm{i}$.

Příklad 4 – experimentální proudový vozík

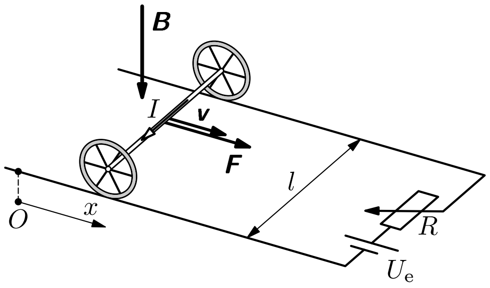
Proveďme myšlenkový experiment s lehkým vozíkem o hmotnosti m, který se se zanedbatelnými jízdními odporovými silami může pohybovat po dlouhých vodorovných přímých kolejnicích o rozteči l. Vozík se v podstatě sestává z jediné nápravy na kolečkách, která vodivě spojuje kolejnice (viz obr. 15).

Kolejnice se nacházejí v homogenním magnetickém poli, které má svislý směr a jsou prostřednictvím reostatu připojeny ke zdroji o elektromotorickém napětí U_{e}. Reostatem upravíme celkový odpor obvodu na R.

a) Vypočtěte velikost počátečního zrychlení $\boldsymbol{a}_0$ a mezní rychlosti $\boldsymbol{v}_{\mathrm{m}}$.

b) Odvoďte funkční závislost rychlosti $v = v(t)$ a dráhy $x = x(t)$ vozíku.

Počáteční podmínky: $v(0) = 0$, $x(0) = 0$.



Obr. 15 Proudový vozík v magnetickém poli

Řešení

a) Na vozík v klidu působí podle Ampérova zákona síla o velikosti $F_0 = BI_0l$. Počáteční zrychlení vozíku má tedy velikost

$$a_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{BI_0l}{m} = \frac{BU_{\mathrm{e}}l}{mR}.$$

Jakmile se vozík pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$, indukuje se v jeho nápravě elektromotorické napětí $U_{\mathrm{i}} = Blv$ namířené proti napětí U_{e} a pro uzavřený elektrický obvod podle 2. Kirchhoffova zákona platí $U_{\mathrm{e}} - Blv = RI$. Odtud pro okamžitý proud dostaneme

$$I = \frac{1}{R}(U_{\mathrm{e}} - Blv).$$

Ke stejnému výsledku dospějeme, když od proudu I_0 odečteme indukovaný proud

$$I_{\mathrm{i}} = \frac{U_{\mathrm{i}}}{R} = \frac{Blv}{R},$$

který je v souladu s Lenzovým zákonem namířen proti proudu I_0.

Mezní stav pohybu nastane, když indukovaný proud právě vykompenzuje proud I_0. Pak celkový proud $I = 0$. Z toho mezní rychlost je

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{e}}}{Bl}.$$

b) Pohybová rovnice vozíku je

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F, \quad \text{kde } F = BIl = \frac{Bl}{R}(U_\mathrm{e} - Blv).$$

Pak po zavedení mezní rychlosti v_m je

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{B^2l^2}{mR}(v_\mathrm{m} - v).$$

Po separaci proměnných a po integraci dostaneme

$$\frac{B^2l^2}{mR}\int\limits_0^t \mathrm{d}t = \int\limits_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v_\mathrm{m} - v} \qquad \text{neboli} \qquad \frac{B^2l^2}{mR}t = \ln\frac{v_\mathrm{m}}{v_\mathrm{m} - v}.$$

Odtud hledaná okamžitá rychlost vozíku je

$$v = v_\mathrm{m}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right) = \frac{U_\mathrm{e}}{Bl}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right).$$

Pro kontrolu si můžeme ověřit, že pro $t = 0$ je $v = 0$ a mezní stav $v = v_\mathrm{m}$ nastane pro $t \to \infty$.

Uvážíme-li $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, dostaneme integrací funkce $v = v(t)$ druhou hledanou funkci:

$$x = \frac{U_\mathrm{e}}{Bl}\int\limits_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right)\mathrm{d}t = \frac{U_\mathrm{e}}{Bl}\left[t + \frac{mR}{B^2l^2}\left(\mathrm{e}^{-\frac{B^2l^2}{mR}t} - 1\right)\right].$$

Výpočty provedené v tomto příkladu jsou analogické řešení např. pádu kuličky ve vodě – za působení odporové síly podle Stokesova vztahu (viz [15], str. 8).

2 Indukčnost vodičů a energie magnetického pole

2.1 Vlastní indukčnost vodiče a vlastní indukce

Při zkoumání magnetického pole elektrického proudu užitím Biotova – Savartova – Laplaceova zákona (viz [13]) jsme poznali, že magnetická indukce $\boldsymbol{B}$ v okolí vodiče je přímo úměrná elektrickému proudu I. Přejděme nyní od indukce $\boldsymbol{B}$ k indukčnímu toku $\Phi = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, kde integrujeme přes celou plochu, přes níž magnetické pole prochází. Je-li $B \sim I$, musí být i $\Phi \sim I$. Označíme-li konstantu úměrnosti L, dostaneme jednoduchý vztah

$$\boxed{\Phi = LI}, \tag{18}$$

kde veličina L se nazývá *vlastní indukčnost vodiče*. Výraz (18) se nazývá *statický definiční vztah pro indukčnost*. Použijeme jej k výpočtu indukčnosti některých vodičů.

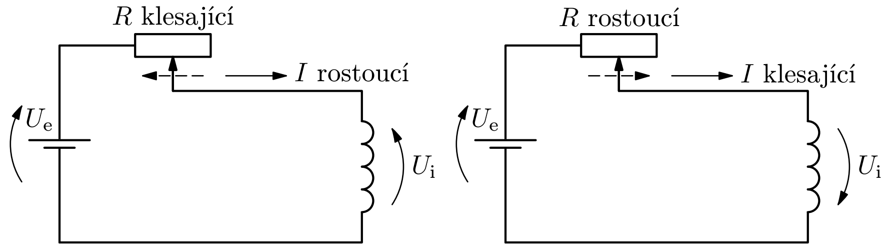
Indukčnost L je pro neferomagnetické prostředí konstantní veličinou, závislou na velikosti a tvaru vodiče a na magnetických vlastnostech látkového prostředí, v němž se nachází. Je-li vodič ve feromagnetickém prostředí, závisí L také na magnetickém sycení feromagnetika (viz např. hysterezní smyčky v [14]). Proto je indukčnost cívky s feromagnetickým jádrem poněkud závislá na proudu, který cívkou prochází. Těmito komplikacemi se však nebudeme zabývat a pro jednoduchost budeme předpokládat, že L nezávisí na I.

Bude-li vodičem procházet proměnný proud, bude vytvářet časově proměnné pole. Pak se v něm podle indukčního zákona (11) bude indukovat elektromotorické napětí

$$\boxed{U_{\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LI) = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}}, \tag{19}$$

Tento jev se nazývá *vlastní indukce* (dříve označovaný *samoindukce*). Znaménko minus v (19) v souladu s Lenzovým zákonem značí, že indukované napětí je namířeno proti primární změně proudu, která jev vyvolává (obr. 16). Z toho vyplývá, že vodič (cívka), kterým prochází časově proměnný proud, klade jeho průchodu odpor.

Výpočtům obvodů s proměnným proudem budeme věnovat více pozornosti v kap. 3.



Obr. 16 K diskusi o směru indukovaného napětí při vlastní indukci (U_e – elektromotorické napětí primárního zdroje, R – proměnný odpor, U_i – indukované napětí)

Výraz (19) lze považovat za *dynamickou definici vlastní indukčnosti* L. Nám nyní poslouží k definici její jednotky:

$$[L] = \left[U_i \frac{\Delta t}{\Delta I}\right] = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{A}} = \mathrm{H} \qquad \text{(henry)},$$

kde Wb=V· s – *weber* – je jednotka magnetického indukčního toku. Vodič má indukčnost jednoho *henry*[5], když se v něm při změně proudu jeden ampér za jednu sekundu indukuje napětí jednoho voltu.

Příklad 5 – indukčnost solenoidu

Vypočtěte vlastní indukčnost solenoidu, tj. přímé cívky o N rovnoměrně hustě vinutých závitech o poloměru $r \ll l$, kde l je délka solenoidu. Okrajové jevy dané rozptylem magnetického pole neuvažujte. Drát, z něhož jsou vinuty závity předpokládejte velmi tenký, abyste mohli zanedbat pole uvnitř drátu.

Řešení

Užitím zákona celkového proudu vypočteme nejprve indukci magnetického pole solenoidu (viz např. [13], příklad 6):

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{N}{l} I.$$

Toto pole je homogenní ve všech bodech uvnitř solenoidu. Jedním závitem bude procházet tok $\Phi_1 = \pi r^2 B$; celkový tok všemi závity tedy bude

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{l} I.$$

[5]Název jednotky indukčnosti je na počest amerického fyzika J. Henryho (1797 – 1878), který r. 1832 objevil jev vlastní indukce.

Porovnáme-li tento výsledek se vztahem (18), dostaneme pro vlastní indukčnost solenoidu výraz

$$L = \mu_0 \pi r^2 \frac{N^2}{l} = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 V, \tag{20}$$

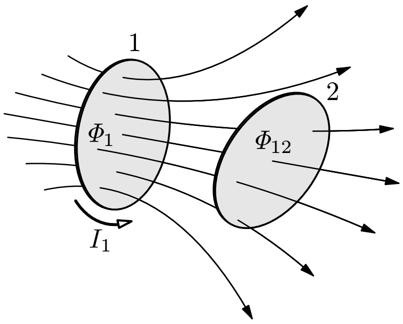
kde V je objem pole solenoidu a $\frac{N}{l}$ délková hustota závitů. Výraz (20) platí pro vakuum a lze jej použít prakticky pro všechny diamagnetické a paramagnetické látky; používá se proto pro vzduchové cívky. Vložíme-li do celého vnitřního prostoru solenoidu feromagnetickou látku, která bude mít pro dané magnetické sycení relativní permeabilitu μ_r, bude její indukčnost $L' = \mu_\mathrm{r} L$.

Poznámka

Solenoid je idealizovaná cívka, u níž se předpokládá, že její magnetické pole je omezeno jen na její vnitřní objem V. Tuto podmínku však teoreticky splňuje jen cívka neomezené délky s hustě vinutými závity. Protože skutečné cívky mají konečnou délku, vzniká na jejich okrajích rozptyl magnetického pole. Tomu lze zamezit, když takový solenoid stočíme do anuloidu a dostaneme tak *toroid*. Zde vzniká ovšem problém, že délka indukčních čar není stejná, že tedy indukce $\boldsymbol{B}$ závisí na vzdálenosti od osy toroidu. Platí tedy jen pro tenký toroid a výraz (20) pro velmi štíhlou válcovou cívku. O vlivu konečné délky solenoidu a konečné tloušťky toroidu na L pojednáme v čl. 2.4 a,b.

2.2 Vzájemná indukčnost vodičů a vzájemná indukce

Mějme dva uzavřené vodiče (smyčky) v určité vzájemné poloze (obr. 17).



Obr. 17 K výkladu vzájemné indukčnosti smyček 1 a 2

Bude-li procházet první smyčkou proud I_1, vznikne magnetické pole s celkovým indukčním tokem Φ_1. Část tohoto toku Φ_{12} bude procházet plochou druhé smyčky. Tento tok je přímo úměrný toku Φ_1 a ten je podle (18) přímo úměrný proudu I_1. Můžeme proto psát

$$\Phi_{12} = M_{12} I_1, \tag{21}$$

kde M_{12} je konstanta úměrnosti.

Bude-li naopak druhou smyčkou procházet proud I_2, bude indukční tok procházející první smyčkou úměrný tomuto proudu:

$$\Phi_{21} = M_{21} I_2. \tag{22}$$

Konstanty úměrnosti M_{12}, M_{21} závisí na tvaru a velikosti vodičů (tj. u cívek na tvaru a velikosti závitů a jejich počtu), na vzájemném uspořádání obou vodičů a na permeabilitě prostředí. Lze obecně dokázat (viz např. [3], str. 64), že

$$M_{21} = M_{12} = M. \tag{23}$$

Veličina M se nazývá *vzájemná indukčnost* vodičů 1, 2. Její jednotka je stejná jako jednotka L, tj. *henry*. Rovnost (23) ověříme na řešení vzájemné indukčnosti dvou solenoidů (příklad 6).

Bude-li první smyčkou na obr. 17 procházet proměnný proud I_1, bude se ve druhé smyčce indukovat elektromotorické napětí

$$U_{i12} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{12}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}. \tag{24}$$

Jev se nazývá *vzájemná indukce*. Doprovází jej jev vlastní indukce – v první cívce se současně indukuje napětí $U_1 = -L_1\dot{I}_1$. Bude-li naopak druhou cívkou procházet proměnný proud I_2, bude se v první cívce indukovat napětí

$$U_{i21} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}. \tag{25}$$

Napětí jsou obecně různá. Jen když by $\dot{I}_2 = \dot{I}_1$, bylo by $U_{i21} = U_{i12}$.

Jev vzájemné indukce objevil r. 1831 M. Faraday (viz 1. experiment na obr. 1).

Příklad 6 – vzájemná indukčnost dvou solenoidů s těsnou vazbou

Na štíhlém válci o poloměru r, délce l a permeabilitě μ jsou rovnoměrně v hustých závitech navinuty dvě vzájemně izolované cívky drátem zanedbatelného průřezu. Jedna má N_1 a druhá N_2 závitů.

Určete vzájemnou indukčnost M této soustavy cívek a všechny vztahy mezi M a vlastními indukčnostmi L_1, L_2 cívek.

Řešení

Bude-li prvním solenoidem procházet proud I_1, bude vytvářet magnetické pole o indukci $B_1 = \mu I_1 \dfrac{N_1}{l}$. S ohledem na konfiguraci solenoidů můžeme uvažovat, že toto pole prochází kruhovými plochami všech závitů druhého solenoidu, tedy $S_2 = \pi r^2 N_2$. Říká se, že mezi cívkami soustavy existuje těsná vazba, která se vyznačuje zanedbatelným rozptylem magnetického pole. Pak indukční tok procházející druhým solenoidem je

$$\Phi_{12} = B_1 S_2 = \mu \frac{\pi r^2 N_1 N_2}{l} I_1 = M_{12} I_1,$$

kde vzájemná indukčnost je

$$M_{12} = \mu \frac{\pi r^2 N_1 N_2}{l} = M_{21} = M. \tag{26}$$

Pokud bychom postup obrátili – nechali bychom proud I_2 procházet druhým solenoidem a počítali tok Φ_{21}, který projde prvním solenoidem, tj. $\Phi_{21} = B_2 \pi r^2 N_1$, dostali bychom pro vzájemnou indukčnost stejný výsledek (26). Výsledek je souměrný k oběma indexům, jak plyne z komutativního zákona pro součin $N_1 N_2$. Tím je ověřena platnost rovnosti (23) pro uvažovaný případ.

Jednotlivé cívky soustavy mají v souladu se vztahem (20) vlastní indukčnosti

$$L_1 = \mu \frac{\pi r^2 N_1^2}{l}, \quad L_2 = \mu \frac{\pi r^2 N_2^2}{l}.$$

Je zřejmé, že mezi těmito indukčnostmi a vzájemnou indukčností (26) platí vztahy

$$L_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 L_1, \quad M = \frac{N_2}{N_1} L_1 = \frac{N_1}{N_2} L_2 = \sqrt{L_1 L_2},$$

neboli

$$\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = 1. \tag{27}$$

Činitel induktivní vazby

Vztah (27), ke kterému jsme dospěli při řešení příkladu 6 platí pro zvláštní případ soustavy cívek s velmi těsnou vazbou. V obecném případě soustavy dvou cívek platí tyto definiční vztahy

$$\Phi_{12} = M I_1, \quad \Phi_{21} = M I_2, \quad \Phi_1 = L_1 I_1, \quad \Phi_2 = L_2 I_2.$$

Odtud

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} \cdot \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} \leq 1,$$

protože $\Phi_{12} \leq \Phi_1$, $\Phi_{21} \leq \Phi_2$. Konstantu

$$k_\mathrm{v} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1 \tag{28}$$

nazýváme *činitel induktivní vazby*. Podle těsnosti vazby je $k_\mathrm{v} \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž pro cívky bez vazby (tj. cívky od sebe vzdálené anebo magneticky odstíněné) je $k_\mathrm{v} = 0$, pro cívky s nejtěsnější vazbou je $k_\mathrm{v} = 1$. V praktických případech nastane alespoň částečný rozptyl magnetického pole, takže $k_\mathrm{v} < 1$.

2.3 Energie magnetického pole

a) Energie magnetického pole jediného vodiče

Při průchodu elektrického proudu vodičem (cívkou) vzniká v jeho okolí magnetické pole, které je nositelem energie. Nejprve vyjádříme tuto energii pomocí veličin charakteristických pro vodič (tj. indukčnosti L a proudu I), v odst. b) pak použitím veličin pole (tj. intenzity $\boldsymbol{H}$ a indukce $\boldsymbol{B}$).

Energii magnetického pole budeme počítat jako práci, kterou musí vykonat vnější zdroj elektromotorického napětí U_e na překonání samoindukčního elektromotorického napětí U_i v cívce při vzrůstu proudu na hodnotu I. Se ztrátami Jouleovým teplem nebudeme pro jednoduchost počítat.

Indukované napětí musí být v rovnováze s vnějším elektromotorickým napětím, tj. $U_\mathrm{i} + U_\mathrm{e} = 0$. Protože napětí je rovno práci potřebné k přemístění kladného jednotkového náboje mezi dvěma body o potenciálním rozdílu U, vykoná vnější zdroj při přemístění elementárního náboje $\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t$ práci $\mathrm{d}W = U_\mathrm{e} I \mathrm{d}t$, která se projeví jako přírůstek energie magnetického pole. Pak vzhledem k (19) je

$$\mathrm{d}E_\mathrm{mg} = U_\mathrm{e} I \mathrm{d}t = -U_\mathrm{i} I \mathrm{d}t = LI\mathrm{d}I.$$

Celková energie, kterou magnetické pole dosáhne při vzrůstu proudu od 0 na I, je

$$E_\mathrm{mg} = L \int\limits_0^I I \mathrm{d}I = \frac{1}{2} L I^2. \tag{29}$$

Tohoto výsledku lze vhodně využít pro výpočet indukčnosti.

b) Hustota energie magnetického pole

Nyní energii magnetického pole vyjádříme pomocí veličin $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, které se užívají k jeho popisu. Vyjdeme z výrazu (29), který upravíme pomocí vztahu (18) a budeme jej aplikovat na magnetické pole solenoidu, o kterém budeme předpokládat, že je v celém jeho vnitřním objemu homogenní a ve vnějším prostoru nulové (v tomto směru je názornější uvažovat pole tenkého toroidu, které je možno považovat také za homogenní a do sebe uzavřené – viz čl. 2.4b). Platí tedy $E_{\mathrm{mg}} = \dfrac{1}{2}LI^2 = \dfrac{\Phi^2}{2L}$, přičemž za L dosadíme výsledek (20) pro μ a za $\Phi = B\pi r^2 N$. Pak

$$E_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\frac{B^2\pi^2 r^4 N^2}{\mu\pi r^2 \dfrac{N^2}{l}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}V, \quad \text{kde } V = \pi r^2 l$$

je objem magnetického pole solenoidu. Hustota energie magnetického pole je

$$w_{\mathrm{mg}} = \frac{E_{\mathrm{mg}}}{V} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}HB. \tag{30}$$

Tento výsledek lze zobecnit pro nehomogenní pole, u kterého veličiny $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ mají bod od bodu jinou velikost a směr; případně i na pole anizotropní, u kterého vektory $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$ nemají stejný směr. Pak součin velikostí vektorů v (30) nahradíme skalárním součinem vektorů $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$:

$$\boxed{w_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}. \tag{31}$$

c) Energie magnetického pole soustavy vodičů

Mějme soustavu dvou nepohyblivých vodičů (cívek) o indukčnostech L_1, L_2, M, přičemž jimi budou procházet proudy narůstající z nulové hodnoty na I_1 a I_2. Pak se v první cívce bude indukovat napětí $U_{\mathrm{i}1} + U_{\mathrm{i}21}$, které musí být v rovnováze s vnějším napětím $U_{\mathrm{e}1}$, tj. $U_{\mathrm{i}1} + U_{\mathrm{i}21} + U_{\mathrm{e}1} = 0$. Podobně pro napětí na druhé cívce musí platit rovnováha: $U_{\mathrm{i}2} + U_{\mathrm{i}12} + U_{\mathrm{e}2} = 0$. Stejně jako v odst. a) bude práce, kterou vykonají vnější zdroje, rovna energii magnetického pole soustavy proudovodičů. Pro element této energie platí

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_{\mathrm{mg}} = U_{\mathrm{e}1}I_1\mathrm{d}t + U_{\mathrm{e}2}I_{\mathrm{e}}\mathrm{d}t = -(U_{\mathrm{i}1} + U_{\mathrm{i}21})I_1\mathrm{d}t - (U_{\mathrm{i}2} + U_{\mathrm{i}12})I_2\mathrm{d}t = \\ = L_1 I_1 \mathrm{d}I_1 + M(I_1\mathrm{d}I_2 + I_2\mathrm{d}I_1) + LI_2\mathrm{d}I_2 = \\ = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}L_1 I_1^2\right) + \mathrm{d}(MI_1I_2) + \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}L_2 I_2^2\right), \end{aligned}$$

přičemž u závěrečné úpravy bylo využito poznatku o diferenciálu druhé mocniny proměnné a diferenciálu součinu proměnných. Pak energie soustavy je

$$E_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2.$$

První a třetí člen představují vlastní magnetickou energii uvažovaných proudovodičů, druhý člen vzájemnou magnetickou energii uvažované soustavy proudovodičů.

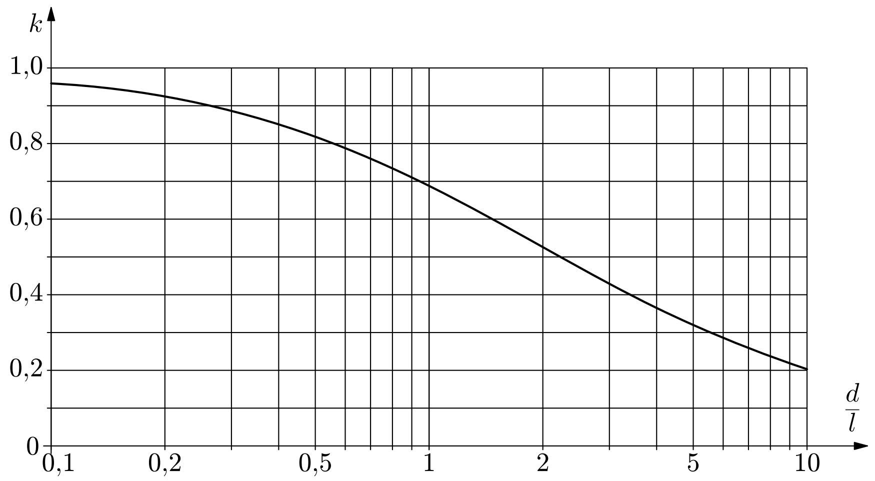
2.4 Indukčnost některých vodičů

a) Vlastní indukčnost válcové cívky a přímého drátu

V příkladu 5 jsme poměrně snadno vypočetli indukčnost dlouhé štíhlé válcové cívky (solenoidu) – teoreticky neomezeně dlouhé cívky. U reálné cívky nastává především na jejich koncích rozptyl magnetického pole, který je analyticky obtížně vyhodnotitelný. Proto indukčnost reálné cívky bude menší než udává vztah (20). Problém se v praxi řeší empiricky zavedením koeficientu k do vztahu (20):

$$L = k\mu\frac{\pi r^2 N^2}{l}. \tag{32}$$

Hodnota korekčního koeficientu k závisí na podílu jejího průměru $d = 2r$ a délky l. Pro $\dfrac{d}{l} = 0$ je $k = 1$, pro $\dfrac{d}{l} = 0{,}1$ je $k = 0{,}959 \approx 1$. Se zvětšujícím se faktorem $\dfrac{d}{l}$ koeficient k výrazně klesá (viz graf na obr. 18, který je zpracován podle [1], str. 436).



Obr. 18 Korekční koeficient k pro výpočet indukčnosti podle vztahu (32)

Zredukuje-li se cívka na jedinou kruhovou smyčku o poloměru r vytvořenou z drátu o poloměru r_0, má indukčnost (podle [1]):

$$L = \mu r\left(\ln\frac{8r}{r_0} - \frac{7}{4}\right).$$

Přímý drát o délce l a poloměru r_0 má indukčnost

$$L = \frac{\mu l}{2\pi}\left(\ln\frac{2l}{r_0} - \frac{3}{4}\right).$$

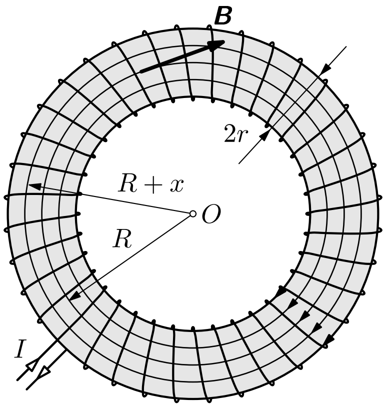
Tyto vztahy platí pro frekvence, u nichž se výrazně neprojeví skinefekt (viz čl. 4.4). Pro vysoké frekvence je nutné provést korekce i na tento jev.

b) Vlastní indukčnost toroidu

Uvažujme toroid (cívku navinutou na anuloidu, tj. na válci o poloměru r podstavy, jehož osa je stočena do kružnice o poloměru R). Nechť je na něm navinuto N závitů tenkého drátu tak, aby rovnoměrně pokryly celý povrch anuloidu. (obr. 19). Toroid je navinut na jádře, o jehož permeabilitě předpokládáme, že je pro uvažované sycení konstanta ($\mu \approx$ *konst.*).

Bude-li toroid tenký, tj. bude-li $r \ll R$, lze indukci magnetického pole považovat po celé ploše $S = \pi r^2$ za konstantu jako u solenoidu. Pak vlastní indukčnost toroidu je dána výrazem (20), v němž nahradíme l délkou $2\pi R$ osy toroidu, tj.

$$L = \mu\frac{r^2N^2}{2R} = \mu\frac{SN^2}{2\pi R}. \qquad (33)$$



Obr. 19 Toroid

Bude-li r srovnatelné s R, projeví se závislost velikosti magnetické indukce B na vzdálenosti x od osy.

Funkci $B = B(x)$, resp. $H = H(x)$ jsme řešili v [13] užitím zákona celkového proudu – viz výraz (28):

$$B = \frac{\mu NI}{2\pi(R + x)}.$$

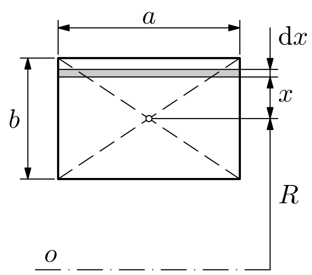
Výpočet magnetického indukčního toku toroidu s kruhovým průřezem naráží na problémy při integraci. Výpočet proto provedeme pro obdélníkový průřez, který se v praxi rovněž využívá. Průřez (obr. 20) má plošný obsah $S = ab$ a jeho elementem bude procházet tok $\mathrm{d}\Phi_1 = Ba\mathrm{d}x$. Protože cívka má N závitů, bude element indukčního toku procházející všemi závity $\mathrm{d}\Phi = N\mathrm{d}\Phi_1$ a celkový indukční tok je

$$\varPhi = \frac{\mu a N^2 I}{2\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{R+x} = \frac{\mu a N^2 I}{2\pi} \ln \frac{2R+b}{2R-b}.$$

Vlastní indukčnost tedy je

$$L = \frac{\varPhi}{I} = \frac{\mu a N^2}{2\pi} \ln \frac{2R+b}{2R-b}. \qquad (34)$$

Výsledek (34) musí pro $b \ll R$ přejít do tvaru (33) ve vyjádření s plošným obsahem S, jak si ukážeme, rozvineme-li logaritmus v řadu a zanedbáme členy vyššího řádu:



Obr. 20 K výpočtu indukčního toku v toroidu s obdélníkovým průřezem

$$\ln \frac{2R+b}{2R-b} = \ln \frac{1+\dfrac{b}{2R}}{1-\dfrac{b}{2R}} \approx \ln \left(1+\frac{b}{2R}\right)^2 \approx \ln \left(1+\frac{b}{R}\right) \approx \frac{b}{R}.$$

Pak

$$L = \frac{\mu a b N^2}{2\pi R} = \frac{\mu S\ N^2}{2\pi R}.$$

c) Vlastní indukčnost koaxiálního kabelu

Nyní odvodíme vlastní indukčnost přímého dlouhého souosého (koaxiálního) kabelu o délce l, skládajícího se z centrálního válcového vodiče o poloměru r_1 a vnějšího válcového vodiče o poloměru r_2. Budeme předpokládat $r_1 \ll r_2$, abychom mohli zanedbat magnetické pole uvnitř centrálního vodiče[6]. V prostoru mezi vodiči je látka o permeabilitě μ.

Úlohu nejprve vyřešíme užitím statického definičního vztahu (18). Protože vnitřní a vnější vodič kabelu tvoří dohromady uzavřený proudový okruh, prochází vnějším vodičem stejný proud jako vnitřním vodičem, ovšem opačného směru (obr. 21).

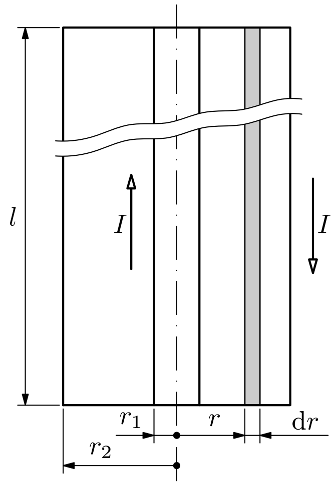
[6]Protože koaxiálními kabely se zpravidla přenášejí vysokofrekvenční proudy, uplatní se skinefekt, proud prochází povrchovou vrstvičkou tohoto vodiče a magnetické pole uvnitř je zanedbatelné.

Užitím zákona celkového proudu (viz např. [13]) můžeme snadno nahlédnout, že magnetické pole vně kabelu je nulové; je rozprostřeno pouze v prostoru mezi vodiči a podle téhož zákona můžeme určit velikost jeho indukce vztahem

$$B = \mu \frac{I}{2\pi r}, \quad \text{pro } r \in \langle r_1, r_2 \rangle. \tag{35}$$

Protože kruhové indukční čáry tohoto pole protínají kolmo všechny roviny procházející osou kabelu, bude plošným elementem $l\mathrm{d}r$ procházet indukční tok $\mathrm{d}\Phi = Bl\mathrm{d}r$ a celkový tok bude

$$\Phi = \mu \frac{Il}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \mu \frac{Il}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$



Obr. 21 K výpočtu vlastní indukčnosti koaxiálního kabelu

Pak indukčnost koaxiálního kabelu je

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{36}$$

Úlohu můžeme řešit také *výpočtem energie magnetického pole* užitím výrazů (30) a (29). Protože indukce (35) závisí na r, vytkneme si z prostoru elementární prstenec o objemu $\mathrm{d}V = 2\pi rl\mathrm{d}r$. Pak bude mít pole v tomto objemu energii

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{mg}} = w_{\mathrm{mg}}\mathrm{d}V = \frac{B^2}{2\mu}\mathrm{d}V = \frac{\mu l I^2}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Celková energie je

$$E_{\mathrm{mg}} = \frac{\mu l I^2}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}\right) I^2 = \frac{1}{2} L I^2.$$

Výraz v kulaté závorce je indukčnost – v souladu s výsledkem (36). Jak uvidíme dále, význam má *délková hustota indukčnosti* definovaná vztahem

$$L' = \frac{L}{l} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{37}$$

Budeme-li počítat délkovou hustotu kapacity téhož kabelu, dostaneme (viz [12], str. 40)

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}. \tag{38}$$

Vynásobením výrazů (37) a (38) dostáváme zajímavý vztah $L'C' = \mu\varepsilon$. Vyjádříme-li permeabilitu a permitivitu užitím jejich hodnot pro vakuum, tj. $\mu = \mu_r\mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, a přihlédneme-li ke vztahu (18) nebo (52) v [13], tj. $\mu_0\varepsilon_0 = c^{-2}$, dostaneme

$$L'C' = \mu\varepsilon = \frac{\mu_r\varepsilon_r}{c^2} = \frac{1}{v^2}, \tag{39}$$

kde

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}} \tag{40}$$

je *rychlost elektromagnetických vln*, které přenáší koaxiální kabel. Podrobnější pojednání o těchto jevech lze nalézt v [10], str. 243 – 245. Užitečné ještě bude analyzovat jednotky ve vztahu (39):

$$[L'C'] = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m \cdot A}} \cdot \frac{C}{\mathrm{V \cdot m}} = \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2}.$$

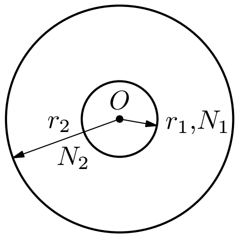
d) Vzájemná indukčnost dvou plochých cívek

Určíme vzájemnou indukčnost dvou plochých kruhových cível o poloměrech $r_2 \gg r_1$ (obr. 22), které se nacházejí ve vakuu teoreticky v jedné rovině a které mají N_1 a N_2 závitů.

Bude-li vnější cívkou procházet proud I_2, bude mít magnetické pole v bodech roviny cívky v malém okolí její osy O podle [13] str. 18 indukci o velikosti

$$B_2 = \mu_0 \frac{N_2 I_2}{2r_2}.$$

Je-li $r_1 \ll r_2$, bude pro magnetický tok procházející N_1 závity první cívky (přibližně) platit



Obr. 22 Dvě ploché cívky

$$\Phi_{21} = \pi r_1^2 N_1 B_2 = \mu_0 \frac{\pi r_1^2 N_1 N_2}{2r_2} I_2 = M I_2.$$

Pak podle (22) má soustava vzájemnou indukčnost

$$M = \mu_0 \frac{\pi r_1^2 N_1 N_2}{2r_2}. \tag{41}$$

e) Závěrečný poznatek o indukčnosti

Z dosavadních výsledků je zřejmé (viz vztahy (26), (41)), že vzájemná indukčnost je přímo úměrná součinu počtu závitů cívek ve vazbě, tj. $N_1 N_2$, kdežto vlastní indukčnost je dána druhou mocninou počtu závitů cívky – viz např. (32).

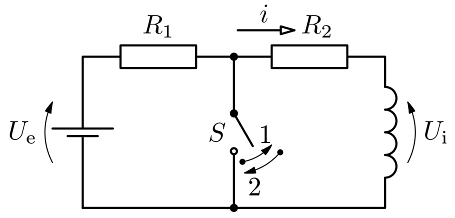
3 Elektrické obvody s proměnným proudem

3.1 Přechodné děje v elektrickém obvodu

Přivedeme-li do obvodu elektrický proud, nevzroste jeho hodnota ihned na ustálenou hodnotu danou nominálními hodnotami obvodu, protože změnu proudu při jeho vzrůstu provází jev vlastní indukce. Např. dáme-li spínač S na obr. 23 do polohy 1, nevzroste proud okamžitě na hodnotu

$$I_0 = \frac{U_\mathrm{e}}{R_1 + R_2},$$

protože při vzrůstu proudu se v cívce indukuje elektromotorické napětí U_i, které je namířeno proti vzrůstu proudu.



Obr. 23 K výkladu přechodného jevu v obvodu s R, L

Přepneme-li spínač po dosažení ustáleného stavu do polohy 2 „zapnuto“, zkratuje se cívka přes rezistor R_2 a proti zmenšování proudu bude působit v cívce napětí, které bude mít opačný směr, než je naznačeno na obr. 23.

Pro kvantitativní popis těchto jevů použijeme 2. Kirchhoffův zákon, který pro jednotlivé polohy spínače S má tvar[7]

$$(R_1 + R_2)i = U_\mathrm{e} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{pro polohu 1,} \tag{42}$$

$$R_2 i = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{pro polohu 2.} \tag{43}$$

Jednodušší je řešit rovnici (43), proto ji vyřešíme jako první. Separujeme-li proměnné, dostaneme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{R_2}{L}\mathrm{d}t,$$

kterou můžeme integrovat. Předpokládáme počáteční podmínku pro proud $i_{t=0} = I_0$ a integrujeme do obecného stavu, popsaného proudem i a časem t:

$$\int_{I_0}^{i} \frac{\mathrm{d}i}{i} = \ln\frac{i}{I_0} = -\frac{R_2}{L}t.$$

[7] V souladu se zvyklostmi v aplikované teoretické elektrotechnice a elektronice budeme označovat okamžité hodnoty proudu a napětí malými písmeny, tj. i, u, kdežto pro konstantní hodnoty (např. amplitudy) ponecháme označení velkými písmeny.

Odtud

$$i = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}, \tag{44}$$

kde

$$\tau_2 = \frac{L}{R_2} \tag{45}$$

je *časová konstanta obvodu* při vybíjení. Je to doba, během níž proud i klesne právě e-krát.

Rovnici (42) převedeme do tvaru analogického tvaru (43) substitucí

$$u = (R_1 + R_2)i - U_\mathrm{e}, \quad \mathrm{d}u = (R_1 + R_2)\mathrm{d}i \quad (U_\mathrm{e} = konst.).$$

Rovnici (42) upravíme na tvar

$$(R_1 + R_2)i - U_\mathrm{e} = -\frac{L}{R_1 + R_2}\frac{(R_1 + R_2)\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \quad \text{neboli } u = -\tau_1 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

kde

$$\tau_1 = \frac{L}{R_1 + R_2} \tag{46}$$

je časová konstanta obvodu při nabíjení. V upravené rovnici můžeme separovat proměnné

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau_1}.$$

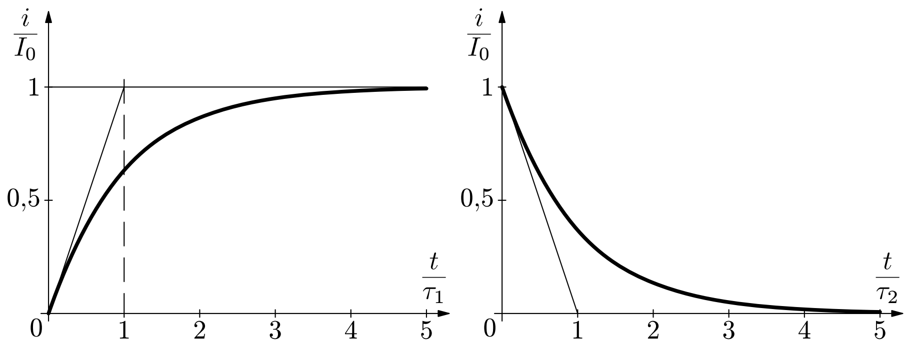
Integrujeme pro danou počáteční podmínku: $i = 0$ pro $t = 0$, neboli $u = -U_\mathrm{e}$. Horní mez je i pro t, neboli po separaci $u = (R_1 + R_2)i - U_\mathrm{e}$ pro t. Pak

$$\ln \frac{(R_1 + R_2)i - U_\mathrm{e}}{-U_\mathrm{e}} = -\frac{t}{\tau_1},$$

neboli

$$i = \frac{U_\mathrm{e}}{R_1 + R_2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) = I_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\right). \tag{47}$$

Funkční závislost proudu na čase při zapnutí (47) a vypnutí (44) obvodu z obr. 23 je znázorněna na grafech v obr. 24. V obou grafech je pro zajímavost nakreslena tečna v bodě $t = 0$; v obou případech je určena jednoduchými souřadnicemi.



Obr. 24 Časový diagram proudu v obvodu na obr. 23;
a) při zapnutí proudu, b) při jeho vypnutí

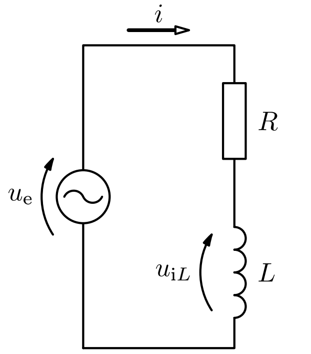
3.2 Obvody střídavého proudu

a) Obvod s R, L v sérii

Uvažujme obvod cívky o indukčnosti L a elektrickém odporu R (neboli cívku a rezistor spojené do série – obr. 25) připojený ke zdroji s periodicky proměnným elektromotorickým napětím podle funkce

$$u_\mathrm{e} = U_\mathrm{m} \sin \omega t, \tag{48}$$

kde U_m je amplituda napětí, $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$ úhlová frekvence, f frekvence a T perioda.



Obr. 25 Obvod s R, L v sérii

Protože R a L jsou v sérii, bude jimi procházet stejný proud

$$i = I_\mathrm{m} \sin(\omega t - \varphi), \tag{49}$$

kde I_m je amplituda proudu a φ je fázový posun proudu za napětím (48). Veličiny I_m a φ máme určit řešením.

Proti vzrůstu proudu (49) v obvodu působí v cívce elektromotorické napětí

$$u_\mathrm{iL} = -L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{50}$$

a pro napětí v obvodu musí podle 2. Kirchhoffova zákona platit

$$Ri = u_{\mathrm{e}} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{51}$$

Tuto rovnici vyřešíme tak, že předpokládáme průběh napětí a proudu podle funkcí (48) a (49), přičemž neznámé veličiny I_{m}, φ určíme tak, aby rovnice (51) byla splněna pro každý okamžik. Po dosazení z (48) a (49) do (51) máme

$$RI_{\mathrm{m}}\sin(\omega t - \varphi) = U_{\mathrm{m}}\sin\omega t - \omega L I_{\mathrm{m}}\cos(\omega t - \varphi). \tag{52}$$

Protože tato rovnice musí být splněna pro každé t, můžeme si zvolit dva vhodné okamžiky, pro něž se tato rovnice zjednoduší:

$$t_1 = 0: \quad -RI_{\mathrm{m}}\sin\varphi = -\omega L I_{\mathrm{m}}\cos\varphi,$$

$$\omega t_2 - \varphi = \frac{\pi}{2}: \quad RI_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}}\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = U_{\mathrm{m}}\cos\varphi.$$

Z rovnic plyne

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}, \quad I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\cos\varphi = \frac{U_{\mathrm{m}}}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}. \tag{53}$$

Výraz pro amplitudu můžeme vyjádřit ve tvaru

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{Z}, \tag{54}$$

kde

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_{\mathrm{L}}^2} \tag{55}$$

je *impedance* obvodu a X_{L} *induktance*. Jejich jednotkou je zřejmě *ohm*.

Vztah (55) se využívá k určování vlastní indukčnosti cívek. Elektrický odpor R určíme z měření stejnosměrným proudem (např. ohmetrem). Pak cívku zapojíme do obvodu střídavého proudu známé frekvence f, změříme napětí na cívce a proud jí procházející. Jejich podíl[8] určí v souladu s (54) impedanci Z. Indukčnost pak vypočteme užitím vztahu (55):

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}.$$

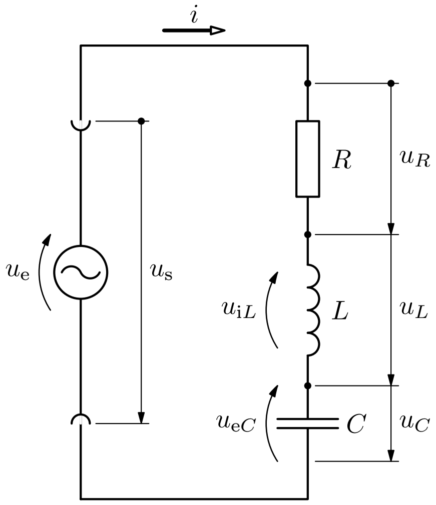
Měření indukčnosti touto metodou vyžaduje kvalitní generátor sinusově proměnného napětí. Je-li výstupní signál generátoru zkreslený, uplatní se při měření také jeho vyšší harmonické složky, což může vést ke znatelným chybám měření.

[8] Protože veličiny jsou v podílu, je lhostejné, zda jde o jejich amplitudy nebo měřené efektivní hodnoty.

b) Obvod s R, L, C v sérii

Obvod z obr. 25 rozšíříme o sériově zapojený kondenzátor o kapacitě C (obr. 26). Pokud bychom tento obvod připojili je zdroji stejnosměrného napětí, procházel by obvodem proud jen po dobu nabíjení kondenzátoru. Po jeho nabití působí proti elektromotorickému napětí zdroje stejně velké napětí na kondenzátoru opačného směru a proud ustane. Připojíme-li do obvodu zdroj střídavého napětí (48), vznikne v obvodu střídavý proud, kterým se kondenzátor bez časového omezení střídavě nabíjí a vybíjí.

Z uvedené úvahy je zřejmé, že na kondenzátoru se vytváří napětí, které je namířené proti vloženému elektromotorickému napětí u_{e}.



Obr. 26 Obvod s R, L, C v sérii. Vedle elektromotorických napětí jsou zde vyznačena svorková napětí u_R, u_L a u_C, která mají opačný směr než napětí elektromotorická

Toto napětí $u_{\mathrm{e}C}$ na kondenzátoru můžeme považovat za elektromotorické. Při přivedení kladného elementárního náboje za čas $\mathrm{d}t$, tj. $\mathrm{d}q = i\mathrm{d}t$, se změní elektromotorické napětí na kondenzátoru o

$$\mathrm{d}u_{\mathrm{e}C} = -\frac{\mathrm{d}q}{C} = -\frac{i\mathrm{d}t}{C}, \quad \text{neboli} \quad \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{e}C}}{\mathrm{d}t} = -\frac{i}{C}. \tag{56}$$

Při proměnném proudu se současně v cívce indukuje elektromotorické napětí (50) a pro rovnováhu napětí v obvodu na obr. 26 musí podle 2. Kirchhoffova zákona platit $Ri = u_{\mathrm{e}} + u_{\mathrm{e}C} + u_{\mathrm{i}L}$. Protože podle (56) známe jen derivaci napětí na kondenzátoru, provedeme derivaci rovnice napětí podle času a dosadíme do ní výraz (56) a derivované výrazy (48) a (50). Pak

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = \omega U_{\mathrm{m}} \cos \omega t. \tag{57}$$

Rovnice (57) je z fyzikálního hlediska pohybovou rovnicí elektrického tlumeného oscilátoru buzeného harmonicky proměnným napětím. Z matematického hlediska jde o nehomogenní diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Její obecný integrál se skládá ze součtu obecného integrálu příslušné homogenní rovnice (tj. s pravou stranou nulovou) a tzv. partikulárního integrálu úplné rovnice. Protože homogenní rovnice popisuje tlumené kmity podle klesající exponenciální funkce, které se po jistém čase utlumí, budeme hledat jen řešení *proudu pro ustálený stav*. Předpokládáme tedy opět řešení ve tvaru (49) s neznámou amplitudou I_{m} a fázovým posunem φ a o úhlové frekvenci ω, kterou má budicí napětí (48). Po dosazení příslušných derivací proudu (49) do (57) dostaneme rovnici

$$-\omega^2 L I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t - \varphi) + \omega R I_{\mathrm{m}} \cos(\omega t - \varphi) + \frac{I_{\mathrm{m}}}{C} \sin(\omega t - \varphi) = \omega U_{\mathrm{m}} \cos \omega t.$$

Protože rovnice musí být splněna pro každé t, můžeme si pro ustálený stav zvolit takové okamžiky t_1, t_2 tak, aby

$$\omega t_1 - \varphi = 0 \quad (\omega t_1 = \varphi) \quad \text{pak} \quad \omega R I_{\mathrm{m}} = \omega U_{\mathrm{m}} \cos \varphi,$$

$$\omega t_2 - \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \left(\omega t_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{pak} \quad -\omega^2 L I_{\mathrm{m}} + \frac{I_{\mathrm{m}}}{C} = \omega U_{\mathrm{m}} \underbrace{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin\varphi},$$

neboli

$$R I_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \cos \varphi,$$
$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_{\mathrm{m}} = U_{\mathrm{m}} \sin \varphi.$$

Sečteme-li druhé mocniny těchto rovnic a dělíme-li tyto rovnice mezi sebou, dostaneme hledané neznámé charakteristiky proudu:

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{Z}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \frac{X_L - X_C}{R}, \tag{58}$$

kde

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \tag{59}$$

je *impedance* obvodu s R, L, C v sérii, $X_L = \omega L$ *induktance* a $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ *kapacitance*.

Z odvozených vztahů je zřejmé, že proud (49) není ve fázi s elektromotorickým napětím (48). Je-li $X_C > X_L$, má obvod *kapacitní charakter*, fázový posun φ je pro takový obvod záporný, tj. proud předbíhá napětí. Je-li $X_L > X_C$, má obvod *induktivní charakter*, fázový posun φ je kladný, tj. proud je opožděn za napětím. Zvláštní případ nastane, když $X_L = X_C$. Pak $Z = R$ a $\varphi = 0$. Pro dané L, C tento stav nastane pro úhlovou frekvenci $\omega = \omega_0$, pro níž

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

tedy pro

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (Thomson\mathring{u}v\ vztah). \tag{60}$$

Při této úhlové frekvenci je amplituda I_m maximální ($I_\mathrm{max} = \frac{U_\mathrm{m}}{R}$) - *obvod RLC je v rezonanci*.

Poznámka: V předloženém výkladu jsme použili elektromotorická napětí (50) a (56) na cívce a kondenzátoru, jak se běžně užívá ve fyzice. Již v poznámce v čl. 1.2 jsme uvedli, že teorie elektrických obvodů dává přednost obvodovým veličinám, kterými jsou svorková napětí na jednotlivých prvcích R, L, C, tedy okamžitá napětí u_R, u_L a u_C, která jsou rovněž vyznačena na obr. 26. Pak podle 2. Kirchhoffova zákona bude okamžité elektromotorické napětí u_e vtištěného zdroje rovno součtu okamžitých hodnot těchto napětí, neboli

$$u_\mathrm{e} = u_R + u_L + u_C, \tag{61}$$

přičemž

$$u_R = Ri, \tag{62}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{63}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}. \tag{64}$$

Dosadíme-li do derivované rovnice (61) příslušné derivace napětí (48), (62), (63) a výraz (64), dostaneme dříve uvedenou rovnici (57).

Svorková napětí prvků (62) až (64) mají význam pro měření – jsou to napětí, která měříme voltmetrem anebo jejich časový průběh znázorňujeme osciloskopem připojeným ke svorkám prvku.

K řešení složitějších obvodů se s výhodou užívá symbolická metoda založená na pojmu *fázor* (Podrobněji viz např. [1], [2]. [3]).

c) Fázové vztahy mezi napětím a proudem na prvcích R, L, C

Předpokládejme, že obvodem s R, L, C v sérii prochází střídavý proud s nulovým počátečním fázovým posunem:

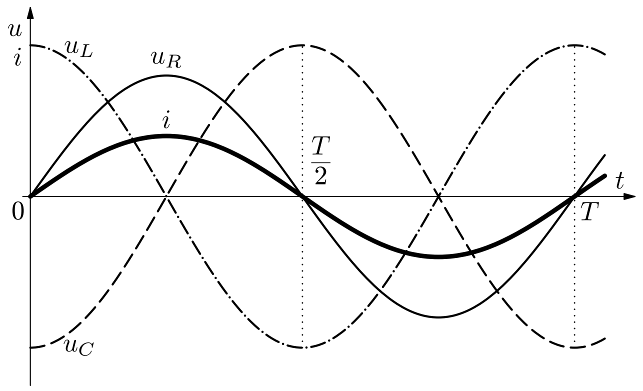
$$i = I_{\mathrm{m}} \sin \omega t \tag{65}$$

a určeme *svorková napětí* na jednotlivých prvcích obvodu.

Na *rezistoru* bude napětí (62), neboli $u_R = RI_{\mathrm{m}} \sin \omega t$, které je ve fázi s proudem. Na svorkách *cívky* bude napětí (63), neboli $u_L = \omega L I_{\mathrm{m}} \cos \varphi$, které předbíhá proud o $\frac{\pi}{2}$. Napětí na svorkách *kondenzátoru* dostaneme integrací výrazu (64) po dosazení z (65). Zřejmě je

$$u_C = \frac{I_{\mathrm{m}}}{C} \int \sin \omega t \, \mathrm{d}t = -\frac{I_{\mathrm{m}}}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

neboli napětí je fázově opožděno o $\frac{\pi}{2}$ oproti proudu (65). Přehledně jsou časové průběhy proudu a napětí znázorněny na obr. 27. Zde byl zvolen zvláštní případ $u_C = -u_L$. Pak výsledné napětí je rovné napětí u_R a je ve fázi s proudem. Jde o případ rezonance v sériovém RLC obvodu.



Obr. 27 Časový diagram proudu a napětí na prvcích R, L, C

Příklad 7 – rezonance v obvodu s R, L, C v sérii

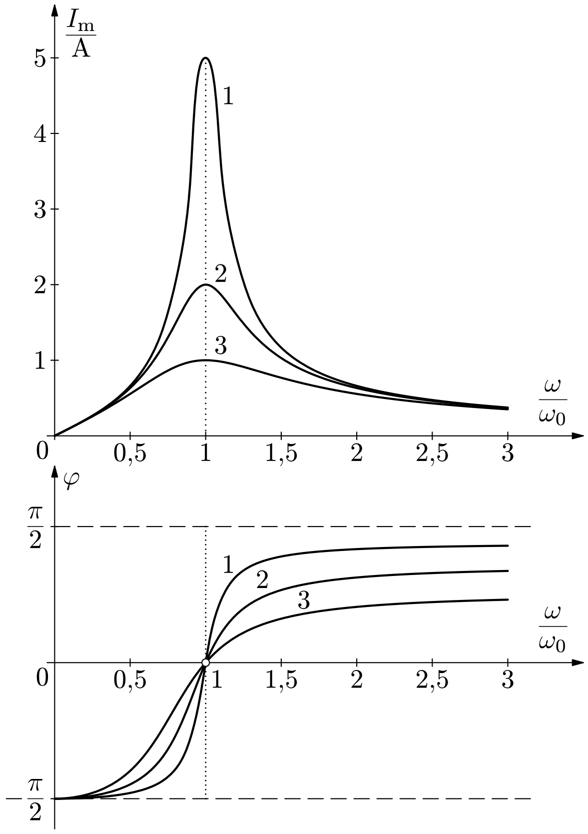
Je dán obvod s R, L, C v sérii (obr. 26) těmito hodnotami: $L = 0{,}10$ mH, $C = 1{,}0\ \mu$F; $U_{\mathrm{m}} = 100$ V a třemi úrovněmi odporů: 1. $R_1 = 20\ \Omega$, 2. $R_2 = 50\ \Omega$, 3. $R_3 = 100\ \Omega$. Vypočtěte rezonanční frekvenci ω_0 a f_0 obvodu a amplitudy proudu při rezonanci. Nakreslete funkční závislosti $I_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}(\omega/\omega_0)$ a $\varphi = \varphi(\omega/\omega_0)$ podle vztahů (58).

Řešení

Frekvence $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 16\ \mathrm{kHz}$.
Amplitudy proudu při rezonanci jsou

$$I_{\mathrm{m1}} = 5{,}0\ \mathrm{A}, \quad I_{\mathrm{m2}} = 2{,}0\ \mathrm{A}, \quad I_{\mathrm{m3}} = 1{,}0\ \mathrm{A}.$$

Závislost amplitudy I_{m} a fázového posunu φ na relativní úhlové frekvenci $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ je na obr. 28.



Obr. 28 Závislost amplitudy proudu I_{m} a fázového posunu φ v sériovém RLC obvodu na relativní úhlové frekvenci $\dfrac{\omega}{\omega_0}$, kde ω_0 je rezonanční úhlová frekvence, pro odpor $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$

Příklad 8 – energie v obvodu s R, L, C v sérii

Analyzujte energii v uzavřeném obvodu s R, L, C v sérii, který není připojen k vnějšímu zdroji napětí a pomocí energetické bilance odvoďte pohybovou rovnici kmitů tohoto oscilátoru. Počáteční stav: obvod rozkmitáme např. tak, že nabijeme kondenzátor připojením ke zdroji stejnosměrného napětí a pak zdroj odpojíme.

Řešení

Elektromagnetická energie obvodu

$$E = E_{\mathrm{e}} + E_{\mathrm{mg}} = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} \tag{66}$$

není konstantní – v důsledku zapojeného rezistoru nastává její disipace (rozptyl). Rychlost této disipace (ztrátový výkon) se projevuje jako tepelný výkon rezistoru:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -Ri^2. \tag{67}$$

Derivací rovnice (66) a dosazením z (67) dostaneme

$$\frac{q}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ri^2, \quad \text{kde } i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}.$$

Pak

$$\frac{q}{C} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -Ri. \tag{68}$$

Po vyjádření proudu i pomocí náboje q a po úpravě je

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}q = 0, \tag{69}$$

což je pohybová rovnice elektrických kmitů v obvodu, když jsme za nezávisle proměnnou volili okamžitý náboj q na kondenzátoru. Častější je vyjádření pohybové rovnice pomocí okamžitého proudu i. Dostaneme ji derivací rovnice (68):

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = 0. \tag{70}$$

Tato rovnice je zvláštním případem obecnější rovnice (57) pro $U_{\mathrm{m}} = 0$, platné pro buzený sériový RLC obvod.

Matematicky jsou diferenciální rovnice (69), (70) podobné. Jejich řešením je funkce pro tlumené kmity s exponenciálně ubývající amplitudou, např. pro proud (v případě podkritického tlumení) je[9]

$$i = I_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \sin(\omega' t + \alpha),$$

kde součinitel tlumení δ a úhlová frekvence ω' jsou dány výrazy

$$\delta = \frac{R}{2L}, \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

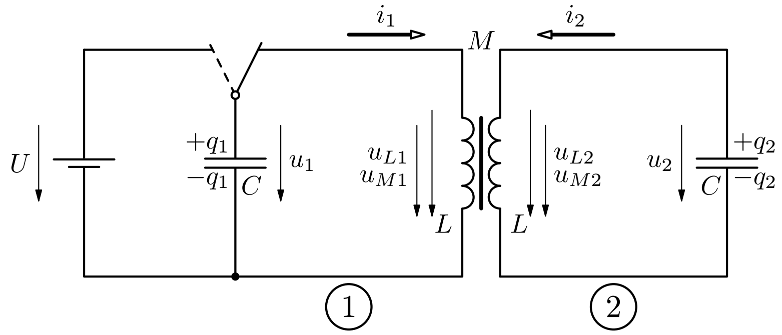
přičemž ω_0 je úhlová frekvence netlumených kmitů. Konstanty I_0, α se určí z počátečních podmínek.

[9] Podrobnější rozbor řešení této diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty pro případ mechanického oscilátoru lze najít např. v minulém studijním textu [15] na str.16 – 21.

4 Aplikace elektromagnetické indukce

4.1 Vázané oscilační obvody

Elektrický obvod s R, L, C v sérii, který jsme analyzovali v čl. 3.2b, je jednoduchý buzený elektrický oscilátor. Je základním elementem elektronických komunikačních systémů, jako rozhlasových a televizních vysílačů a přijímačů, mobilních telefonů, radarů aj. Důležitým prvkem elektrických systémů (např. zesilovačů) jsou také vázané (spřažené) oscilační obvody. Nyní se budeme zabývat jednoduchým případem takových obvodů – vyřešíme vlastní kmity soustavy dvou stejných induktivně spřažených elektrických oscilátorů podle obr. 29.



Obr. 29 Dva spřažené elektrické oscilátory; vyznačená napětí na jednotlivých prvcích jsou svorková (obvodová)

Pro jednoduchost neuvažujme elektrický odpor vodičů v obvodech.

Oscilátory rozkmitáme např. tak, že nabijeme kondenzátor prvního oscilátoru připojením ke zdroji o napětí U. Připojíme-li posléze ke kondenzátoru cívku přepnutím přepínače, začne se kondenzátor přes cívku vybíjet. V obvodu začne vzrůstat proud a v cívce se bude indukovat elektromotorické napětí namířené proti změně proudu i_1 (na obr. 29 jsou vyznačena svorková napětí na prvcích obvodu, která mají opačný směr než napětí elektromotorická – viz poznámku na konci čl. 3.2b). V důsledku indukční vazby popsané vzájemnou indukčností M se bude ve druhém obvodu indukovat napětí u_{M2}, které rozkmitá také tento oscilační obvod. Indukovaný proud i_2 bude nabíjet kondenzátor na napětí u_2 a v cívce se v důsledku proměnného proudu i_2 indukuje samoindukční napětí u_{L2} a zpětnovazebné do prvního obvodu napětí u_{M1}. Všechna napětí jsou proměnná, avšak musí se nacházet v dynamické rovnováze tak, že podle 2. Kirchhoffova zákona musí být v každém okamžiku jejich součet roven nule samostatně pro každý oscilátor (úbytek napětí na rezistorech je nulový, protože předpokládáme $R_1 = R_2 = 0$).

Z hlediska experimentálního ověření činností těchto vázaných oscilačních obvodů je vhodné pracovat s uvedenými svorkovými (obvodovými) napětími – budeme tedy hledat funkce pro napětí u_1, u_2 na svorkách kondenzátoru (ta můžeme snímat osciloskopem). Zvolíme-li za kladný směr při oběhu po uzavřené smyčce obvodu vyznačené směry proudů i_1, i_2, musí platit

$$\left.\begin{aligned} -u_1 + u_{L1} + u_{M1} = 0, \\ -u_2 + u_{L2} + u_{M2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

přičemž proudy i_1, i_2 v obvodech jsou dány vybíjením kondenzátorů a tudíž vztahy

$$\left.\begin{aligned} i_1 = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(Cu_1)}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}, \\ i_2 = -\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}(Cu_2)}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

Napětí na svorkách cívek pak jsou

$$u_{L1} = L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2}, \quad u_{L2} = -LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2},$$

$$u_{M1} = M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -MC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2}, \quad u_{M2} = -MC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2}.$$

Po dosazení do rovnic (71) dostaneme soustavu vázaných diferenciálních rovnic druhého řádu pro napětí u_1, u_2:

$$u_1 + LC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} + MC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

$$u_2 + LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + MC\frac{\mathrm{d}^2u_1}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Výhodné bude hledat funkce pro součty $u_1 + u_2$, a rozdíly $u_1 - u_2$, pro něž z těchto rovnic dostaneme

$$u_1 + u_2 = C(L+M)\frac{\mathrm{d}^2(u_1+u_2)}{\mathrm{d}t^2} = 0, \tag{73}$$

$$u_1 - u_2 = C(L-M)\frac{\mathrm{d}^2(u_1-u_2)}{\mathrm{d}t^2} = 0. \tag{74}$$

Z matematického hlediska nyní již jde o dvě samostatné diferenciální rovnice, které fyzikálně popisují harmonické kmity o úhlových frekvencích

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k_\mathrm{v}}}, \tag{75}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k_\mathrm{v}}} > \omega_1, \tag{76}$$

kde je

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

vlastní úhlová frekvence osamoceného oscilátoru,

$$k_\mathrm{v} = \frac{M}{L}$$

činitel induktivní vazby (jde o zvláštní případ výrazu (28) pro $L_1 = L_2 = L$).

Rovnicím (73), (74) vyhovují funkce sinus a kosinus a protože jde o rovnice druhého řádu, použijeme lineární kombinaci obou možností:

$$u_1 + u_2 = A_1 \sin\omega_1 t + B_1 \cos\omega_1 t, \tag{77}$$

$$u_1 - u_2 = A_2 \sin\omega_2 t + B_2 \cos\omega_2 t, \tag{78}$$

kde integrační konstanty A_1, B_1, A_2, B_2 určíme z počátečních podmínek. Pro tento výpočet určíme ještě proudy, pro něž v souladu s (72) platí

$$i_1 + i_2 = -C\frac{\mathrm{d}(u_1+u_2)}{\mathrm{d}t} = -C\omega_1(A_1\cos\omega_1 t - B_1 \sin\omega_1 t), \tag{79}$$

$$i_1 - i_2 = -C\frac{\mathrm{d}(u_1-u_2)}{\mathrm{d}t} = -C\omega_2(A_2\cos\omega_2 t - B_2 \sin\omega_2 t). \tag{80}$$

Ze situace popsané v úvodu tohoto článku plynou počáteční podmínky: pro $t = 0$ je $u_1 = U$, $u_2 = 0$, $i_1 = i_2 = 0$. Pak z rovnic (77) a (78) dostaneme $B_1 = B_2 = U$ a z rovnic (79) a (80) $A_1 = A_2 = 0$. Z obecných integrálů (77), (78) diferenciálních rovnic (73) a (74) tak vyplývají partikulární integrály

$$u_1 + u_2 = U\cos\omega_1 t, \quad u_1 - u_2 = U\cos\omega_2 t,$$

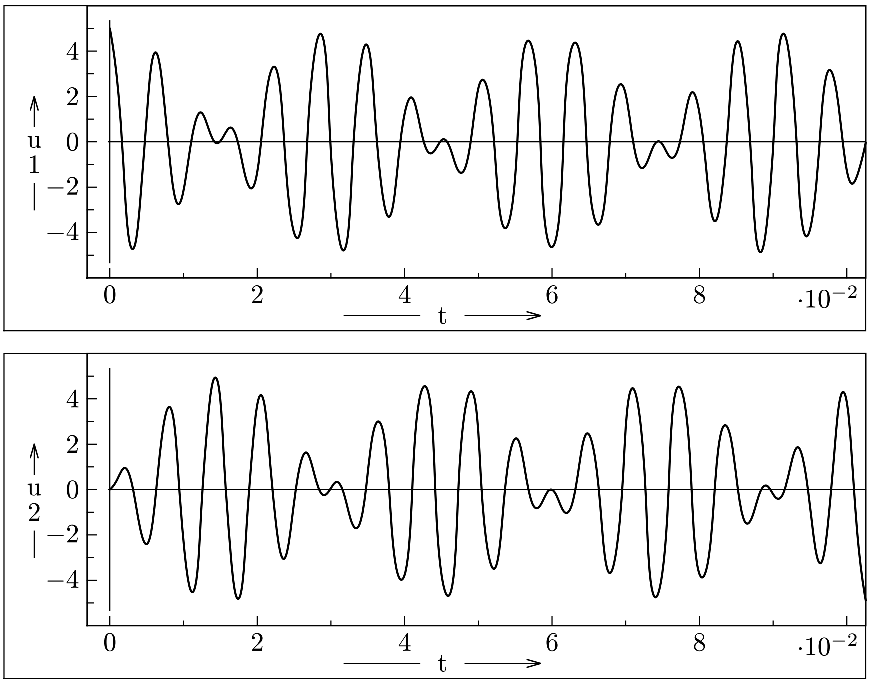
neboli pro jednotlivá napětí funkce

$$u_1 = \frac{U}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = U\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t, \tag{81}$$

$$u_2 = \frac{U}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = -U\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t. \tag{82}$$

Protože $\omega_2 > \omega_1$, je rozdílová úhlová frekvence $\omega_1 - \omega_2 < 0$, což vede ke změně znaménka u napětí u_2, neboť sinus je funkce lichá. Funkce rozdílových frekvencí jsou ve srovnání s funkcemi součtových frekvencí pomalu proměnné a lze je považovat za proměnné amplitudy kmitů napětí u_1, u_2 (viz obr. 30).

Časový diagram napětí u_1 a u_2 pro zvolené parametry obvodů z obr. 29 je na obr. 30. Záznam byl získán řešením na PC pomocí programu *Famulus*.



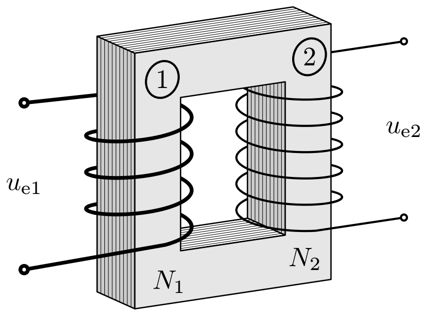
Obr. 30 Časový diagram napětí u_1 a u_2 na kondenzátorech obvodů z obr. 29 pro $L = 1{,}0$ H, $M = 0{,}20$ H, $C = 1{,}0\ \mu$F ($f_1 = 145$ Hz, $f_2 = 178$ Hz) a $U = 5{,}0$ V

4.2 Transformátor

Transformátor se skládá ze dvou cívek o značné vlastní a vzájemné indukčnosti. Toho se dosahuje tím, že cívky se vinou na feromagnetické jádro (obr. 31) složené ze železných plechů (plech se používá proto, aby se omezily ztráty vířivými proudy). Do vstupní cívky –*primární* (1) – se přivádí střídavý proud, čímž se ve výstupní cívce – *sekundární* (2) indukuje střídavé napětí stejné frekvence. Vztah mezi amplitudami U_{m1}, U_{m2} vstupního a výstupního napětí závisí na počtech závitů N_1, N_2. Elektrický odpor vinutí pro jednoduchost zanedbáme.

Protože obě cívky jsou na společném feromagnetickém jádře, je mezi nimi těsná induktivní vazba. Můžeme proto předpokládat, že všechny magnetické indukční čáry $\varPhi$ vybuzené primární cívkou budou procházet sekundární cívkou. Protože cívky mají N_1 a N_2 závitů, bude pro celkový magnetický indukční tok primární a sekundární cívkou platit

$$\varPhi_1 = N_1 \varPhi, \quad \varPhi_2 = N_2 \varPhi. \tag{83}$$



Obr. 31 Transformátor

Magnetizační pole $\varPhi$ v jádře vybudíme tak, že primární vinutí připojíme ke zdroji o elektromotorickém napětí

$$u_{e1} = U_{m1} \sin \omega t. \tag{84}$$

Příslušný magnetizační proud i_{mg} můžeme určit užitím Hopkinsonova zákona (viz např. [14], str. 17). Platí

$$\varPhi = \frac{U_{mn}}{R_{mg}},$$

kde R_{mg} je magnetický odpor jádra a $U_{mn} = N_1 i_{mg}$ je magnetomotorické napětí v obvodu primární cívky. Pak magnetizační proud

$$i_{mg} = \frac{R_{mg} \varPhi}{N_1} \tag{85}$$

je dán konstrukcí jádra (to určuje R_{mg}), jeho sycením magnetickým polem ($\varPhi$) a počtem závitů N_1 primární cívky.

a) Transformátor při chodu naprázdno

Uvažujme nejprve jednoduchý případ činnosti transformátoru, když sekundární cívka není připojena k zátěži a neodebírá se z ní výkon (tj. chod naprázdno). Sekundární cívkou tedy neprochází proud a do primární cívky se z ní zpětně neindukuje žádné napětí.

Nechť primární cívka je připojena ke zdroji elektromotorického napětí u_{e1} (84). Proměnný magnetizační proud i_{mg} v ní vyvolá proměnný magnetický indukční tok $\varPhi_1 = N_1 \varPhi$, v důsledku něhož se v cívce indukuje elektromotorické napětí

$$u_{i1} = -\frac{\mathrm{d}\varPhi_1}{\mathrm{d}t} = -N_1 \frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t}. \tag{86}$$

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí

$$u_{\mathrm{e1}} + u_{\mathrm{i1}} = R_1 i_{\mathrm{mg}} = 0, \tag{87}$$

protože odpor R_1 primárního vinutí zanedbáváme ($R_1 \to 0$). Po dosazení do (87) z (84) a (86) dostaneme

$$U_{\mathrm{m1}} \sin \omega t = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Separujeme-li dt na levou stranu a integrujeme, dostaneme

$$\Phi = -\frac{U_{\mathrm{m1}}}{\omega N_1} \cos \omega t = \frac{U_{\mathrm{m1}}}{\omega N_1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \tag{88}$$

Magnetizační proud podle (85) pak bude

$$i_{\mathrm{mg}} = \frac{R_{\mathrm{mg}} U_{\mathrm{m1}}}{\omega N_1^2} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Z toho je zřejmé, že magnetický tok Φ i magnetizační prod i_{mg} jsou fázově opožděny za napětím u_{e1} o $\frac{\pi}{2}$.

V důsledku proměnného magnetického indukčního toku $\Phi_2 = N_2 \Phi$ procházejícího N_2 závity sekundární cívky, kde Φ je dáno (88), se v této cívce indukuje elektromotorické napětí

$$u_{\mathrm{e2}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{N_2}{N_1} U_{\mathrm{m1}} \sin \omega t = U_{\mathrm{m2}} \sin(\omega t - \pi), \tag{89}$$

kde pro amplitudu napětí na sekundární cívce zřejmě platí

$$\boxed{U_{\mathrm{m2}} = \frac{N_2}{N_1} U_{\mathrm{m1}}, \text{ neboli } \frac{U_{\mathrm{m2}}}{U_{\mathrm{m1}}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = k,} \tag{90}$$

kde $k = \frac{N_2}{N_1}$ je *transformační poměr* a U_1, U_2 efektivní hodnoty napětí. Podíl maximálních nebo efektivních hodnot napětí na svorkách obou vinutí je tedy roven podílu počtu závitů obou vinutí. Z (89) je zřejmé, že elektromotorické napětí indukované v sekundárním vinutí je fázově posunuto o π, neboli je v protifázi oproti elektromotorickému napětí v primárním vinutí.

b) Zatížený transformátor

Zatížíme-li sekundární vinutí transformátoru připojením spotřebiče (jeho odpor R_2 musí splňovat podmínku $R_2 \ll \omega L_2$), bude jím procházet sekundární zatěžovací proud i_2. Ten vyvolá přídavný magnetický tok Φ_2', pro nějž podle Hopkinsonova zákona (tedy analogicky vztahu (66)) platí

$$\Phi_2' = N_2 \frac{i_2}{R_{\mathrm{mg}}}. \tag{91}$$

V důsledku tohoto proměnného toku se v primárním vinutí vybudí magnetický tok Φ_1'. Ten musí být takový, aby se neporušila rovnováha napětí (87). To nastane tehdy, když tok Φ_1' právě vyruší to Φ_2', neboli musí platit $\Phi_1' = -\Phi_2'$. Přídavný tok Φ_1' bude vybuzen zatěžovacím proudem i_1 tak, aby v souladu s (91) platilo

$$\Phi_1' = N_1 \frac{i_1}{R_{\mathrm{mg}}} = -\Phi_2'.$$

Musí tedy být $N_1 i_1 = -N_2 i_2$. Proud i_1 je tudíž v protifázi s proudem i_2. Pro amplitudy resp. efektivní hodnoty těchto zatěžovacích proudů zřejmě platí

$$\frac{I_{\mathrm{m1}}}{I_{\mathrm{m2}}} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{U_2}{U_1} = k. \tag{92}$$

c) Výkon transformátoru

Výkon P_2 odebíraný ze sekundárního vinutí je u skutečného transformátoru vždy menší než příkon P_1 přiváděný do primárního vinutí. Zanedbáme-li ztráty transformace (účinnost transformátoru může být až 98%), bude

$$P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2 = P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1,$$

kde jsme výpočet provedli pomocí efektivních hodnot napětí a proudu, přičemž $\cos\varphi_1$ a $\cos\varphi_2$ jsou účiníky.

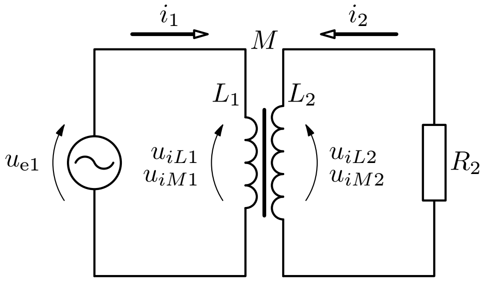
Při chodu transformátoru *naprázdno* je $I_2 = 0$, $P_2 = 0$ a tedy i $P_1 = 0$. Protože $U_1 \neq 0$, $I_1 \neq 0$, musí být $\cos\varphi_1 = 0$, neboli $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, tj. účiník pro primární cívku je nulový.

Je-li sekundární cívka zatížena připojením rezistoru, můžeme brát $\cos\varphi_1 \approx \approx \cos\varphi_2 \approx 1$. Pak $U_2 I_2 = U_1 I_1$ v souladu s (92).

Příklad 9 – transformátor jako soustava vázaných obvodů

Řešte transformátor jako soustavu dvou vázaných obvodů s velmi těsnou vazbou. Uvažujte, že primární cívka má indukčnost L_1, N_1 závitů a zanedbatelný odpor $R_1 \to 0$. Cívka je připojena ke zdroji o elektromotorickém napětí $u_{e1} = U_{m1} \sin \omega t$. Sekundární cívka o indukčnosti L_2 a N_2 závitech je připojena k zátěži o odporu R_2. V důsledku uzavřeného feromagnetického jádra uvažujte činitel induktivní vazby $k_v = 1$, takže $M = \sqrt{L_1 l_2}$. Odvoďte výrazy pro okamžitý proud a napětí v sekundárním vinutí.

Řešení



Obr. 32 Transformátor jako soustava vázaných obvodů s těsnou vazbou

Obvody transformátoru (obr. 32) jsou popsány soustavou rovnic

$$u_{e1} - L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$-M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = R_2 i_2.$$

Z rovnic vyloučíme derivaci proudu i_1 tak, že ji vyjádříme z první rovnice a dosadíme do druhé.

Potom

$$M u_{e1} + (L_1 L_2 - M^2) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -L_1 R_2 i_2.$$

Protože $k_v = 1$ je $L_1 L_2 - M^2 = 0$. Pak pro sekundární proud platí

$$i_2 = -\frac{M}{L_1 R_2} u_{e1} = -\frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} u_{e1} = -\frac{U_{m1}}{R_2} \frac{N_2}{N_1} \sin \omega t,$$

neboť vlastní indukčnost je úměrná druhé mocnině počtu závitů ($L_1 \sim N_1^2$, $L_2 \sim N_2^2$). Pak napětí na rezistoru o odporu R_2, neboli sekundární napětí transformátoru je

$$u_2 = R_2 i_2 = -U_{m1} \frac{N_2}{N_1} \sin \omega t.$$

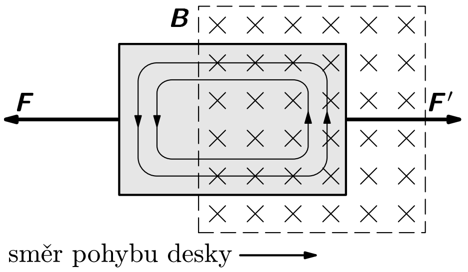
Pro amplitudu U_{m2} a efektivní hodnotu U_2 zřejmě platí

$$\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = k$$

v souladu s výsledkem (92).

4.3 Vířivé (Foucaultovy) proudy

Z dosavadního výkladu plyne, že proměnné magnetické pole vytváří ve vodičích elektrické pole, které se projevuje tokem uzavřených elektrických proudů. Dodud jsme vesměs uvažovali tenké drátové („jednorozměrné“) vodiče. Jev samozřejmě nemůže být omezen jen na tento typ vodičů a musí se projevovat rovněž u prosorových (trojrozměrných) a plošných (dvourozměrných) vodičů. Nahradíme-li např. u experimentu na obr. 4 drátový vodič kovovou deskou (obr. 33), vzniknou v ní při jejím pohybu napříč magnetickým polem *vířivé proudy*.



Obr. 33 Vířivé proudy ve vodivé desce

Poprvé je popsal francouzský fyzik L. J. Foucault (1819 – 1868) a nazývají se rovněž *Foucaltovy proudy*. Jejich význačnou vlastností – v souladu s Lenzovým pravidlem – je, že mají takový směr, jež brání změně, která jej vyvolala. Jsou-li vyvolány pohybem vodiče, brzdí jeho pohyb. Proti akční síle $\boldsymbol{F}'$ na obr. 33 působí brzdná síla $\boldsymbol{F}$.

Brzdného účinku vířivých proudů se využívá u elektrických brzd a ke tlumení měřicích přístrojů (pohyblivá část systému je opatřena vodivou destičkou, která se pohybuje v poli permanentního magnetu). Výhodou těchto brzdicích systémů je, že brzdná síla je úměrná rychlosti pohybu, tzn., že při velké rychlosti je velká, při nulové rychlosti nulová. Tím se podstatně liší od tření.

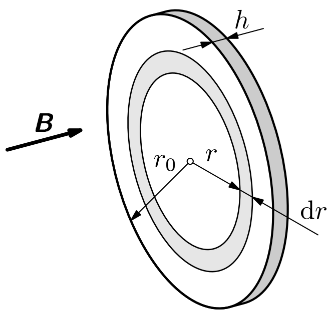
Vířivé proudy vznikají v souladu s podstatou elektromagnetické indukce i v nepohyblivých vodičích, které se nacházejí v proměnném magnetickém poli. Je tomu např. v jádrech transformátorů anebo točivých elektrických strojů (alternátorů, dynam, motorů). V těchto případech provází existenci těchto proudů Jouleovo teplo a tedy ztráty elektromagnetické energie dané zvětšováním vnitřní energie uvažované soustavy. Tyto ztráty se zmenšují zvětšováním elektrického odporu jádra. Toho se dosahuje tím, že jádro se sestavuje ze vzájemně odizolovaných plechů nebo se použije jádro feritové [10].

[10] *Ferity* jsou polovodivé sloučeniny železa a kyslíku nebo i jiných prvků (Cu, Mg, Ni); jsou to feromagnetika ($\mu_r \sim 10^2$ až 10^3) s velkým měrným odporem (10^4 až 10^8 $\Omega\cdot$m). Proto mají malé ztráty pocházející od vířivých proudů, i vysokofrekvenčních (vyjímečně až do 10^{10} Hz).

Příklad 10 – ohřev vířivými proudy

Hliníkový kotouč o poloměru $r_0 = 40{,}0$ mm a tloušťce $h = 1{,}00$ mm vložíme do magnetického pole o indukci $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_\mathrm{m} \cos\omega t$, kde $B_\mathrm{m} = 30{,}0$ mT, $\omega = 100\pi\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ tak, aby jej indukční čáry protínaly kolmo. Vypočtěte:
a) Proud, který se indukuje v kotouči a jeho výkon.
b) Vzrůst teploty kotouče za časový interval $\tau = 240$ s.
Hustota hliníku je $\varrho = 2{,}70 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ měrná tepelná kapacita hliníku je $c = 896\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, konduktivita (měrná elektrická vodivost) hliníku $\gamma = 3{,}70 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}} = konst.$ (závislost γ na teplotě zanedbejte).

Řešení



Obr. 34 K výpočtu vířivých proudů

a) Z kotouče vyjmeme elementární prstenec o poloměru r, tloušťce h a šířce dr. V souladu se vztahem (16) se v něm indukuje vírové elektrické pole o intenzitě

$$E_\mathrm{i} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{r}{2}B_\mathrm{m}\omega\sin\omega t.$$

Podle Ohmova zákona v lokálním tvaru (viz např. [13], str. 10), tj. proudová hustota $\boldsymbol{j} = \gamma\boldsymbol{E}$, kde γ je konduktivita, má proudová hustota na poloměru r velikost

$$j = \gamma\frac{r}{2}B_\mathrm{m}\omega\sin\omega t.$$

Uvážíme-li, že elementární prstenec má obdélníkový průřez o plošném obsahu $\mathrm{d}S = h\mathrm{d}r$, dostaneme pro celkový indukovaný proud v kotouči výraz

$$I = \frac{\gamma B_\mathrm{m}\omega h}{2}\sin\omega t \cdot \int_0^{r_0} r\mathrm{d}r = \frac{\gamma B_\mathrm{m}\omega h r_0^2}{4}\sin\omega t.$$

Amplituda proudu má tedy velikost

$$I_\mathrm{m} = \frac{\gamma B_\mathrm{m}\omega h r_0^2}{4} = 139\ \mathrm{A}.$$

Element výkonu proudu indukovaného na elementárním prstenci určíme ze vztahu

$$\mathrm{d}P = U_\mathrm{i}^2\mathrm{d}G = (2\pi r E_\mathrm{i})^2\mathrm{d}G, \quad \text{kde } \mathrm{d}G = \gamma\frac{h\mathrm{d}r}{2\pi r}$$

je vodivost elementárního prstence. Po dosazení za E_i a integrací přes celý kotouč dostaneme

$$P = \frac{\pi\gamma B_\mathrm{m}^2\omega^2 h}{2}\sin^2\omega t \cdot \int\limits_0^{r_0} r^3\mathrm{d}r = P_\mathrm{m}\sin^2\omega t,$$

kde

$$P_\mathrm{m} = \frac{\pi\gamma B_\mathrm{m}^2\omega^2 h r_0^4}{8} = 330\ \mathrm{W}$$

je největší hodnota, které dosahuje cyklicky proměnný výkon.

b) Protože výkon proudu je periodickou funkcí času, uplatní se při ohřevu kotouče jeho střední hodnota za jednu periodu T. Podle věty o střední hodnotě[11] je

$$\hat{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P_\mathrm{m}\sin^2\omega t = \frac{P_\mathrm{m}}{2}.$$

Práce elektrického proudu v časovém intervalu τ se spotřebuje na vzrůst vnitřní energie kotouče:

$$\hat{P}\tau = cm\Delta\vartheta, \quad \text{kde } m = \pi r_0^2 h\varrho = 1{,}36\cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg}$$

je hmotnost kotouče. Teplota vzroste o

$$\Delta\vartheta = \frac{P_\mathrm{m}\tau}{2cm} = 32{,}6\ \mathrm{K}.$$

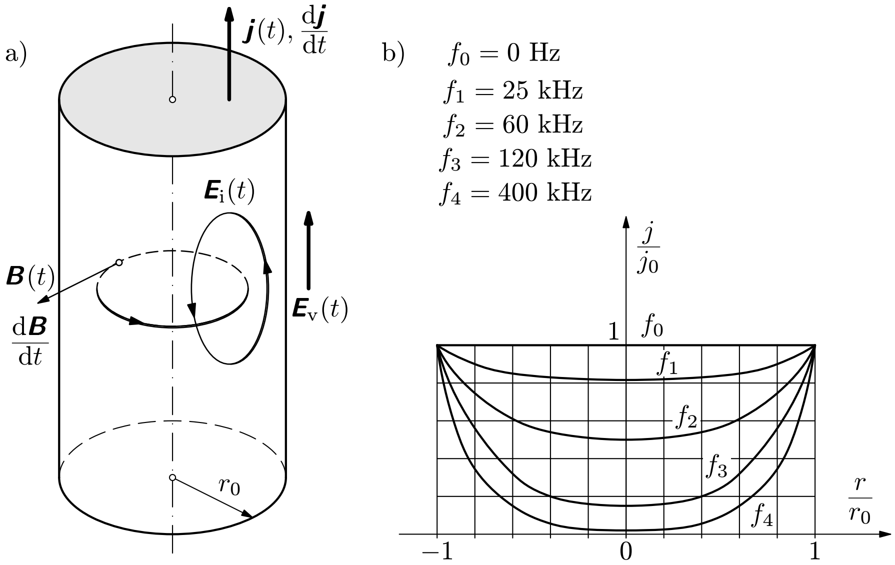
4.4 Skinefekt

Vířivé proudy ve vodičích jsou příčinou důležitého *povrchového jevu*, neboli *skinefektu*[12], který způsobuje omezení průchodu vysokofrekvenčních střídavých proudů vodiči. Významný rozdíl mezi vířivými Foucaltovými proudy a vířivými proudy, které se uplatňují při skinefektu je v tom, že v případě těch druhých postačí proměnné magnetické pole proudu, který tělesem vodiče prochází.

K výkladu skinefektu ve válcovém vodiči o poloměru r_0 si představme situaci naznačenou na obr. 35a). Aby vodičem mohl procházet střídavý proud o proudové hustotě $\boldsymbol{j}(t)$, musíme jej připojit k vnějšímu zdroji elektromotorického napětí, který ve vodiči vyvolá vtištěné elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_\mathrm{v}(t)$. Proměnný elektrický proud pak vyvolá proměnné magnetické pole o časově proměnné indukci $\boldsymbol{B}$, jehož indukční čáry jsou uzavřené kružnice ležící v rovině

[11] S tímto výpočtem se setkáváme při výpočtu efektivní hodnoty proudu a napětí.
[12] skin – angl. slovo pro kůži, slupku

kolmé k podélné ose válce. V důsledku proměnnosti magnetického pole se ve vodiči indukuje vířivé elektrické pole o intenzitě $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$, přičemž siločáry tohoto pole jsou uzavřené křivky ležící v rovinách procházejích podélnou osou válce. Cirkulace indukovaného pole $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ má takový směr, že její směr u povrchu je souhlasný se směrem vtištěného pole $\boldsymbol{E}_{\mathrm{v}}$ a tudíž v oblasti vzdálenější od povrchu (na obr. 35a v blízkosti podélné osy válce) má opačný směr.



Obr. 35 a) K výkladu skinefektu. **b)** Rozložení proudové hustoty po průřezu kruhového válcového vodiče při různých frekvencích proudu (průběh funkcí je řešen pro měděný vodič o poloměru $r_0 = 0{,}6$ mm; pro poloviční poloměr budou uvedené frekvence čtyřnásobné)

Obě elektrická pole se skládají a o toku proudu vodičem rozhoduje výsledné pole $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\mathrm{v}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$. Proudová hustota je podle Ohmova zákona v lokálním tvaru (viz [13], str.10): $\boldsymbol{j} = \gamma \boldsymbol{E}$ přímo úměrná $\boldsymbol{E}$. Proudová hustota bude tedy největší u povrchu vodiče a ve směru k ose bude klesat. Protože velikost $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$ závisí na rychlosti změny magnetického pole, bude se efekt zvýrazňovat se vzrůstající frekvencí procházejícího proudu.

Kvantitativní řešení skinefektu je spojeno s řešením soustavy Maxwellových rovnic. Protože jde o parciální diferenciální rovnice, je toto řešení náročné. Pro zájemce s dobrými základy diferenciálního počtu je však dobře zvládnutelné pro případ vodivého poloprostoru (viz např. [11], str. 180). Řešením tohoto problému můžeme zjistit, že proudová hustota se zmenšuje se vzdáleností od povrchu – klesá podle exponenciální funkce. Měřítkem poklesu $\boldsymbol{j}$ je vzdálenost δ, v níž velikost hustoty klesne e-krát. Jestliže pro měď a zvukovou frekvenci 1000 Hz je $\delta = 2{,}0$ mm, tak pro rozhlasovou frekvenci 300 kHz je $\delta = 0{,}11$ mm a pro televizní frekvenci 300 MHz dokonce jen $\delta = 0{,}0036$ mm.

Řešení skinefektu pro technicky nejběžnější případ, tj. pro kruhový válec, je spojeno s řešením Besselových diferenciálních rovnic, které ovšem nelze vyjádřit v uzavřeném analytickém tvaru. Výsledek numerického řešení pro tento případ je naznačen na obr. 35b).

Existence skinefektu má závažné důsledky pro vedení vysokofrekvenčních proudů. Jestliže u stejnosměrného proudu (a prakticky i u nízkofrekvenčních proudů) se uplatní ve stejné míře všechny elementy průřezu vodiče, tak u vysokofrekvenčních proudů je to jen tenká vrstvička vodiče u jeho povrchu, která se se zvětšující se frekvencí zmenšuje. Proto se pro vedení těchto proudů používají vodiče s relativně velkým povrchem – buď ve formě lanka složeného z velkého množství tenkých izolovaných drátků nebo pro výkonové soustavy (např. výkonové obvody vysílačů) ve formě dutých těles (např. válcových nebo obdélníkových trubek).

Skinefektu se s výhodou využívá k vysokofrekvenčnímu ohřevu pro povrchové kalení exponovaných ocelových součástí (např. klikových hřídelů spalovacích motorů). U těchto součástí požadujeme tvrdý povrch ke zmenšení opotřebení třením a houževnaté jádro ke zvýšení odolnosti proti lomům. Proto se s využitím Jouleova tepla při průchodu vysokofrekvenčního proudu ohřeje na kalicí teplotu jen povrch součásti a při následném prudkém ochlazení v kalicí lázni se zakalí jen povrchová vrstva součásti. Pokud bychom zakalili celý objem součásti, byla by sice součástka tvrdá, ale i křehká, což je málo vhodné pro její dynamické namáhání.

4.5 Betatron

Na principu elektromagnetické indukce sestrojil r. 1941 D. W. Kerst urychlovač elektronů –*betatron.* Z dosavadního výkladu víme, že indukované elektrické pole je vírové a pokud zajistíme osovou symetrii magnetického pole, budou siločáry tohoto pole kružnice. Indukované elektrické pole má podle (14) intenzitu $\boldsymbol{E}$. Ve vodiči toto pole urychluje volné elektrony, avšak jejich pohyb je brzděn odporem vodiče. Budou-li elektrony ve vakuu, jak je tomu u betatronu, nebude jejich pohyb brzděn a mohou dosáhnout velké rychlosti a kinetické energie. Proto se u betatronu elektrony pohybují uvnitř vakuové prstencové trubice s příčným oválným průřezem (obr. 36).

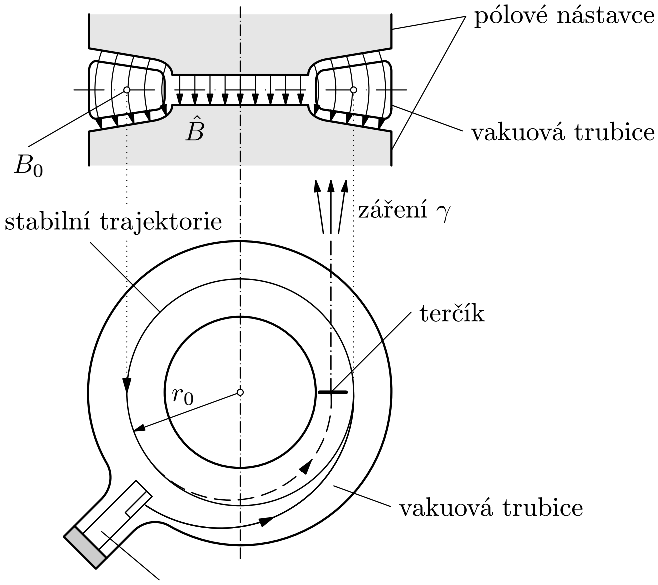
Chceme-li, aby se elektrony pohybovaly po kruhové trajektorii o poloměru r_0, musí být trubice umístěna v magnetickém poli tak, aby indukční čáry ležely kolmo k trajektorii elektronů. Přitom indukce $\boldsymbol{B}_0$ v bodech trajektorie musí být taková, aby dostředivá síla na trajektorii o poloměru r_0 byla rovna síle magnetické, neboli

$$\frac{mv^2}{r_0} = B_0 ev,$$

kde m je okamžitá (relativistická) hmotnost elektronu. Odtud

$$B_0 = \frac{mv}{er_0} = \frac{p}{er_0}, \tag{93}$$

kde p je velikost okamžité relativistické hybnosti elektronu.



Obr. 36 Osový řez betatronem a půdorys jeho trubice. Úpravou pólových nástavců se dosahuje podmínky $\hat{B} = 2B_0$ pro stabilní pohyb elektronů

Elektron je urychlován na kruhové trajektorii o poloměru r_0 indukovaným elektrickým polem, pro jehož intenzitu platí podle (14) vztah

$$2\pi r_0 E = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{94}$$

Toto pole působí na elektron tečnou silou o velikosti

$$F = -eE = \frac{e}{2\pi r_0}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

která v souladu s 2. Newtonovým pohybovým zákonem způsobí v časovém intervalu dt změnu hybnosti

$$\mathrm{d}(mv) = F\mathrm{d}t = \frac{e}{2\pi r_0}\mathrm{d}\Phi. \tag{95}$$

Má-li elektron v betatronu dosáhnout velké rychlosti a energie, musí se v průběhu velkého počtu oběhů udržet na stabilní kruhové trajektorii. V průběhu urychlení vzroste jeho rychlost z malé velikosti $v \approx 0$ na hodnotu v, která se blíží rychlosti světla. Současně tok magnetického pole musí vzrůst z hodnoty $\Phi = 0$ na Φ. Integrací vztahu (95) pak dostaneme

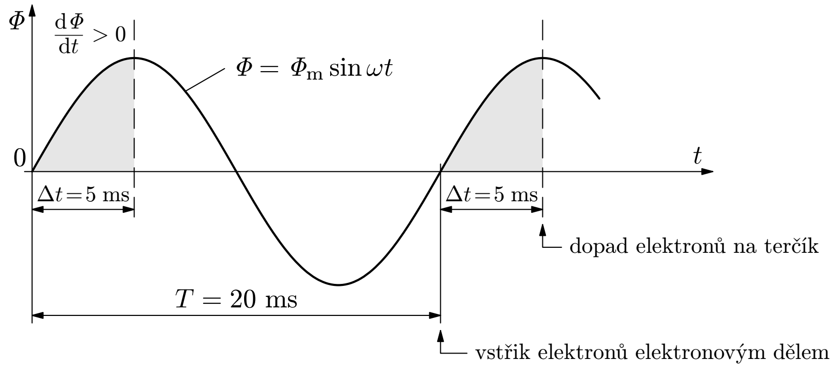
$$p = mv = \frac{e}{2\pi r_0}\Phi. \tag{96}$$

Vyjádříme-li indukční tok Φ plochou kruhu omezeného trajektorií o poloměru r_0, tj. $\Phi = \pi r_0^2 \hat{B}$, můžeme z (96) určit, jaká musí být střední hodnota indukce $\hat{B}$ ve srovnání s indukcí B_0 (93) podél trajektorie:

$$\hat{B} = \frac{2p}{er_0} = 2B_0. \tag{97}$$

Má-li být trajektorie elektronu stabilní, musí tedy být střední hodnota magnetické indukce uvnitř trajektorie rovna dvojnásobku její hodnoty podél trajektorie. Toho se dosahuje vhodným tvarem pólových nástavců elektromagnetů – ve střední části vytvářejí menší magnetickou mezeru (obr. 36).

Požadované proměnnosti magnetického pole podle (94) se dosahuje napájením cívek elektromagnetu střídavým proudem, např. síťové frekvence 50 Hz.



Obr. 37 Průběh toku Φ v betatronu s vyznačením periodicky se opakujících intervalů Δt, ve kterých lze dosáhnout urychlení elektronů

Protože pak časový průběh toku Φ je podle obr. 37, lze pro proces urychlování využít maximálně časový interval $\Delta t = \frac{T}{4}$, např. když je $\Phi > 0$ a $\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} > 0$. V průběhu doby Δt vykoná elektron velké množství oběhů a dosáhne požadované energie. Např. u betatronu československé výroby elektron za 5 ms vykoná $1{,}6 \cdot 10^6$ oběhů a dosáhne energie 15 MeV.

Se vzrůstající energií elektronů v betatronu však vzrůstají ztráty energie způsobené elektromagnetickým zářením, které vydává každá nabitá částice, je-li urychlována. Tyto ztráty rostou se čtvrtou mocninou energie částice. Např. u betatronu na 100 MeV elektron vyzáří na konci urychlovacího intervalu při každém oběhu energii 12 eV, která je malá proti energii 400 eV, kterou při jednom oběhu získává, kdežto u betatronu na 300 MeV elektron získanou energii při jednom oběhu na konci urychlování právě vyzáří a urychlování již je neefektivní.

Urychlené elektrony se na konci urychlovacího intervalu Δt odkloní např. přídavným magnetickým polem (získaným proudovým impulsem ve vinutí elektromagnetu) a dopadají na wolframový terčík uvnitř trubice (viz půdorys betatronu na obr. 36). Při tomto dopadu se prudce zabrzdí, přičemž se generuje γ záření ve velmi širokém spektrálním rozsahu. Bude-li mít elektron kinetickou energii E_k, může vyzářený foton mít energii až $E_\mathrm{k} = h\nu_\mathrm{max}$ a tedy vlnovou délku až

$$\lambda_\mathrm{min} = \frac{c}{\nu_\mathrm{max}} = \frac{hc}{E_\mathrm{k}}, \tag{98}$$

kde $h = 6{,}6261 \cdot 10^{-34}$ J · s je Planckova konstanta. Tak např. u zmíněného betatronu na $E_\mathrm{k} = 15$ MeV je $\lambda_\mathrm{min} = 8{,}3 \cdot 10^{-14}$ m. Toto velmi tvrdé záření γ se užívá pro defektoskopii (např. ke kontrole kvality odlitků velkých rozměrů) anebo k ničení nádorů při léčbě rakoviny.

Příklad 11 – Kerstův betatron

D. W. Kerst sestrojil již r. 1945 velký betatron, který urychloval elektrony na kinetickou energii $E_\mathrm{k} = 100$ MeV, přičemž poloměr rovnovážné trajektorie elektronů byl $r_0 = 1{,}00$ m.
a) Vypočtěte hmotnost, rychlost a hybnost elektronů na konci každého urychlovacího intervalu.
b) Jaká musí být střední hodnota $\hat{B}$ indukce magnetického pole uvnitř trajektorie elektronů a indukce B_0 podél jejich trajektorie na konci urychlovacího intervalu.
c) Určete nejkratší vlnovou délku záření γ, které vznikne po dopadu urychlených elektronů na terčík.

Řešení

a) Z relativistického vztahu pro celkovou energii elektronu

$$mc^2 = m_e c^2 + E_k$$

plyne, že hmotnost elektronu po urychlení je

$$m = m_e + \frac{E_k}{c^2} = m_e\left(1 + \frac{E_k}{m_e c^2}\right) = 196{,}7\, m_e = 1{,}79 \cdot 10^{-28}\ \mathrm{kg}. \tag{99}$$

Ze vztahu pro relativistickou hmotnost dostaneme rychlost na konci urychlení:

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_e}{m}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_k}\right)^2}. \tag{100}$$

Numericky

$$v = 0{,}9999871c = (1 - 1{,}29 \cdot 10^{-5})c = c - 3870\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 2{,}9979 \cdot 10^8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \approx c.$$

Hybnost elektronu po jeho urychlení je

$$p = mv = \left(m_e c + \frac{E_k}{c}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{m_e c^2}{m_e c^2 + E_k}\right)^2} = \frac{E_k}{c}\sqrt{1 + \frac{2m_e c^2}{E_k}}. \tag{101}$$

Pro dané hodnoty $p = 5{,}37 \cdot 10^{-20}\mathrm{kg \cdot m{\cdot}s^{-1}}$.

b) Ze vztahu (97) po dosazení za hybnost (101) dostaneme, že na konci urychlovacího intervalu střední hodnota indukce magnetického pole musí být

$$\hat{B} = \frac{2p}{er_0} = \frac{2E_k}{ecr_0}\sqrt{1 + \frac{2m_e c^2}{E_k}} = 0{,}671\ \mathrm{T}. \tag{102}$$

Pak $B_0 = \dfrac{\hat{B}}{2} = 0{,}335\ \mathrm{T}$.

c) Nejkratší vlnová délka brzdného záření je dána vztahem (98). Po dosazení je $\lambda_{\min} = 1{,}24 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{m}$.

Poznámka

Protože kinetická energie E_k je mnohem větší než klidová energie elektronu $m_e c^2 = 0{,}511\ \mathrm{MeV}$, můžeme u našeho betatronu s vyhovující přesností zjednodušit vztahy (100), (101) a (102) do tvaru, v němž položíme výraz pod odmocninou roven jedné. Pak

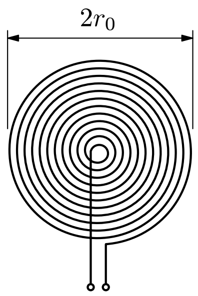
$$v \approx c, \quad p \approx \frac{E_k}{c} = 5{,}34 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{kg \cdot m{\cdot}s^{-1}},$$

$$\hat{B} \approx \frac{2E_k}{ecr_0} = 0{,}667\ \mathrm{T}.$$

5 Úlohy

1. Vinutí ve tvaru Archimédovy spirály

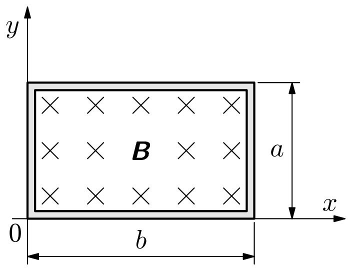
Plochá cívka má na poloměru r_0 celkem N závitů ve tvaru Archimédovy spirály (obr. 38), které jsou hustě vinuty od středu k okraji cívky (cívku lze dobře vytvořit např. na destičce s tištěnými spoji). Cívka se nachází v periodicky proměnném magnetickém poli, jehož indukce se mění podle vztahu $B = B_\mathrm{m} \cos \omega t$ a je kolmá k rovině cívky. Vypočtěte elektromotorické napětí, které se indukuje v cívce.



Obr. 38 Vinutí ve tvaru Archimédovy spirály

2. Cívka v nehomogenním poli

Uvažujme nehomogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}(x,t)$, jejíž velikost je dána funkcí $B = 15x^3t^2$, kde veličiny B, x, t jsou v jednotkách SI. Do pole (obr. 39) umístíme cívku o $N = 24$ obdélníkových závitech o rozměrech $a = 200$ mm, $b = 250$ mm tak, že indukční čáry vstupují kolmo do roviny cívky. Vypočtěte indukované napětí v cívce v čase $t = 0{,}300$ s. Jaký proud bude cívkou procházet při jejím zkratování, má-li odpor $R = 1{,}20\ \Omega$.



Obr. 39 Cívka v nehomogenním poli

3. Řazení odlehlých cívek

Dvě cívky o indukčnostech L_1 a L_2 jsou umístěny daleko od sebe. Jaká bude výsledná indukčnost těchto cívek, spojíme-li je a) do série, b) paralelně.

4. Sériové řazení blízkých cívek

Cívky o indukčnostech L_1, L_2 jsou umístěny blízko sebe tak, že jejich vzájemná indukčnost je M. Jaká bude vlastní indukčnost těchto cívek při jejich zapojení do série tak, že a) závity obou cívek budou vinuty ve stejném směru, b) závity budou vinuty ve vzájemně opačném směru. c) Navrhněte, jak lze z naměřených indukčností L_a, L_b určit vzájemnou indukčnost M spojovaných cívek.

5. Vzájemná indukčnost dvou solenoidů

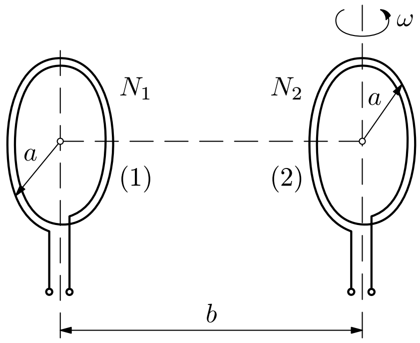
Do solenoidu o délce l, poloměru $r_1 \ll l$ a počtu závitů N_1 je zasunut druhý solenoid stejné délky o poloměru $r_2 < r_1$ a N_2 závitech tak, že osy jsou rovnoběžné. Vypočtěte vzájemnou indukčnost této soustavy cívek a zdůvodněte, proč nezávisí na r_1 a na vzájemné vzdálenosti os solenoidů.

6. Soustava solenoidu a ploché cívky

Na solenoidu délky $l = 400$ mm a průřezu $S = 500$ mm^2 o $N_1 = 1000$ závitech je uprostřed navinuta krátká cívka o $N_2 = 20$ závitech stejného poloměru. Vypočtěte vzájemnou indukčnost soustavy solenoidu a cívky. Jak velké napětí se bude indukovat v cívce, když v solenoidu vzroste proud o $\Delta I_1 = 5{,}0$ A za $\Delta t = 10{,}0$ ms. Jak se veličiny změní, vložíme-li do solenoidu železné jádro o střední permeabilitě $\bar{\mu}_\mathrm{r} \approx 1000$ pro uvažované sycení jádra. Uvažujte, že jádro vyplňuje vnitřní prostor solenoidu.

7. Soustava dvou plochých cívek

Uvažujme soustavu dvou plochých cívek se závity o poloměru a, z nichž cívka (1) má N_1 a cívka (2) N_2 závitů. Roviny cívek jsou rovnoběžné a vzdálené od sebe $b \gg a$ (obr. 40). Permeabilita prostředí $\mu \approx \mu_0$.



Obr. 40 Soustava dvou plochých cívek

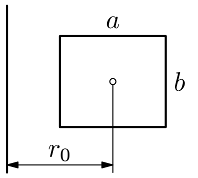
a) Vypočtěte vzájemnou indukčnost soustavy (pro $\omega = 0$).
b) Vypočtěte napětí indukované v cívce (2), bude-li cívkou (1) procházet střídavý proud

$$i_1 = I_\mathrm{m} \cos \omega t.$$

c) Cívkou (1) bude procházet stejnosměrný proud I_m a cívka (2) se bude otáčet úhlovou rychlostí ω. Jaké se bude v ní indukovat napětí?

8. Cívka a přímý vodič

Je dána soustava přímého dlouhého vodiče a rámové cívky o stranách a, b a N závitech. Její střed je ve vzdálenosti r_0, její strana b je rovnoběžná s vodičem a vodič leží v rovině cívky (obr. 41). Prostředím je vzduch.



Obr. 41 Soustava cívky a přímého vodiče

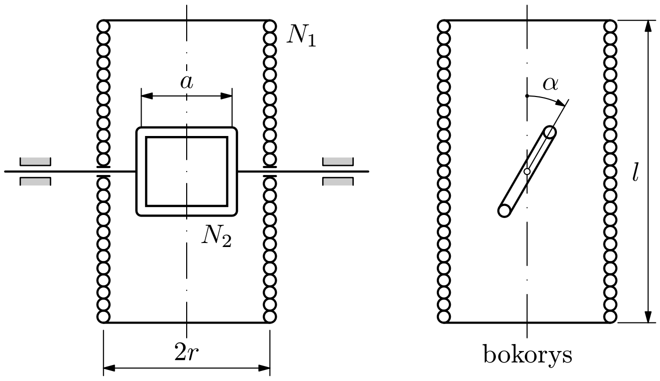
a) Určete vzájemnou indukčnost této soustavy vodičů.
b) Určete napětí, které se bude indukovat v cívce, bude-li přímým vodičem procházet střídavý proud $i = I_\mathrm{m} \cos \omega t$.

9. Soustava solenoidu a otočné cívky

Uvažujme soustavu dvou vzduchových cívek z obr. 42. Jde o solenoid, který má na délce l = 300 mm N_1 = 240 rovnoměrně navinutých závitů o poloměru r. Uvnitř solenoidu kolmo k jeho ose je otočně uložena úzká rámová čtvercová cívka o straně a = 40 mm s počtem N_2 = 100 závitů.

a) Vypočtěte vzájemnou indukčnost M soustavy cívek v závislosti na úhlu α.

b) Solenoidem necháme procházet proud I_1 = 2,0 A a otočnou cívkou budeme z výchozí polohy $\alpha = 0$ rovnoměrně otáčet úhlovou rychlostí $\omega = 60\pi\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Odvoďte výraz pro indukované napětí v otočné cívce a vypočtěte jeho amplitudu.



Obr. 42 Soustava dvou cívek

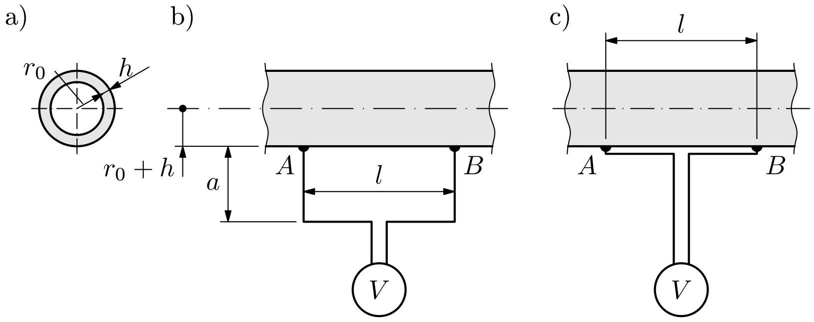
10. Indukce v okolí trubky

Přímým vodičem ve tvaru kruhové trubky (viz obr. 43a) s velmi tenkou stěnou ($h \ll r_0$) prochází střídavý proud $i = I_\mathrm{m} \sin \omega t$. V bodech A, B povrchu vodiče je připojen voltmetr, jehož přívody jsou upraveny

a) podle obr. 43b;

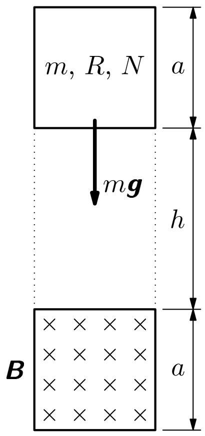
b) podle obr. 43c – zde jdou vodiče těsně podél povrchu vodiče.

Jaké napětí udává voltmetr v prvním a ve druhém případě? Předpokládejme přitom rovnoměrné rozložení proudu v příčném průřezu trubky (trubka je tenká, a proto se výrazně neuplatní vířivé proudy indukované v trubce střídavým proudem). Konduktivita materiálu trubky je γ.



Obr. 43 Experiment s elektromagnetickou indukcí v okolí trubky, jíž prochází střídavý proud

11. Padající cívka



Obr. 44 Situace cívky před pádem

Plochá čtvercová cívka o straně $a = 20$ mm a hmotnosti $m = 2{,}5$ g má $N = 12$ závitů. Přívodní konce cívky jsou zkratovány, elektrický odpor vinutí je $R = 0{,}60\ \Omega$. Cívku umístíme do svislé roviny nad póly magnetu podle obr. 44, kde $h = 300$ mm, přičemž rozměry pólu jsou stejné jako cívky a pole je homogenní. Po uvolnění začne cívka padat volným pádem (odpor prostředí neuvažujte), avšak při průletu magnetickým polem je indukce $\boldsymbol{B}$ nastavena tak, aby cívka dráhu $2a$ prolétla konstantní rychlostí. Určete

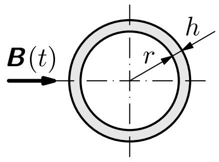
a) jaké napětí U se v cívce indukuje při průletu magnetickým polem a jaký proud I cívkou při tom prochází,

b) jakým výkonem P je vinutí cívky ohříváno při průletu magnetickým polem,

c) jaká musí být indukce $\boldsymbol{B}$, aby podmínky experimentu byly splněny.

12. Vířivé proudy v trubce

Dlouhá tenkostěnná trubka, jejíž průměr je $2(r+h)$, kde r je vnitřní poloměr a h tloušťka stěny (obr. 45), je na koncích vodivě zaslepena.



Obr. 45 Řez trubkou

Trubka je umístěna v homogenním časově proměnném poli o indukci

$$B = B_{\mathrm{m}} \cos \omega t,$$

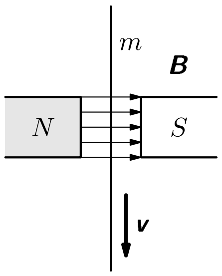
jejíž indukční čáry kolmo protínají osu trubky. Vypočtěte celkový vířivý proud, který se indukuje v trubce. Skinefekt, stejně jako ovlivnění vnějšího pole indukovaným proudem, neuvažujte.

13. Brzdění pásku vířivými proudy

Dlouhý úzký přímý pásek z neferomagnetického kovu necháme volně padat ve svislé orientaci ze stavu klidu mezi póly magnetu s homogenním polem o indukci $\boldsymbol{B}$ (obr. 46). Na pásek, který má hmotnost m, bude kromě tíhové síly působit brzdná síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}$ vyvolaná vířivými proudy. Má velikost $F_{\mathrm{v}} = kBv$, kde k je konstanta a v velikost okamžité rychlosti.

a) Odvoďte funkční závislost rychlosti na čase a stanovte její mezní velikost v_{m}.

b) Odvoďte rovnici $x = x(t)$ pro dráhu pásku.



Obr. 46 Padající pásek mezi póly magnetů

14. Betatron

Betatron má sloužit k produkci elektromagnetického záření o vlnové délce až $\lambda_{\min} = 5{,}0 \cdot 10^{-14}$ m. Elektrony se urychlují na kruhové trajektorii o poloměru $r_0 = 250$ mm. Určete:

a) Výstupní kinetickou energii E_{k} elektronů.

b) Potřebnou velikost indukce magnetického pole podél trajektorie (B_0) a střední hodnotu magnetické indukce ($\hat{B}$) celkového magnetického pole uvnitř trajektorie.

c) Výstupní hmotnost a rychlost elektronu.

15. Teorie balistického galvanometru

Elektrické náboje lze měřit balistickým galvanometrem, jehož zjednodušená teorie je předmětem řešení této úlohy. Základem přístroje je lehká cívka (uvažujte, že má N čtvercových závitů o délce strany a) zavěšená na svislém torzním vlákně tak, že se může natáčet v homogenním magnetickém poli o indukci $\boldsymbol{B}$. V základní poloze je rovina cívky kolmá k $\boldsymbol{B}$. Natočení cívky, resp. zkroucení vlákna, se měří opticky pomocí zrcátka připevněného ke spoji vlákna s cívkou. Vlákno má torzní tuhost k_t a otočný systém moment setrvačnosti J. Tlumení systému je zanedbatelné.

Odvoďte základní rovnici balistického galvanometru $Q = k\beta$, podle níž je (první) největší výchylka β (neboli amplituda kmitů systému) přímo úměrná náboji Q, který v krátkém časovém intervalu τ projde cívkou. Určete balistickou konstantu k za předpokladu, že $\tau \ll T$, kde T je perioda vlastních kmitů systému.

16. Měření magnetického pole

Určete velikost indukce $\boldsymbol{B}$ magnetického pole pomocí hustě navinuté zkušební cívky, která má $N = 20$ závitů, každý o ploše $S = 1{,}50\ \mathrm{cm}^2$. Odpor cívky je $R = 4{,}00\ \Omega$ a rovina cívky svírá s indukcí $\boldsymbol{B}$ úhel $\alpha = 60°$. Cívka je spojena vodiči o zanedbatelném odporu s balistickým galvanometrem o odporu $R_\mathrm{g} = 16{,}0\ \Omega$. Když cívku rychle vysuneme z měřeného pole do místa, kde $B \approx 0$, projde galvanometrem náboj $Q = 2{,}34 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{C}$.

Řešení úloh

1. Element cívky o poloměru r a šířce $\mathrm{d}r$ obsahuje celkem

$$\frac{N}{r_0}\mathrm{d}r \quad \text{závitů o plošném obsahu } \mathrm{d}S = \pi r^2 \frac{N}{r_0}\mathrm{d}r.$$

Indukční tok celou cívkou

$$\Phi = B\frac{\pi N}{r_0}\int_0^{r_0} r^2 \mathrm{d}r = \frac{\pi r_0^2 N}{3} B_\mathrm{m} \cos\omega t.$$

Indukované napětí

$$U_\mathrm{i} = \frac{\pi r_0^2 N B_\mathrm{m} \omega}{3} \sin\omega t.$$

2. $\Phi = \dfrac{15ab^4N}{4}t^2$, $U_\mathrm{i} = \dfrac{15}{2}ab^4Nt = 42{,}2\ \mathrm{mV}$, $I_\mathrm{i} = \dfrac{15ab^4Nt}{2R} = 35{,}2\ \mathrm{mA}$.

3. a) Sériové řazení $L_\mathrm{s} = L_1 + L_2$.

b) Paralelní řazení $\dfrac{1}{L_\mathrm{p}} = \dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}$.

4. a) Závity ve stejném směru: $L_\mathrm{a} = L_1 + L_2 + 2M$.

b) Závity v opačném směru: $L_\mathrm{b} = L_1 + L_2 - 2M$.

c) $M = \dfrac{1}{4}(L_\mathrm{a} - L_\mathrm{b})$.

5. $M = \mu_0 \dfrac{\pi r_2^2 N_1 N_2}{l}$.

Vzájemná indukčnost nezávisí na r_1 proto, že na něm nezávisí indukce pole vnější cívky. Protože toto pole je homogenní v celém objemu vnější cívky, nezávisí M ani na vzdálenosti os cívek, pokud druhá cívka zůstává uvnitř první cívky.

6. $M = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} = 3{,}14 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{H}$,

$|U_\mathrm{i}| = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l}\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = 15{,}7\ \mathrm{mV}$.

Po vložení jádra bude $M' = \bar{\mu}_\mathrm{r} M = 31{,}4\ \mathrm{mH}$, $U_\mathrm{i}' = \bar{\mu}_\mathrm{r} U_\mathrm{i} = 15{,}7\ \mathrm{V}$.

7. Protože $b \gg a$ uvažujeme pole ve všech bodech kruhu o poloměru a stejné jako na ose (srovnejte s příkladem 3 v [13]). Pak

a) $M = \dfrac{\mu_0 \pi a^4 N_1 N_2}{2\sqrt{(b^2+a^2)^3}} \approx \dfrac{\mu_0 \pi a^4 N_1 N_2}{2b^3}$,

b) $u \approx \dfrac{\mu_0 \pi a^4 N_1 N_2 \omega I_\mathrm{m}}{2b^3} \sin \omega t$.

c) Napětí bude stejné jako v případě ad b).

8. Z plochy závitu vyjmeme ve vzdálenosti r od vodiče element – proužek o ploše $b\mathrm{d}r$, určíme přes něj tok magnetického pole od přímého proudovodiče a integrujeme. Pak

a) $M = \dfrac{\mu_0 N b}{2\pi} \ln \dfrac{2r_0 + a}{2r_0 - a}$,

b) $u_\mathrm{i} = \dfrac{\mu_0 N b \omega I_\mathrm{m}}{2\pi} \ln \dfrac{2r_0 + a}{2r_0 - a} \sin \omega t$.

9. a) $M = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 a^2}{l} |\sin \alpha|$,

b) $u_\mathrm{i} = -\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 a^2 I_1 \omega}{l} \cos \omega t$,

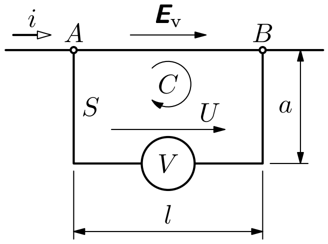
amplituda $U_\mathrm{m} = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 a^2 I_1 \omega}{l} = 23{,}7\ \mathrm{mV}$.

10. Elektrické pole vodivého proudu v trubce má podle Ohmova zákona intenzitu o velikosti

$$E_\mathrm{v} = \frac{I_\mathrm{m} \sin \omega t}{2\pi \gamma r_0 h}.$$

a) Voltmetr naměří napětí U, které vedle napětí $U_\mathrm{v} = E_\mathrm{v} l$ dané proudem v trubce zahrnuje napětí U_i naindukované ve smyčce C přívodních drátů (obr. 47) časově proměnným magnetickým polem Φ proudu v trubce, tj.

$$\Phi = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 l I_\mathrm{m} \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{r_0 + h + a}{r_0 + h}.$$



Obr. 47 K výpočtu napětí v obvodu C

Pro smyčku C platí

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t},$$

neboli (obr. 47)

$$E_\mathrm{v}\cdot l - U = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

Pak

$$U = \frac{lI_\mathrm{m}}{2\pi}\left(\frac{\sin\omega t}{\gamma r_0 h} + \mu_0\omega \ln\frac{r_0+h+a}{r_0+h}\cdot\cos\omega t\right).$$

b) Protože nyní plošný obsah smyčky je $S \to 0$, naměří voltmetr jen napětí

$$U' = U_\mathrm{v} = \frac{lI_\mathrm{m}}{2\pi\gamma r_0 h}\sin\omega t.$$

11. Doba průletu polem $t = \dfrac{2a}{\sqrt{2gh}}$.

a) Protože cívka se podél pole pohybuje rovnoměrně, bude se tok Φ cívkou rovnoměrně zvětšovat z nuly do maxima $\Phi_\mathrm{m} = BNa^2$. Přitom se bude v cívce indukovat napětí U. Když bude cívka opouštět pole, bude se Φ rovnoměrně zmenšovat a indukované napětí bude mít stejnou velikost U, avšak opačnou polaritu. Indukované elektrické pole vykoná práci

$$W = \frac{U^2}{R}\frac{2a}{\sqrt{2gh}}.$$

Protože rychlost cívky se při průletu magnetickým polem nezvětšuje, musí být tato práce rovna práci tíhových sil, tj. $W = 2mga$. Pak

$$U = \sqrt{Rmg}\,\sqrt[4]{2gh} = 189\ \mathrm{mV}. \qquad (103)$$

Indukovaný proud

$$I = \sqrt{\frac{mg}{R}}\,\sqrt[4]{2gh} = 315\ \mathrm{mA}.$$

b) Cívka je ohřívána výkonem indukovaného proudu

$$P = UI = mg\sqrt{2gh} = 59{,}5\ \mathrm{mW},$$

který je zřejmě roven výkonu tíhové síly cívky $P = mgv$, pohybující se rychlostí $v = \sqrt{2gh}$.

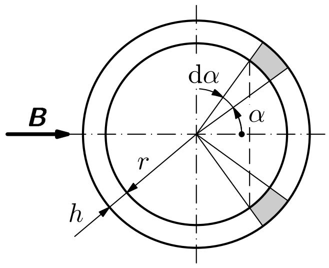
c) Na dráze a, tj. za čas $\Delta t = \dfrac{t}{2}$, vzroste indukční tok o $\Delta\Phi = \Phi_\mathrm{m} = BNa^2$ a indukované napětí

$$|U| = BNa\sqrt{2gh}$$

musí být rovno napětí (103). Pak

$$B = \frac{\sqrt{Rmg}}{aN\sqrt[4]{2gh}} = 0{,}324\ \mathrm{T}.$$

12. Na trubce vytkneme prstencový element s rovinou kolmou k $\boldsymbol{B}$, který tvoří závit nakrátko (obr. 48).



Obr. 48 K řešení vířivých proudů

Prochází jím tok $\Phi = 2lr\sin\alpha \cdot B_\mathrm{m}\cos\omega t$ a indukované pole má intenzitu

$$E_\mathrm{i} = \frac{U_\mathrm{i}}{2(l+2r)} \approx \frac{U_\mathrm{i}}{2l} = \omega r B_\mathrm{m}\sin\alpha \cdot \sin\omega t.$$

Toto pole vyvolá podle Ohmova zákona proud o hustotě $j_\mathrm{i} = \gamma E_\mathrm{i}$. Element proudu je $\mathrm{d}I_\mathrm{i} = j_\mathrm{i} hr\mathrm{d}\alpha$. Celkový vířivý proud v trubce dostaneme integrací pro $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$:

$$I_\mathrm{i} = 2\gamma\omega r^2 h B_\mathrm{m}\sin\omega t.$$

13. a) Pohybová rovnice pro kladný směr dolů je

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kBv.$$

Separací proměnných a integrací pro v od 0 do v o pro t od 0 do t dostaneme

$$v = \frac{mg}{kB}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{kB}{m}t}\right).$$

Mezní stav pohybu nastane, když argument exponenciální funkce poroste nad všechny meze – tedy pro $t \to \infty$. Pak

$$v_{\mathrm{m}} = \frac{mg}{kB}.$$

Tuto rychlost určíme také přímo z pohybové rovnice, jejíž pravou stranu položíme rovnou nule. Pak je nulové zrychlení (brzdná síla se vyrovná tíhové síle).

b) Do funkce $v = v(t)$ dosadíme do levé strany derivaci funkce $x(t)$ podle času. S využitím v_{m} je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_{\mathrm{m}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{g}{v_{\mathrm{m}}} t} \right).$$

Integrací

$$x = \frac{mg}{kB} \left[t + \frac{m}{kB} \left(\mathrm{e}^{-\frac{kB}{m} t} - 1 \right) \right].$$

14. a) $E_{\mathrm{k}} = \dfrac{hc}{\lambda_{\min}} = 3{,}97 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J} = 24{,}8\ \mathrm{MeV} \approx 25\ \mathrm{MeV}.$

b) Podle (102) je $\hat{B} = 0{,}675\ \mathrm{T}$, $B_0 = 0{,}337\ \mathrm{T}$.

c) Podle (99) je $m = 49{,}5 m_{\mathrm{e}} = 4{,}51 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{kg}$,
podle (100) je $v = 0{,}99978c = 2{,}9973 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

15. Při projití náboje Q za čas τ dojde ke změně pohybového stavu cívky podle pohybové rovnice $J\varepsilon = M$, kde úhlové zrychlení je

$$\varepsilon \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{\mathrm{b}} - 0}{\tau} = \frac{\omega_{\mathrm{b}}}{\tau}.$$

Velikost momentu síly je dána působením magnetického pole na cívku, jíž projde proudový impuls $I = \dfrac{Q}{\tau}$. Podle zákonů elektrodynamiky (viz např. [13], str. 28) působí na cívku moment síly

$$M = ISB = \frac{QNa^2B}{\tau}.$$

Pak úhlová rychlost cívky po projití náboje Q za čas τ bude

$$\omega_{\mathrm{b}} = \frac{Na^2B}{J}Q.$$

Poté se soustava chová jako netlumený torzní oscilátor konající vlastní kmity o úhlové frekvenci

$$\Omega = \sqrt{\frac{k_{\mathrm{t}}}{J}},$$

o úhlové výchylce (balistická výchylka β je rovna amplitudě φ_{m}):

$$\varphi = \varphi_{\mathrm{m}} \sin \Omega t = \beta \sin \Omega t$$

a s počáteční úhlovou rychlostí ω_{b}. Musí tedy platit

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \omega_{\mathrm{b}}, \quad \text{neboli } \beta\sqrt{\frac{k_{\mathrm{t}}}{J}} = \frac{Na^2B}{J}Q.$$

Odtud

$$Q = \frac{\sqrt{Jk_{\mathrm{t}}}}{Na^2B}\beta = k\beta,$$

kde balistická konstanta galvanometru je

$$k = \frac{\sqrt{Jk_{\mathrm{t}}}}{Na^2B}.$$

Určuje se zpravidla experimentálně tak, že se galvanometrem nechá projít známý náboj (vybije se kondenzátor: $Q = CU$).

Zájemce o přesné řešení balistického galvanometru odkazuji na práci [16], v níž se uvažuje konečná doba τ ve vztahu k periodě kmitů a nenulové tlumení systému.

16. $B = \dfrac{Q(R + R_{\mathrm{g}})}{NS \sin \alpha} = 1{,}80$ T.

Literatura

[1] Fuka, J., Havelka, B.: *Elektřina a magnetismus.* 3. vydání. Praha, SPN 1979.

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika.* Část 3 – *Elektřina a magnetismus.* Brno – Praha, VUTINUM – PROMETHEUS 2000.

[3] Haňka, L.: *Teorie elektromagnetického pole.* Praha, SNTL/ALFA 1982.

[4] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* Praha, SNTL/ALFA 1966, 1976, 1981.

[5] Hubeňák, J.: *Řešené úlohy z elektřiny a magnetismu.* Edice „SCIO ME MULTA NESCIRE" č. 8. Hradec Králové, MAFY 1997.

[6] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady.* Havlíčkův Brod, Fragment 2000, 2001, 2002.

[7] Irodov, I. E.: *Osnovnyje zakony elektromagnetizma.* Moskva, Vysšaja škola 1983.

[8] Krempaský, J.: *Fyzika.* Bratislava, ALFA/SNTL 1982.

[9] Malíšek, V.: *Co víte o dějinách fyziky.* Praha, HORIZONT 1986.

[10] Vybíral, B.: *Fyzikální pole z hlediska teorie relativity.* Praha, SPN 1976, Bratislava, SPN 1980.

[11] Vybíral, B.: *Teorie elektromagnetického pole.* Pedagogická fakulta v Hradci Králové, Hradec Králové 1984.

[12] Vybíral, B.: *Elektrostatika.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 39. Hradec Králové, MAFY 1999.

[13] Vybíral, B.: *Magnetické pole ve vakuu. (Elektrodynamika 1).* Knihovnička fyzikální olympiády č. 42. Hradec Králové, MAFY 2000.

[14] Vybíral, B.: *Magnetické pole v látce. (Elektrodynamika 2).* Knihovnička fyzikální olympiády č. 49. Hradec Králové, MAFY 2001.

[15] Vybíral, B., Zdeborová, L.: *Pohyb těles s vlivem odporových sil.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 55. Hradec Králové, MAFY 2002.

[16] Vybíral, B.: *K teorii torzních balistických měřicích přístrojů.* Jemná mechanika a optika 8/1988, str. 237 – 239.