ELEKTRICKÉ OBVODY

(Stejnosměrný proud)

Studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová

Obsah

Úvod

Studijní text Elektrické obvody je zaměřen na řešení elektrických obvodů stejnosměrného proudu. Jsou zde popsány různé metody, jak řešit elektrické obvody obsahující rezistory. Popis konkrétní metody je doplněn řešenými úlohami. V textu je také celá řada úloh k řešení, aby si každý mohl sám zkusit, jak pochopil danou metodu, a zda je schopen ji použít k řešení zadaného problému. Úlohy k samostatnému řešení jsou pak doplněny řešením uvedeným v závěru textu.

Při studiu textu se předpokládají základní znalosti o elektrických obvodech stejnosměrného proudu v rozsahu středoškolského učiva. Text volně navazuje na současnou gymnaziální učebnici [5]. V této učebnici je také uvedena metoda řešení elektrických obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů. Při formulaci těchto zákonů používá učebnice popis 2. Kirchhoffova zákona pomocí elektromotorického napětí. Tento přístup se velmi často objevuje ve středoškolských učebnicích fyziky. My však budeme v převážné míře používat místo elektromotorického napětí svorkové napětí, které se ve velké míře využívá v elektrotechnice. Vzájemný vztah mezi těmito napětími je objasněn ve studijním textu.

Cílem studijního textu je seznámení s různými metodami řešení obvodů stejnosměrného proudu a jejich použitím. Vzhledem k omezenému rozsahu je studijní text zaměřen pouze na řešení elektrických obvodů stejnosměrného proudu obsahujících rezistory. Metody v textu použité je možno zobecnit i na obecnější obvody střídavého proudu obsahujících impedance.

1 Rezistory

Rezistory jsou elektrické součástky, jejichž základní vlastností je elektrický odpor.

Podle konstrukčního provedení rozdělujeme rezistory na dvě skupiny:

1. Rezistory se dvěma vývody (pevné a nastavitelné).
2. Rezistory s více než dvěma vývody (rezistory s odbočkami a potenciometry).

Jako nastavitelné rezistory (reostaty) pracují v elektrických obvodech většinou potenciometry nebo potenciometrické trimry, které mají jeden vývod odporové dráhy buď nezapojený, nebo spojený se sběračem.

Z technologického hlediska se rezistory dělí na:

1. Vrstvové (odporový materiál ve formě vrstvy) – dělí se na uhlíkové a metalizované.
2. Drátové (vinuté odporovým drátem) – mají indukčnost, jsou vhodné pouze pro použití v obvodech se stejnosměrným proudem.

1.1 Vlastnosti rezistorů

1. *Jmenovitý odpor rezistoru* – je daný výrobcem, je stanoven ČSN 358010. V souladu s mezinárodně normalizovanými řadami odporů součástek pro elektrotechniku. Nejpoužívanější jsou řady E6, E12, E24.
2. *Tolerance jmenovitého odporu rezistoru* – rezistory jsou zařazeny do skupin, které se označují písmenovým kódem podle ČSN IEC 62 nebo barevným kódem podle ČSN 358013. Většina rezistorů se vyrábí s tolerancemi odporů ±20%, ±10%, ±5%.
3. *Jmenovité zatížení rezistorů* – je výkon, který se smí za určitých podmínek stanovených normou přeměnit v rezistoru na teplo, aniž by teplota jeho povrchu překročila přípustnou velikost. Vrstvové rezistory se vyrábějí pro jmenovité zatížení 0,125 W až 2 W, drátové rezistory 1 W až 100 W.
4. *Provozní zatížení rezistorů* – největší přípustné provozní zatížení rezistoru je určeno největší teplotou povrchu součástky, při které ještě nenastávají trvalé změny jejího odporu ani podstatné zkracování jejího života. Závisí na teplotě okolí, ve kterém rezistor pracuje, a na způsobu odvádění tepla z tělíska.

5. *Největší dovolené napětí* – je udáno výrobcem, po překročení tohoto napětí může dojít k poškození součástky.

6. *Teplotní součinitel odporu rezistoru* T_k – udává největší poměrnou změnu odporu součástky odpovídající vzrůstu teploty o 1 °C v rozsahu teplot, ve kterých je změna odporu vratná. U vrstvových rezistorů má T_k hodnotu řádově (10^{-3} až 10^{-5}) K^{-1}, podle technologie výroby může být kladný nebo záporný.

7. *Šumové napětí* – vzniká vlivem nerovnoměrného pohybu elektronů uvnitř materiálu – mezi vývody rezistoru vznikají malé, časově nepravidelné změny potenciálu. Kdybychom tyto změny zesílili a přivedli jako signál do reproduktoru nebo sluchátek, slyšeli bychom charakteristický zvuk – šum elektrického obvodu. Příčinou šumu je šumové napětí, které má dvě hlavní složky – tepelné šumové napětí a povrchové šumové napětí. Šumové napětí se udává v μV vztažených na 1 V připojeného napětí. U vrstvových rezistorů s grafitovou vrstvou dosahuje šumové napětí přibližně 3μV/V, u metalizovaných rezistorů je menší.

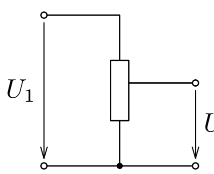
1.2 Rezistory s více než dvěma vývody

Pracují jako napěťové děliče. Lze je rozdělit na dvě skupiny:

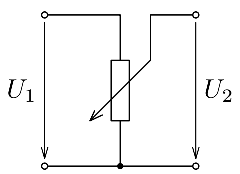
1. Děliče s pevným, popř. nastavitelným dělicím poměrem (rezistory s odbočkou) – obr. 1.

2. Děliče s plynule proměnným dělicím poměrem (potenciometry a odporové trimry) – obr. 2, 3.

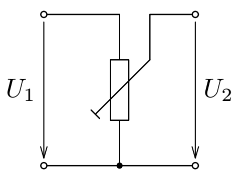
(U všech těchto rezistorů uvedených výše je dělicí poměr $A = \dfrac{U_2}{U_1}$.)



Obr. 1 Rezistor s odbočkou



Obr. 2 Potenciometr

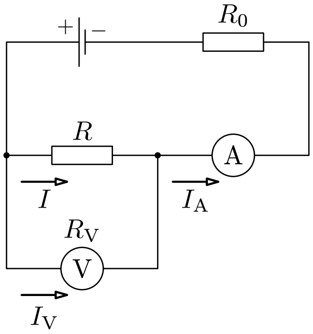


Obr. 3 Odporový trimr

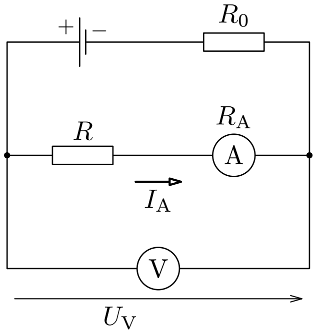
1.3 Měření elektrického odporu rezistoru

a) Metoda přímá

Vychází z definičního vztahu pro elektrický odpor. Napětí na rezistoru a proud procházející rezistorem měříme současně voltmetrem a ampérmetrem v jednom zapojení (viz obr. 4, 5), kde R_0 je ochranný rezistor.



Obr. 4



Obr. 5

Měření v zapojení podle obr. 4 vede ke správnému výsledku, vezmeme-li v úvahu proud I_V, který prochází voltmetrem. Platí

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_V}{I_A - I_V}.$$

Proud I_V určíme pomocí jednoho ze vztahů

$$I_V = \frac{U_V}{R_V}, \qquad I_V = \frac{U_V}{U_{VM}} I_{VM},$$

kde R_V je odpor voltmetru, U_{VM} je zvolený rozsah voltmetru a I_{VM} je proud, který prochází voltmetrem při plné výchylce ukazatele. R_V, I_{VM} jsou uvedeny v návodu dodávaném k přístroji.

Pokud je splněna podmínka $R \ll R_V$, můžeme proud procházející voltmetrem zanedbat a použít přibližný vztah

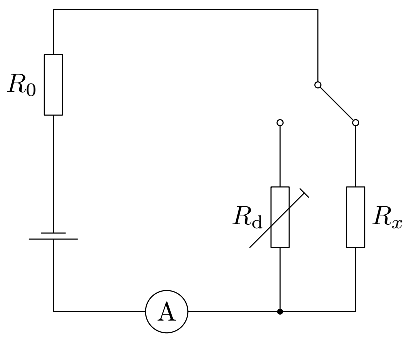
$$R = \frac{U_V}{I_A}.$$

V zapojení podle obr. 4 musíme přihlížet k odporu ampérmetru R_A (viz návod k přístroji). Platí $R = \frac{U_V}{I_A} - R_A$.

Pokud je splněna podmínka $R \gg R_A$, můžeme úbytek napětí na ampérmetru zanedbat a použít vztah $R = \frac{U_V}{I_A}$.

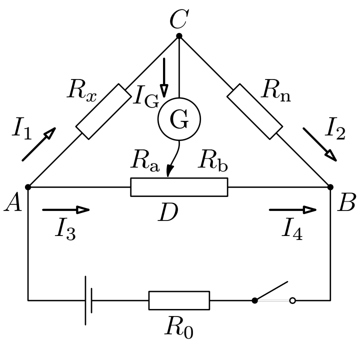
b) Metoda substituční

Do obvodu na obr. 6 nejprve zařadíme neznámý rezistor o odporu R_x a změříme procházející proud. Potom pomocí přepínače nahradíme měřený rezistor odporovou dekádou R_d (sada sériově spojených přesných rezistorů o známých odporech různé velikosti). Měření ukončíme, když v obou případech poteče obvodem stejný proud. Pak platí $R_x = R_\mathrm{d}$.

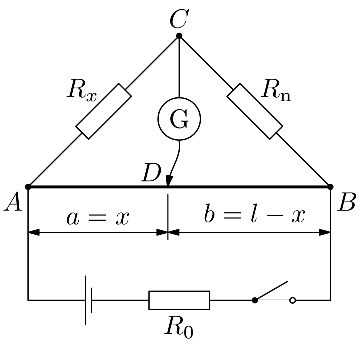


Obr. 6

c) Metoda můstková



Obr. 7



Obr. 8

Základní zapojení *Wheatstoneova můstku* pro měření odporů je na obr. 7, kde R_x je měřený rezistor, R_n je přesný rezistor o známém odporu (odporový normál) a G je galvanometr. Potenciometr mezi uzly A a B je jezdcem rozdělen na dvě části o odporech R_a, R_b. Při měření nastavíme polohu jezdce potenciometru tak, aby proud I_G procházející galvanometrem byl nulový. V takovém případě platí $I_1 = I_2$, $I_3 = I_4$ a v uzlech C, D je stejný potenciál. Napětí $U_\mathrm{AC} = U_\mathrm{AD}$, $U_\mathrm{BC} = U_\mathrm{BD}$.

Po dosazení $R_x I_1 = R_\mathrm{n} I_2$, $R_\mathrm{a} I_3 = R_\mathrm{b} I_4$. Řešením těchto rovnic dostaneme

$$\frac{R_x}{R_\mathrm{n}} = \frac{R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{b}}, \quad \text{z čehož} \quad R_x = R_\mathrm{n} \frac{R_\mathrm{a}}{R_\mathrm{b}}.$$

Potenciometr Wheatstoneova můstku může být realizován jako odporový drát natažený mezi masívními svorkami a opatřený délkovou stupnicí. Drát je pohyblivým jezdcem rozdělen na dva úseky. Jsou-li a, b délky obou úseků drátu, pak

$$R_x = R_\mathrm{n}\frac{a}{b} = R_\mathrm{n}\frac{x}{l-x}.$$

Můstková metoda dává velmi přesné výsledky, pokud se měřený odpor R_x příliš neliší od známého odporu R_n. V takovém případě se jezdec vyváženého můstku nachází blízko středu odporového drátu.

Poznámka

Poslední tvrzení je možno dokázat pomocí diferenciálního počtu. Relativní odchylka

$$\frac{\mathrm{d}R_x}{R_x} = \frac{\dfrac{l-x+x}{(l-x)^2}R\mathrm{d}x}{\dfrac{x}{l-x}R} = \frac{l}{x(l-x)}\mathrm{d}x.$$

Výraz $\dfrac{l}{x(l-x)}$ je minimální, je-li $x(l-x)$ maximální. Výraz $x(l-x)$ nabývá maxima pro $x = \dfrac{l}{2}$.

Z výše uvedeného postupu je vidět, že odpor měříme nejpřesněji, je-li dotyk jezdce přibližně v okolí středu můstku. Prakticky to znamená odhadnout hodnotu odporu R_x a pak volit R_n přibližně stejně veliký. Měření vyžaduje galvanometr s vyšší citlivostí.

d) Měření elektrického odporu ohmmetrem

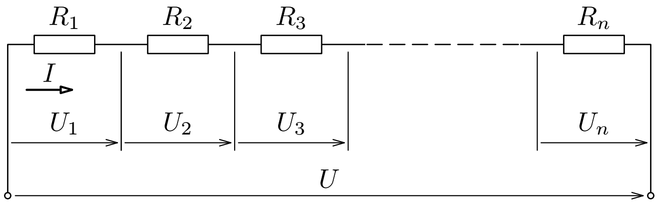
Většina univerzálních laboratorních měřicích přístrojů může být použita i jako ohmmetr, který se skládá z vestavěného zdroje, měřidla o odporu R_M a svorek pro připojení měřeného odporu. Citlivost měřidla je upravena tak, aby při zkratu svorek, kdy $R_x = 0$, nastala plná výchylka ukazatele označená na stupnici nulou. Nulové výchylce ukazatele při rozpojených svorkách odpovídá nekonečně velký odpor. Čím větší odpor připojíme, tím menší je výchylka ukazatele.

Přesnější ohmmetry pracují na principu Wheatstoneova můstku.

U číslicových ohmmetrů je použit operační zesilovač ve funkci převodníku odpor – napětí.

1.4 Spojování rezistorů

a) Spojování za sebou – sériově



Obr. 9

Pro celkové napětí U platí vztah $U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$.
Podle Ohmova zákona platí $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, $U_3 = R_3 I$, $\ldots U_n = R_n I$.
Po dosazení do vztahu pro U a úpravě dostaneme

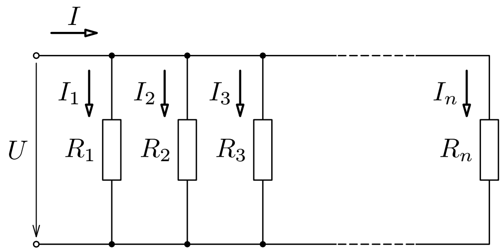
$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n) = IR,$$

kde R je výsledný odpor rezistorů spojených za sebou. Pro výsledný odpor pak platí

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n.$$

Výsledný odpor sériově spojených rezistorů je roven součtu odporů jednotlivých rezistorů.

b) Spojování vedle sebe – paralelně



Obr. 10

Celkový proud I je dán součtem jednotlivých proudů $I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n$.
Podle Ohmova zákona platí $I = \dfrac{U}{R}$, $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$, $I_2 = \dfrac{U}{R_2}$, $I_3 = \dfrac{U}{R_3}$, $\ldots$, $I_n = \dfrac{U}{R_n}$.
Po dosazení dostaneme $\dfrac{U}{R} = \dfrac{U}{R_1} + \dfrac{U}{R_2} + \dfrac{U}{R_3} + \ldots + \dfrac{U}{R_n}$.

Po úpravě můžeme psát $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}$.

Poznámka

Vztah pro paralelní spojování rezistorů je možno přepsat také pomocí vodivosti $G = \frac{1}{R}$. Pak je možno psát $G = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n$.

Výsledná vodivost paralelně spojených rezistorů je určena součtem vodivostí jednotlivých rezistorů.

Příklad 1 – regulace vytápění

Máme dva topné články o odporech R_1 a R_2 ($R_1 > R_2$). Pomocí těchto článků chceme vytápět místnost s možností regulace jejího vytápění. Kromě topných článků máme také k dispozici neomezený počet dvoupolohových spínačů.
a) Určete maximální počet stupňů regulace a naznačte realizaci takové regulace.
b) Určete nejmenší možný počet přepínačů, které je nutno použít k regulaci v úloze a).
c) Nakreslete a zdůvodněte schéma zapojení pro tuto regulaci.

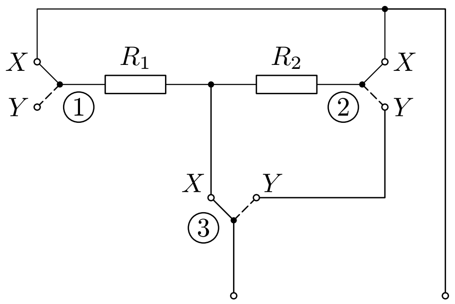
Řešení

a) Regulaci budeme provádět různým zapojením topných článků. Za pomoci spínačů jsou možné čtyři stupně regulace (nesmíme zapomenout ještě na jednu polohu spínačů, a to když budeme chtět topení úplně vypnout):

I – oba topné články jsou spojeny do série, pak $R_{\mathrm{I}} = R_1 + R_2$,
II – je zapojen pouze článek o odporu R_1, pak $R_{\mathrm{II}} = R_1$,
III – je zapojen pouze článek o odporu R_2, pak $R_{\mathrm{III}} = R_2$,
IV – oba topné články jsou spojeny paralelně, pak $R_{\mathrm{IV}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$,
(V – vypnuto). Je zřejmé, že platí $R_{\mathrm{I}} > R_{\mathrm{II}} > R_{\mathrm{III}} > R_{\mathrm{IV}}$.

b) Pro regulaci budeme potřebovat 5 různých poloh – 4 stupně regulace + poloha „vypnuto“. Potřebujeme tedy 3 přepínače, tj. $2^3 = 8$ možností (3 možnosti zůstanou nevyužity).

c) K navrženému schématu zapojení vytvoříme tabulku všech možných poloh přepínačů a tomu příslušejících stupňů regulace.

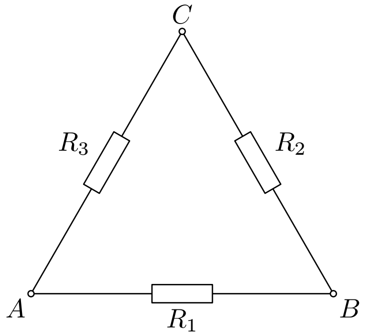


Obr. 11

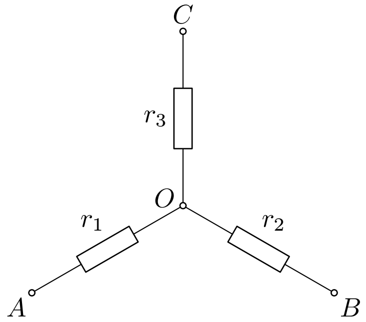
Přepínač			Stupeň
1	2	3	regulace
X	X	X	IV
Y	X	X	III
X	Y	X	I
Y	Y	X	0
X	X	Y	0
Y	X	Y	0
X	Y	Y	II
Y	Y	Y	0

1.5 Transfigurace

Ve schématech elektrických sítí se často setkáváme s případem, že tři spotřebiče jsou spojeny do trojúhelníku, jak je znázorněno na obr. 12. Mnohdy je výhodné nahradit tuto trojici trojicí jiných spotřebičů spojených do hvězdy podle obr. 13, tj. trojúhelník nahradit hvězdou, neboli provést *transfiguraci*.



Obr. 12 Zapojení do trojúhelníku



Obr. 13 Zapojení do hvězdy

Při provádění transfigurace je nutné, aby se hvězda chovala v síti stejně jako původní trojúhelník, tj. aby mezi kteroukoli dvojicí svorek A, B, C byly v obou případech odpory stejně velké.

Z tohoto požadavku vyplývají následující vztahy

$$R_{AB} = r_1 + r_2 = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \tag{1}$$

$$R_{BC} = r_2 + r_3 = \frac{R_2(R_3 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3}, \tag{2}$$

$$R_{CA} = r_3 + r_1 = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{3}$$

Jsou-li odpory v trojúhelníku dány, lze z těchto vztahů snadno vyjádřit odpory ve hvězdě. Nejlepší je všechny tři vztahy sečíst a součty na obou stranách dělit dvěma. Dostaneme pomocný vztah

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}. \tag{4}$$

Když od vztahu (4) postupně odečítáme vztahy (1), (2), (3), dostaneme

$$r_1 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3},$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Pravidlo:

Odpor mezi některým vrcholem a uzlem hvězdy vyjádříme jako zlomek, v jehož čitateli je součin odporů stýkajících se v odpovídajícím vrcholu trojúhelníku a v jehož jmenovateli je součet všech tří odporů tvořících trojúhelník.

Je možné provést i transfiguraci opačnou, tj. vyjádřit odpory R_1, R_2, R_3 pomocí odporů r_1, r_2, r_3. V tomto případě jde zřejmě o transfiguraci hvězdy na trojúhelník. Při výpočtu postupujeme nejlépe takto:

Ze vztahů (1), (2), (3) vyjádříme např. poměry

$$r_2 : r_3 = R_1 : R_3, \tag{5}$$

$$r_1 : r_3 = R_1 : R_2. \tag{6}$$

Jestliže nyní z (5) vyjádříme R_3 a ze (6) R_2 a dosadíme do (1), dostaneme vztah, z něhož po úpravách dostaneme

$$R_1 = r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}.$$

Dosazením do (6) a (5) dostaneme po úpravách

$$R_2 = r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1},$$

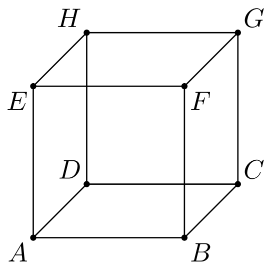
$$R_3 = r_1 + r_3 + \frac{r_1 r_3}{r_2}.$$

Pravidlo:

Odpor mezi kterýmikoli dvěma vrcholy trojúhelníku vyjádříme jako součet odporů vycházejících z odpovídajících bodů hvězdy zvětšený o jejich součin dělený zbývajícím třetím odporem hvězdy.

Příklad 2 – drátěná krychle

Vypočítejte odpor drátěné krychle, jejíž každá hrana má odpor R_0, jestliže zdroj stejnosměrného napětí je připojen a) ke dvěma protějším vrcholům (A a G),
b) ke středům dvou protějších hran,
c) ke dvěma vrcholům tvořícím stěnovou úhlopříčku (A a C),
d) ke dvěma sousedním uzlům (A a E).
Přechodové odpory v uzlech zanedbejte.

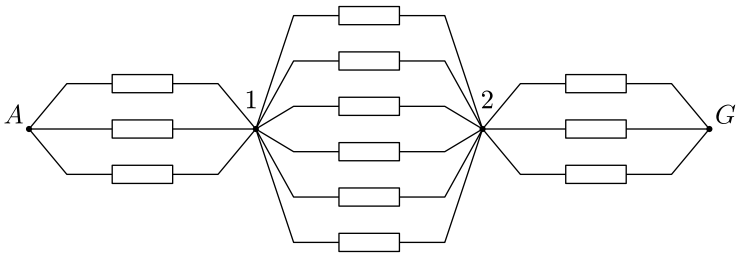


Obr. 14

Řešení

a) I. způsob: Každou ze šesti hran krychle vycházejících z protějších vrcholů A a G je možno nahradit dvojicí paralelních drátů o polovičním průřezu, tedy s odporem $R_0' = 2R_0$. Pak budeme mít v síti mezi body A a G celkem 6 paralelních větví, jedna z nich je $|AE| + |EH| + |HG|$. Její odpor je $R_1 = 2R_0 + R_0 + 2R_0 = 5R_0$. Pro síť pak platí $\dfrac{1}{R} = 6 \cdot \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{6}{5R_0}$, takže $R = \dfrac{5}{6}R_0$.

II. způsob: Proud vstupuje do krychle ve vrcholu A a vystupuje z ní vrcholem G. Vrcholy B, D, E mají stejný potenciál φ_1, vrcholy C, F, H stejný potenciál φ_2. Můžeme tedy nahradit vrcholy B, D, E uzlem 1 o potenciálu φ_1, vrcholy C, F, H druhým uzlem o potenciálu φ_2 (viz obr. 15). Všechny rezistory na obr. 15 mají stejně velký odpor R_0.



Obr. 15

Mezi body A a 1 protéká proud třemi paralelními vodiči o odporu R_0, mezi body 1 a 2 šesti a mezi body 2 a G třemi takovými vodiči. Pro celkový odpor R této sítě tedy dostáváme:

$$R = R_{A1} + R_{12} + R_{2G},$$

$$R = \frac{R_0}{3} + \frac{R_0}{6} + \frac{R_0}{3} = \frac{5}{6}R_0.$$

III. způsob: Proud I vstupující vrcholem A do dané sítě se zde větví na tři proudy o velikosti $\frac{I}{3}$, každý z nich se dále dělí na dva proudy o velikosti $\frac{I}{6}$, do vrcholu G pak vstupují zase tři paralelní proudy o velikosti $\frac{I}{3}$. Pro celkový výkon obvodu pak platí:

$$RI^2 = 3R_0\left(\frac{I}{3}\right)^2 + 6R_0\left(\frac{I}{6}\right)^2 + 3R_0\left(\frac{I}{3}\right)^2 = \frac{5}{6}R_0I^2.$$

Z toho plyne $R = \frac{5}{6}R_0$.

Poznámka

Úlohu a) je možno řešit také pomocí transfigurace, což ale není v tomto případě příliš vhodný postup, i když by vedl také k témuž výsledku.

b) Proud, který vstupuje středem hrany AE, se rozděluje do dvou stejných větví, horní a dolní, které se spojují a vystupují z krychle společně ve středu hrany CG. Musí platit:

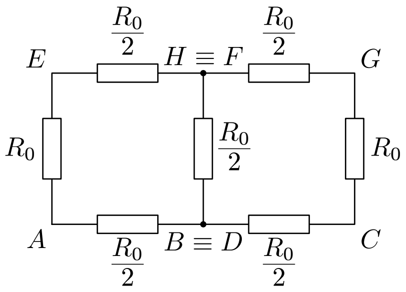
$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_\mathrm{d}} + \frac{1}{R_\mathrm{h}} = \frac{2}{R_\mathrm{h}},$$

protože obě větve mají stejný odpor $R_\mathrm{h} = \frac{R_0}{2} + R' + \frac{R_0}{2}$, kde R' je odpor soustavy horních hran. Pro R' platí:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R_0} = \frac{1}{R_0},$$

z čehož $R' = R_0$. Je tudíž $R_\mathrm{h} = 2R_0$ a celkový odpor krychle pak dostaneme jako paralelní kombinaci těchto odporů R_h, tj. $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R_0} + \frac{1}{2R_0}$, z čehož $R_2 = R_0$.

c) Určíme odpor R_{AC}. Víme, že body B, D mají stejný potenciál a můžeme je tedy spojit. Totéž platí i o bodech F, H. Pak můžeme nakreslit zjednodušené schéma tohoto obvodu:



Obr. 16

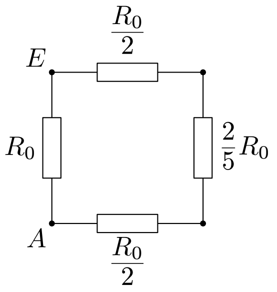
Rezistorem mezi spojenými body $H \equiv F$ a $B \equiv D$ nepoteče proud (všechny popsané body mají stejný potenciál), tento rezistor nemusíme uvažovat, hrany HD a BF vypustíme.

Pak můžeme psát:

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{\frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2}} + \frac{1}{R_0 + \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2} + R_0},$$

a tedy $R_{AC} = \frac{3}{4} R_0$.

d) K výpočtu odporu R_{AE} použijeme poznatků z úlohy c) o spojování bodů se stejným potenciálem. Pro řešení úlohy d) využijeme zjednodušené schéma zapojení z obr. 16 úlohy c), které ještě dále zjednodušíme:



Obr. 17

Nyní již můžeme psát:

$$\frac{1}{R_{AE}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{\frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{2} + \frac{2}{5} R_0},$$

odkud $R_{AE} = \frac{7}{12} R_0$.

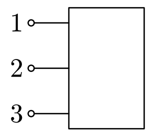
Poznámka

Úlohy c), d) by opět bylo možno řešit pomocí výkonu (viz III. způsob úlohy a)), jen je třeba si dobře uvědomit, jakým způsobem zde dojde k rozdělení proudů a kterými větvemi proud vůbec nepoteče.

Cvičení 1

1. Černá skříňka.

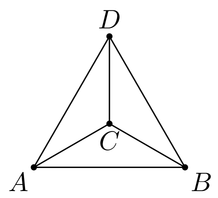
V černé skříňce (obr. 18) jsou zapojeny tři rezistory, a to tak, že platí $R_{12} = 2\ \Omega$, $R_{23} = 2\ \Omega$, $R_{13} = 2\ \Omega$. V černé skříňce jsou pouze rezistory. Určete, jaké rezistory jsou v černé skříňce a jak jsou zapojeny.



Obr. 18

2. Pravidelný čtyřstěn.

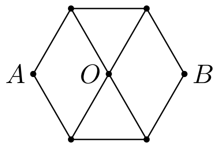
Určete velikost elektrického odporu mezi body A, B drátěného modelu pravidelného čtyřstěnu (viz obr. 19). Odpor jedné hrany čtyřstěnu je R_0, všechny hrany mají stejně velký odpor.



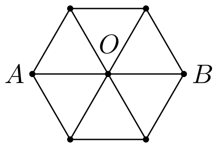
Obr. 19

3. Pravidelný šestiúhelník.

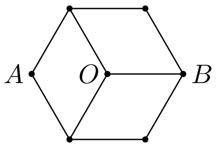
Určete odpory mezi body A, B sítí vytvořených doplněním pravidelného šestiúhelníku. Všechny úseky mezi uzly sítě mají stejně velký odpor R_0. Přechodové odpory v uzlech zanedbejte. Řešte pro všechny tři případy.



Obr. 20



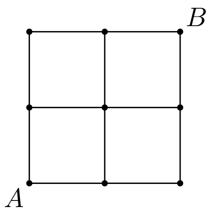
Obr. 21



Obr. 22

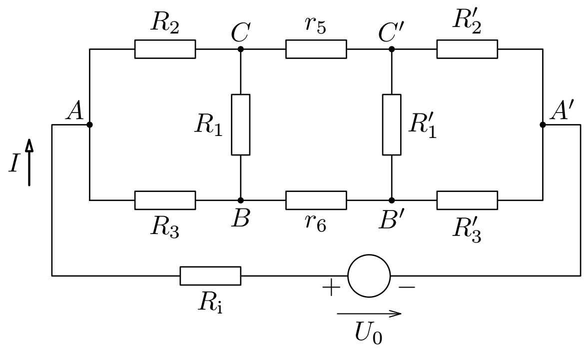
4. Čtvercová síť.

Určete odpor mezi body A, B elektrické sítě znázorněné na obr. 23. Mezi všemi uzly sítě je stejně velký odpor R_0.



Obr. 23

5. V obvodu zakresleném na obr. 24 je dáno: $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R'_1 = 4\ \Omega$, $R'_2 = 10\ \Omega$, $R'_3 = 6\ \Omega$, $r_5 = 0{,}6\ \Omega$, $r_6 = 4{,}3\ \Omega$, $U_0 = 20$ V, $R_\mathrm{i} = 3\ \Omega$. Stanovte proud I protékající nerozvětvenou částí obvodu. Při řešení úlohy použijte vhodným způsobem transfiguraci.

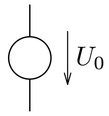


Obr. 24

2 Metody řešení elektrických obvodů

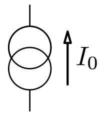
2.1 Skutečné a ideální zdroje elektrické energie

Ideální zdroj napětí (schématická značka viz obr. 25) je takový zdroj napětí, jehož vnitřní odpor je roven nule. Na svorkách takového zdroje je tedy stále stejně velké napětí, které nezávisí na velikosti odebíraného proudu.



Obr. 25

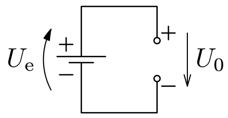
Ideální zdroj proudu (schématická značka viz obr. 26) je takový zdroj proudu, který má nekonečně velký vnitřní odpor. Tento zdroj dodává stále stejně velký proud bez ohledu na velikost odporu připojené zátěže.



Obr. 26

Skutečný zdroj můžeme nahradit ideálním zdrojem stálého napětí U_e [1], k němuž je sériově připojen pomyslný rezistor o odporu R_i, nebo ideálním zdrojem elektrického proudu I_0, k němuž je paralelně připojen pomyslný rezistor o odporu R_i.

Skutečný zdroj napětí je tedy charakterizován svým tzv. elektromotorickým napětím U_e (popř. i svorkovým napětím U_0 – viz obr. 27) a svým vnitřním odporem R_i.



Obr. 27

Závislost napětí na svorkách lineárního zdroje, který dodává spotřebiči o odporu R proud I, je dána vztahem

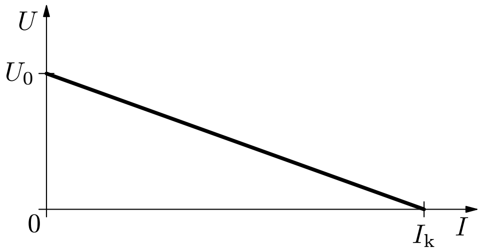
$$U = U_\mathrm{e} - R_\mathrm{i} I, \tag{7}$$

kde $R_\mathrm{i} I$ je úbytek napětí na vnitřním odporu.

Obdobně dle poznámky 1 a obr. 27 bychom mohli obdobný vztah napsat také pomocí napětí U_0: $U = U_0 - R_\mathrm{i} I$.

Kdybychom zjišťovali závislost napětí U na velikosti odebíraného proudu I, dostali bychom tzv. *zatěžovací charakteristiku zdroje* (viz obr. 28).

[1] V elektrotechnice se kromě pojmu elektromotorické napětí zdroje U_e používá pojmu vnitřní (svorkové) napětí zdroje U_0, přičemž platí $U_0 = U_\mathrm{e}$ (viz obr. 27). Po připojení zátěže o odporu R pak můžeme psát $U = U_0 - R_\mathrm{i} I$, kde $I = \dfrac{U_0}{R_\mathrm{i} + R}$ je proud protékající obvodem.



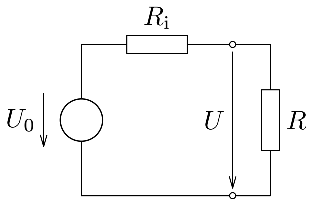
Obr. 28 Zatěžovací charakteristika lineárního zdroje

Při nulovém odebíraném proudu je svorkové napětí nezatíženého zdroje $U_0 = U_\mathrm{e}$. Při zvětšování odběru proudu svorkové napětí zdroje klesá dle vztahu

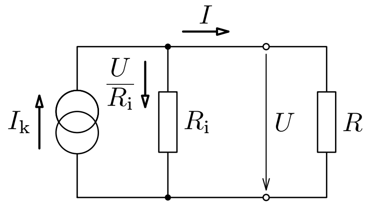
$$U = U_0 - R_\mathrm{i} I.$$

Stejnou zatěžovací charakteristiku můžeme také získat při paralelním zapojení vnitřního odporu k ideálnímu zdroji proudu. Pak bychom dostali (pomocí 1. Kirchhoffova zákona – viz další kapitola) $I = I_\mathrm{k} - \dfrac{U}{R_\mathrm{i}}$, po dosazení ze vztahu $U_0 = I_\mathrm{k} R_\mathrm{i}$ za I_k a úpravě bychom dostali vztah (7).

Vzhledem k charakteru dalšího výkladu, který zasahuje ve větší míře již do oblasti elektrotechniky, budeme používat spíš názvosloví z elektrotechniky, tj. příslušné vztahy budeme formulovat pomocí napětí U_0.



Obr. 29 Náhradní obvod pro zdroj elektrického napětí



Obr. 30 Náhradní obvod pro zdroj elektrického proudu

Skutečné zdroje, u kterých je $R_\mathrm{i} \ll R$, nazýváme napěťově tvrdé (při změnách proudu dochází jen k velmi malým změnám výstupního napětí). Jsou to např. akumulátory nebo stabilizátory napětí.

Skutečné zdroje, u kterých je $R_\mathrm{i} \gg R$, nazýváme napěťově měkké. Patří sem např. stabilizátory proudu nebo elektronické generátory s velkým výstupním odporem.

2.2 Kirchhoffovy zákony

Uzel – místo, kde se stýká dva a více vodičů.
Větev obvodu – dráha mezi dvěma uzly tvořená jedním prvkem nebo několika prvky spojenými za sebou.
Smyčka – uzavřená dráha v části obvodu tvořená větvemi.

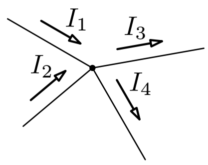
První Kirchhoffův zákon

Vyjadřuje zákon zachování elektrického náboje. Stejnosměrný proud je dán elektrickým nábojem, který projde průřezem vodiče za jednu sekundu. Tento náboj se nemůže ve vodiči nikde nahromadit ani vznikat. Dělí-li se proud do několika větví, musí být součet proudů přicházejících do uzlu roven součtu proudů, které z uzlu odcházejí.

První Kirchhoffův zákon lze vyslovit také takto:
Algebraický součet všech proudů v uzlu se rovná nule, tj. $\sum\limits_{k=1}^{n} I_k = 0$.

V této formulaci je však ještě nutná volba znamének proudů. Zpravidla proudům přicházejícím do uzlu přiřadíme kladná znaménka, odcházejícím z uzlu pak záporná znaménka (viz obr. 31)

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$



Obr. 31

Druhý Kirchhoffův zákon

Je důsledkem zákona zachování energie. Napětí na každém spotřebiči elektrického obvodu je dáno prací potřebnou k přemístění elektrického náboje mezi svorkami spotřebiče. Projde-li náboj po uzavřené dráze, musí být příslušná práce nulová, neboť náboj se vrátil na místo téhož potenciálu.

Druhý Kirchhoffův zákon lze vyslovit také takto[2]:
Algebraický součet všech svorkových napětí zdrojů a všech úbytků napětí na spotřebičích se v uzavřené smyčce rovná nule, tj. $\sum\limits_{k=1}^{n} U_k = 0$.

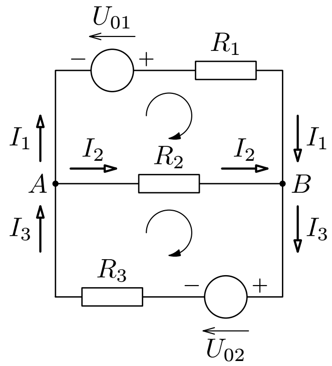
[2] Ve středoškolských učebnicích fyziky, např. v [5] je 2. Kirchhoffův zákon definován pomocí elektromotorického napětí, ze kterého je lépe patrný výše jmenovaný důsledek zákona zachování energie „Součet úbytků napětí na odporech je roven součtu elektromotorických napětí zdrojů.“ V tomto textu budeme používat formulaci 2. Kirchhoffova zákona pomocí svorkového napětí často používaného v elektrotechnice.

Při psaní rovnic podle 2. Kirchhoffova zákona je nutné zachovat následující postup:

1. Vyznačíme šipkami očekávané směry proudů v každé větvi obvodu. U zdrojů zakreslíme šipku pro napětí U_0 od kladné k záporné svorce. Zaoblenou šipkou vyznačíme směr postupu smyčkou.
2. Při psaní rovnice vyjdeme ze zvoleného uzlu a projdeme smyčkou ve zvoleném směru. Součiny RI zapisujeme jako kladné, souhlasí-li směr postupu se směrem šipky u daného proudu. Totéž platí pro zdroje napětí.

Příklad 3 – Kirchhoffovy zákony – rovnice

Sestavte pomocí Kirchhoffových zákonů soustavu rovnic, jejímž vyřešením bychom získali proudy, které protékají jednotlivými rezistory na obr. 32.



Obr. 32

Řešení

K určení tří proudů budeme potřebovat tři rovnice. Použijeme-li 1. Kirchhoffův zákon na oba uzly a 2. Kirchhoffův zákon na tři jednoduché obvody, které síť obsahuje, budeme mít k dispozici celkem 5 rovnic

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0, &(8)\\
-I_1 - I_2 + I_3 &= 0, &(9)\\
R_1I_1 - R_2I_2 - U_{01} &= 0, &(10)\\
R_2I_2 + R_3I_3 + U_{02} &= 0, &(11)\\
R_1I_1 + R_3I_3 - U_{01} + U_{20} &= 0. &(12)
\end{aligned}
$$

Je zřejmé, že dvě z těchto rovnic jsou nadbytečné. Snadno nahlédneme, že rovnice (9) sestavená pro uzel B je shodná s rovnicí (8), která byla sestavena pro uzel A (po vynásobení minus jednou). Má-li síť obecně L uzlů, je jen $(L-1)$ rovnic tohoto typu lineárně nezávislých.

Podobně je tomu i s rovnicemi sestavenými podle 2. Kirchhoffova zákona pro jednoduché obvody. Lineárně nezávislých (a tudíž využitelných) rovnic tohoto typu je jen tolik, kolik je nezávislých jednoduchých obvodů sítě. Jednoduchý obvod je nezávislý, obsahuje-li alespoň jednu větev, která není součástí žádného jiného nezávislého obvodu. Označme počet jednoduchých nezávislých obvodů v síti M a počet všech větví (a tím i počet neznámých proudů) N. Pak obecně platí

$$N = M + (L - 1).$$

Tento vztah určuje, kolik rovnic je třeba sestavit podle 1. Kirchhoffova zákona[3] $(L - 1)$ a kolik podle 2. Kirchhoffova zákona[4] (M).

Počet všech rovnic 1. typu určíme tak, že spočítáme uzly, přičemž jeden vynecháme. Počet rovnic 2. typu M určíme tak, že od počtu všech větví sítě N odečteme $(L - 1)$.

V našem případě je $L = 2$ a $N = 3$, tj. potřebujeme $N - (L - 1) = 2$ rovnice 2. typu (podle 2. KZ). Protože každá rovnice (10), (11), (12) je lineární kombinací zbývajících dvou, je jedno, které dvě zařadíme do sestavované soustavy rovnic. Vezmeme první dvě. Hledané proudy budou řešením této soustavy rovnic

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 &= 0, \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 - U_{01} &= 0, \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 + U_{02} &= 0. \end{aligned}$$

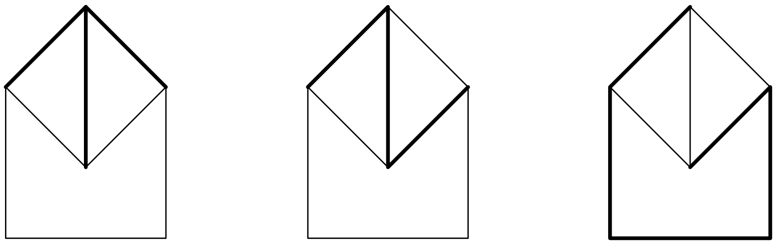
Poznámka – **Metoda úplného stromu**

Při praktickém řešení sítě je užitečné využít při volbě nezávislých jednoduchých obvodů tzv. *metody úplného stromu.*

Úplný strom elektrické sítě je libovolná soustava větví sítě, která spojuje všechny její uzly, přičemž nevytváří žádnou uzavřenou smyčku.

Lze tedy přejít větvemi úplného stromu z libovolného uzlu do kteréhokoliv jiného uzlu, a to jediným možným způsobem. Např. úplným stromem sítě na obr. 33 je kterákoliv ze tří větví. Pro usnadnění praktického postupu je účelné překreslit si nejdříve danou síť zjednodušeně tak, že větve jsou znázorněny úsečkami (bez vyznačení zapojených prvků). Na obr. 33 je znázorněno několik možností (ne všechny) volby úplného stromu určité sítě (úplný strom je tučně vyznačen).

[3] dále budeme psát už jen zkráceně 1. KZ
[4] dále jen zkráceně 2. KZ

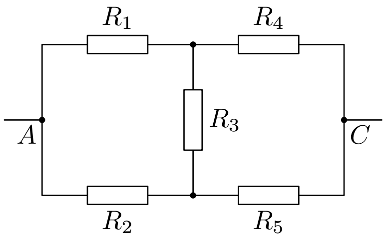


Obr. 33

Při libovolné volbě úplného stromu zůstává vždy stejný počet větví, které k němu nepatří. Počet těchto větví je roven počtu nezávislých jednoduchých obvodů dané sítě. Tyto obvody je účelné volit tak, že větev nepatřící k úplnému stromu doplníme větvemi úplného stromu. Vznikne tak právě M nezávislých jednoduchých obvodů dané sítě.

Příklad 4 – výsledný odpor sítě

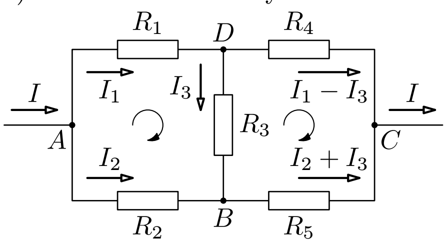
Stanovte výsledný odpor mezi uzly A a C (viz obr. 34), jsou-li dány odpory všech rezistorů: $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 7\ \Omega$, $R_5 = 3\ \Omega$. Řešte pomocí
a) Kirchhoffových zákonů,
b) přeměny trojúhelníku na hvězdu.



Obr. 34

Řešení

a) Pomocí Kirchhoffových zákonů



Obr. 35

Uzel A: $I = I_1 + I_2$,
Smyčka ADB:
$R_1I_1 + R_3I_3 - R_2I_2 = 0$,
Smyčka DCB:
$R_4(I_1 - I_3) - R_5(I_2 + I_3) - R_3I_3 = 0$.

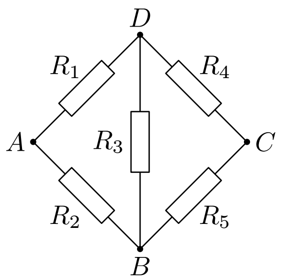
Po dosazení hodnot odporů:
$6I_1 - 4I_2 = -5I_3$,
$7I_1 - 3I_2 = 15I_3$.

Řešením této soustavy obdržíme: $I_1 = \dfrac{75I_3}{10}$, $I_2 = \dfrac{125I_3}{10}$. Celkový proud je tedy $I = I_1 + I_2 = 20I_3$.

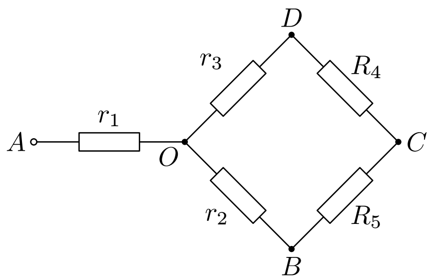
Výpočet napětí mezi body A, C:
$U_{AC} = U_{AD} + U_{DC} = R_1I_1 + R_4(I_1 - I_3) = 90{,}5I_3$.

Výsledný odpor je $R = \dfrac{U_{AC}}{I} = \dfrac{90{,}5I_3}{20I_3} = 4{,}525\ \Omega$.

b) Pomocí transfigurace – trojúhelník na hvězdu.
Obr. 34 nejprve překreslíme na obr. 36, potom dále na obr. 37.



Obr. 36



Obr. 37

Užitím vztahů pro transfiguraci obdržíme:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} = \frac{24}{15}\ \Omega = 1{,}60\ \Omega,\\
r_2 &= \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} = \frac{20}{15}\ \Omega = \frac{4}{3}\ \Omega,\\
r_3 &= \frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3} = \frac{30}{15}\ \Omega = 2{,}00\ \Omega.
\end{aligned}
$$

Odpor mezi body O, C se nyní určí jako paralelní řazení rezistorů $r_3 + R_4$ a $r_2 + R_5$, tj.

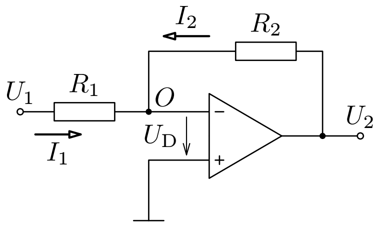
$$\frac{1}{R_{OC}} = \frac{1}{r_3 + R_4} + \frac{1}{r_2 + R_5} = \frac{40}{117},$$

takže $R_{OC} = 2{,}925\ \Omega$. Výsledný odpor celého zapojení se určí

$$R = R_{AO} + R_{OC} = r_1 + R_{OC} = 4{,}525\ \Omega.$$

Příklad 5 – DA převodník

Na obr. 38 je znázorněn invertující operační zesilovač. Protože vstupní diferenciální napětí U_D je rovno virtuální nule a napětí neinvertujícího vstupu je nulové, bude napětí invertujícího vstupu také rovno nule. Zesilovač napětí mezi oběma vstupy zesílí nekonečněkrát a vstupní odpor zesilovače je nekonečně velký. Pak součet proudů na každém vstupu je nulový a rozdíl napětí mezi vstupy $u_- - u_+ = \frac{u_2}{\infty} = 0$.[5]



Obr. 38

Platí $I_2 = \frac{U_2}{R_2}$, $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$.

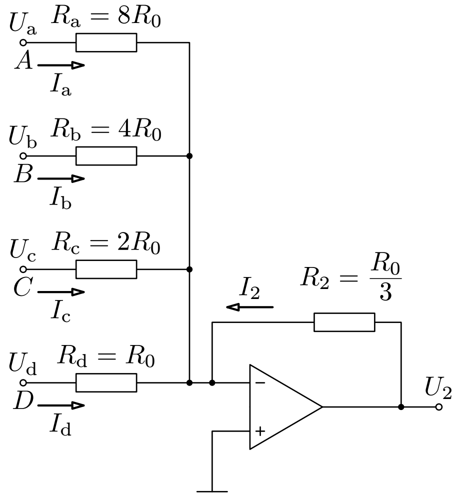
Napíšeme 1. KZ pro uzel O:
$I_1 + I_2 = 0$.

Po dosazení dostaneme
$U_2 = -\frac{R_2}{R_1} U_1$.

Úpravou výše uvedeného schématu je možné vytvořit DA převodník. Ukážeme si, jak vytvořit takový čtyřbitový DA převodník (v praxi se používají osmibitové, které ale pracují na stejném principu). Čtyřbitový DA převodník může být realizován pomocí schématu na obr. 39.

Pomocí Kirchhoffových zákonů vyjádřete

$$U_2 = U_2(U_a, U_b, U_c, U_d).$$



Obr. 39

Řešení

Z 1. KZ plyne:

$$I_a + I_b + I_c + I_d + I_2 = 0, \tag{13}$$

[5]Podrobněji jsou funkce operačních zesilovačů popsány v [10].

potom

$$\frac{U_\mathrm{a}}{8R_0}+\frac{U_\mathrm{b}}{4R_0}+\frac{U_\mathrm{c}}{2R_0}+\frac{U_\mathrm{d}}{R_0}+\frac{U_2}{R_2}=0, \tag{14}$$

z čehož

$$U_2=-R_2\left(\frac{U_\mathrm{d}}{R_0}+\frac{U_\mathrm{c}}{2R_0}+\frac{U_\mathrm{b}}{4R_0}+\frac{U_\mathrm{a}}{8R_0}\right).$$

Po dosazení za $R_2=\dfrac{R_0}{3}$ a úpravě dostaneme

$$U_2=-\frac{1}{24}(8U_\mathrm{d}+4U_\mathrm{c}+2U_\mathrm{b}+U_\mathrm{a}).$$

Poznámka

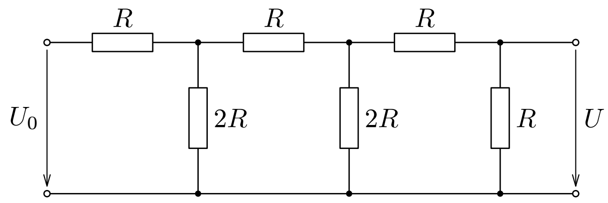
Zavedením $U_\mathrm{a}=AU_\mathrm{H}$, $U_\mathrm{b}=BU_\mathrm{H}$, $U_\mathrm{c}=CU_\mathrm{H}$, $U_\mathrm{d}=DU_\mathrm{H}$ dostaneme

$$U_2=-\frac{U_\mathrm{H}}{24}(8D+4C+2B+A),$$

kde U_H je napětí logických vstupů v horní úrovni (zpravidla $U_\mathrm{H}=0{,}1$ V, ale např. v TTL obvodech $U_\mathrm{H}\doteq 3{,}5$ V), A, B, C, $D\in\{0,1\}$ jsou logické proměnné.

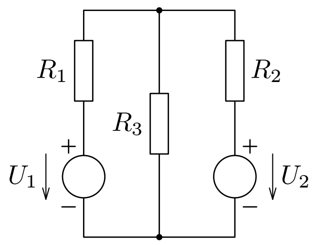
Cvičení 2

1. Pomocí Kirchhoffových zákonů určete velikost napětí U elektrického obvodu na obr. 40.



Obr. 40

2. Kirchhoffovy zákony.



Obr. 41

a) Vypočtěte proudy protékající rezistory R_1, R_2, R_3 v obvodu na obr. 41.
b) Jak se změní hodnoty proudů v obvodu, jestliže u zdroje U_2 zaměníme polaritu?
c) Jaká by musela být velikost odporu u rezistoru R_3, aby rezistory R_1 a R_2 protékal stejně velký proud?
Řešte pro hodnoty $R_1 = 1\ \Omega$; $R_2 = 1{,}5\ \Omega$; $R_3 = 2\ \Omega$; $U_1 = 7$ V; $U_2 = 9$ V.

Metoda řešení elektrických obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů se nejeví vždy jako výhodná – v případě složitějších elektrických obvodů musíme řešit soustavy rovnic s vyšším počtem neznámých. Z tohoto důvodu se postupně rozšířilo i použití dalších metod, které si dále ukážeme.

2.3 Princip superpozice

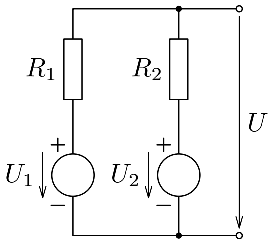
V elektrické síti sestavené z *lineárních* zdrojů a *lineárních* spotřebičů můžeme uvažovat působení každého zdroje samostatně. Výsledné proudy protékajícími jednotlivými větvemi, popř. napětí na těchto větvích a jejich prvcích jsou algebraickými součty dílčích proudů a napětí vyvolaných jednotlivými zdroji, přičemž ostatní zdroje jsou vyřazeny (tj. skutečné zdroje jsou nahrazeny svými vnitřními odpory, ideální zdroje napětí jsou nahrazeny zkraty a ideální zdroje proudu jsou odpojeny).

Postup při řešení obvodu metodou lineární superpozice

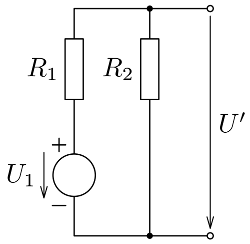
1. Vyznačíme polaritu jednotlivých zdrojů
2. Vypočteme napětí nebo proud na uvažovaném prvku při působení jednoho zdroje, při ostatních zdrojích napětí nahrazených zkratem a vyřazených zdrojích proudu.
3. To provedeme postupně pro každý zdroj.
4. Výsledné napětí nebo proud na uvažovaném prvku jsou pak dány algebraickým součtem všech dílčích napětí nebo proudů.

Příklad 6 – princip superpozice

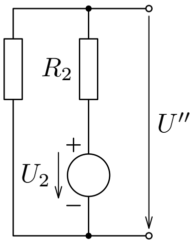
V obvodu zapojeném podle obr. 42 vypočtěte napětí U na výstupních svorkách. Napětí zdrojů jsou $U_1 = 20$ V, $U_2 = 40$ V, odpory rezistorů jsou $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$.



Obr. 42



Obr. 43



Obr. 44

Řešení

Napětí na výstupních svorkách stanovíme jako algebraický součet napětí U' vyvolaného zdrojem U_1 při zkratovaném zdroji napětí U_2 (viz obr. 43) a napětí U'' vyvolaného zdrojem U_2 při zkratovaném zdroji napětí U_1 (viz obr. 44).

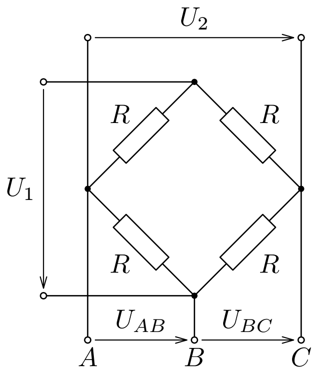
Potom $U' = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} U_1$, $U'' = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} U_2$.

Výsledné napětí na výstupních svorkách $U = U' + U'' = \dfrac{R_2 U_1 + R_1 U_2}{R_1 + R_2}$.

Pro dané hodnoty $U = 32$ V.

Příklad 7 – princip stereofonního vysílání

Na obr. 45 je nakreslen elektrický obvod se dvěma zdroji napětí U_1, U_2 a čtyřmi rezistory o stejném elektrickém odporu R. Určete napětí U_{AB} a U_{BC}.



Obr. 45

Řešení

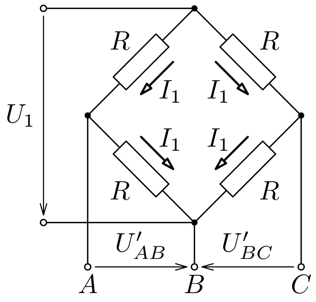
Úlohu vyřešíme užitím principu superpozice.

1. Předpokládáme, že rezistory jsou připojeny pouze ke zdroji napětí U_1. Protože všechny rezistory mají stejný odpor R, poteče jimi také stejně velký proud I_1.

Platí $I_1 = \dfrac{U_1}{2R}$.

Potom

$$U'_{AB} = RI_1 = \frac{U_1}{2},$$
$$U'_{BC} = -RI_1 = -\frac{U_1}{2}.$$



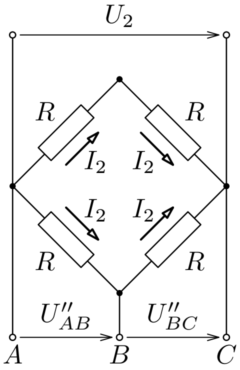
Obr. 46

2. Nyní budeme uvažovat, že rezistory jsou připojeny pouze ke zdroji napětí U_2. Opět všemi rezistory poteče stejně velký proud I_2.

Platí $I_2 = \dfrac{U_2}{2R}$.

Potom

$$U''_{AB} = RI_2 = \frac{U_2}{2},$$
$$U''_{BC} = RI_2 = \frac{U_2}{2}.$$



Obr. 47

3. Budou-li napětí U_1, U_2 působit současně, pak podle principu superpozice bude platit:

$$U_{AB} = U'_{AB} + U''_{AB} = \frac{U_1 + U_2}{2},$$

$$U_{BC} = U'_{BC} + U''_{BC} = \frac{U_2 - U_1}{2}.$$

Poznámky

1. Výše uvedený obvod představuje zapojení, které umožňuje získat součet a rozdíl dvou napětí (resp. polovinu součtu a rozdílu napětí). Zdroje napětí U_1 a U_2 se nijak neovlivňují.

2. Tento princip se využívá u stereofonního rozhlasového vysílání, které je realizováno tím způsobem, že se zvlášť snímá levý (L) a pravý (P) kanál. Vysílané signály jsou

$$U_{\mathrm{M}} = \frac{1}{2}U_{\mathrm{L}} + \frac{1}{2}U_{\mathrm{P}},$$

$$U_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}U_{\mathrm{L}} - \frac{1}{2}U_{\mathrm{P}}.$$

Signál U_{M} je zpracováván monofonními přijímači. Pokud signál zpracovávají stereofonní přijímače, zpracovává se signál U_{M} i U_{S}, a to tak, že se vytvoří jejich součet a rozdíl.

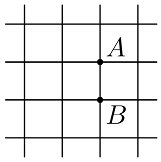
Výsledné signály pak jsou

$$U_{\mathrm{M}} + U_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}(U_{\mathrm{L}} + U_{\mathrm{P}}) + \frac{1}{2}(U_{\mathrm{L}} - U_{\mathrm{P}}) = U_{\mathrm{L}},$$

$$U_{\mathrm{M}} - U_{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}(U_{\mathrm{L}} + U_{\mathrm{P}}) - \frac{1}{2}(U_{\mathrm{L}} - U_{\mathrm{P}}) = U_{\mathrm{P}}.$$

Příklad 8 – nekonečně rozlehlá čtvercová síť

Určete elektrický odpor R mezi body A a B nekonečně rozlehlé čtvercové sítě (viz obr. 48). Jednotlivé úsečky tvořící síť mají odpor R_0.

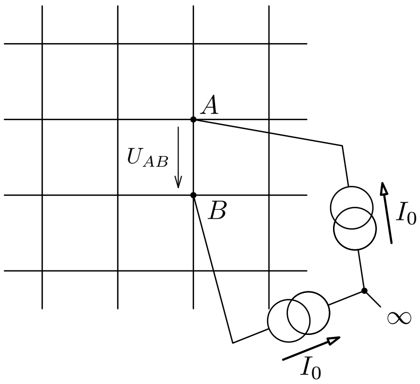


Obr. 48

Řešení

Mezi uzly A, B zapojíme dva do série spojené zdroje stejnosměrného proudu I_0. Společný uzel obou zdrojů pak spojíme s „nekonečnem“ (viz obr. 49).

1. nyní zdroj spojený s uzlem B odpojíme. Proud I_0 se rozdělí do 4 větví, každou větví bude protékat (z důvodů symetrie) stejně velký proud $\frac{I_0}{4}$.



Obr. 49

2. Potom odpojíme zdroj spojený s uzlem A. Proud I_0 se opět (z důvodů symetrie) rozdělí do 4 větví, každou větví bude opět protékat proud $\frac{I_0}{4}$.

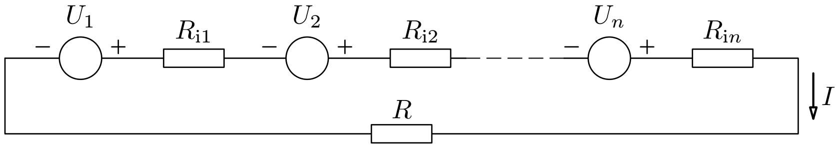
Po zapojení obou zdrojů podle principu superpozice teče mezi body A, B proud $I = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} = \frac{I_0}{2}$.

Napětí mezi uzly A, B pak je $U_{AB} = R_0 \frac{I_0}{2} = RI_0$. Z tohoto vztahu dostaneme, že odpor mezi body A, B je $R = \frac{R_0}{2}$.

2.4 Spojování zdrojů

Zkusme nyní principu superpozice použít při spojování (lineárních) zdrojů. Uvažujme n zdrojů o napětích U_1, U_2, …, U_n a vnitřních odporech R_{i1}, R_{i2}, …, R_{in}. Tyto zdroje jsou zapojeny a) sériově, b) paralelně ke spotřebiči o odporu R.

a) Sériové spojení zdrojů



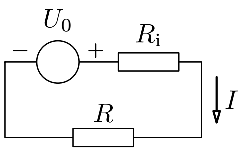
Obr. 50

Podle principu superpozice budeme uvažovat působení každého zdroje samostatně, tj. jeden zdroj vždy necháme, ostatní nahradíme zkraty, výsledný proud pak sečteme. Dostaneme

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{U_1}{R + R_{i1} + R_{i2} + \cdots + R_{in}} = \frac{U_1}{R + \sum\limits_{j=1}^{n} R_{ij}}, \\
I_2 &= \frac{U_2}{R + \sum\limits_{j=1}^{n} R_{ij}}, \\
&\vdots \\
I_n &= \frac{U_n}{R + \sum\limits_{j=1}^{n} R_{ij}}.
\end{aligned}
$$

Výsledný proud je pak $I = \sum\limits_{j=1}^{n} I_j = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} U_j}{R + \sum\limits_{j=1}^{n} R_{ij}}$.

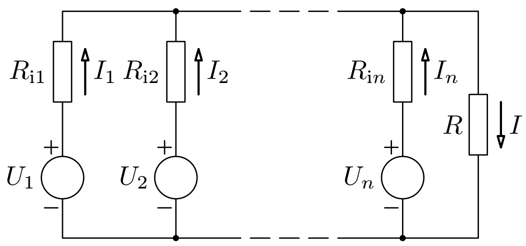
Z výsledků je zřejmé, že tyto zdroje můžeme nahradit zdrojem jediným o napětí $U_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} U_j$ a vnitřním odporem $R_\mathrm{i} = \sum\limits_{j=1}^{n} R_{\mathrm{i}j}$ (viz obr. 51).



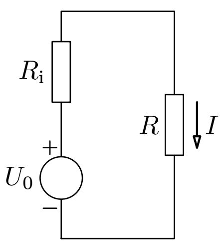
Obr. 51

Pak můžeme psát $I = \dfrac{U_0}{R + R_\mathrm{i}}$.

b) Paralelní spojení zdrojů – Millmanova poučka



Obr. 52



Obr. 53

Užijeme principu superpozice a Kirchhoffovy zákony.

Pomocí Kirchhoffových zákonů určíme dílčí proudy od jednotlivých zdrojů, výsledný proud protékající spotřebičem je pak dán součtem těchto proudů. Dostáváme

$$R_{\mathrm{i}1} I_1 + RI = U_1,\ \text{odkud}\ I_1 = \frac{U_1}{R_{\mathrm{i}1}} - \frac{R}{R_{\mathrm{i}1}} I,$$
$$R_{\mathrm{i}2} I_2 + RI = U_2,\ \text{odkud}\ I_2 = \frac{U_2}{R_{\mathrm{i}2}} - \frac{R}{R_{\mathrm{i}2}} I,$$
$$\vdots$$
$$R_{\mathrm{i}n} I_n + RI = U_n,\ \text{odkud}\ I_n = \frac{U_n}{R_{\mathrm{i}n}} - \frac{R}{R_{\mathrm{i}n}} I.$$

Po sečtení těchto rovnic pro proudy dostaneme

$$I = \sum_{j=1}^{n} I_j = \sum_{j=1}^{n} U_j \frac{1}{R_{\mathrm{i}j}} - R \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_{\mathrm{i}j}} I.$$

Tuto rovnici upravíme užitím vztahu $G_{\mathrm{i}j} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{i}j}}$, kde $G_{\mathrm{i}j}$ jsou vnitřní vodivosti zdrojů. Po úpravě a vyjádření proudu I dostaneme

$$I = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} U_j G_{\mathrm{i}j}}{1 + R \sum\limits_{j=1}^{n} G_{\mathrm{i}j}} = \frac{\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n} U_j G_{\mathrm{i}j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} G_{\mathrm{i}j}}}{\dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} G_{\mathrm{i}j}} + R}.$$

Označíme-li

$$U_0 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} U_j G_{\mathrm{i}j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} G_{\mathrm{i}j}}, \tag{15}$$

$$R_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} G_{\mathrm{i}j}}, \tag{16}$$

pak

$$I = \frac{U_0}{R + R_{\mathrm{i}}}. \tag{17}$$

Z výsledku je zřejmé, že tyto paralelní zdroje můžeme nahradit zdrojem jediným o napětí U_0 daným vztahem (15) a vnitřním odporu R_{i} daným vztahem (16) – viz obr. 52, 53. Proud I protékající spotřebičem o odporu R bude pak dán vztahem (17).

V praxi se paralelně spojují jen zdroje se stejným elektromotorickým napětím, uvažte proč!

Příklad 9 – spojování galvanických článků

Zapojíme-li n galvanických článků (U_0, R_{i}) za sebou, prochází spotřebičem o odporu R proud I_1. Zapojíme-li tyto články vedle sebe, prochází spotřebičem o odporu R proud I_2.
a) Jakou velký odpor R musí mít spotřebič, aby $I_1 = I_2$?
b) Jaký musí být vztah mezi odpory R, R_{i}, aby byla splněna podmínka $I_1 > I_2$?

Řešení

a) Podle vztahů pro sériové zapojení zdrojů můžeme psát $I_1 = \dfrac{nU_0}{R + nR_{\mathrm{i}}}$.

Podle Millmanovy poučky pro paralelní spojování zdrojů můžeme psát

$$I_2 = \frac{U_0}{R + \dfrac{R_\mathrm{i}}{n}} = \frac{nU_0}{nR + R_\mathrm{i}}.$$

Má-li být $I_1 = I_2$, musí být $R + nR_\mathrm{i} = nR + R_\mathrm{i}$, odkud $R = R_\mathrm{i}$.

b) Je-li $I_1 > I_2$, pak $\frac{nU_0}{R + nR_\mathrm{i}} > \frac{nU_0}{nR + R_\mathrm{i}}$, tj. $nR + R_\mathrm{i} > R + nR_\mathrm{i}$, odkud $R > R_\mathrm{i}$.

2.5 Metoda smyčkových proudů

Tato metoda využívá druhý Kirchhoffův zákon, který se vztahuje k napětí v uzavřené smyčce – součet napětí v uzavřené smyčce je roven nule.

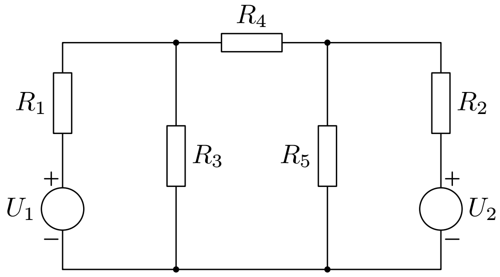
Při použití této metody zavedeme do každé smyčky *smyčkový proud*. Smyčkové proudy označíme v každé smyčce libovolně. Je výhodné volit smysl proudů ve všech smyčkách souhlasný. Tyto smyčkové proudy jsou pro nás neznámé veličiny. Je nutno sestavit tolik rovnic, kolik je v zapojení neznámých smyčkových proudů. Tím dostaneme soustavu rovnic, jejímž řešením pak určíme smyčkové proudy. Každým rezistorem společným dvěma smyčkám protékají dva proudy (dvou sousedních smyček).

Po vypočtení příslušných smyčkových proudů určíme skutečné proudy, popř. stanovíme napětí na jednotlivých rezistorech pomocí Ohmova zákona. Vyjde-li nějaký proud záporný, znamená to, že má opačnou orientaci než jsme původně předpokládali.

Následující příklad popisuje použití metody smyčkových proudů.

Příklad 10 – metoda smyčkových proudů

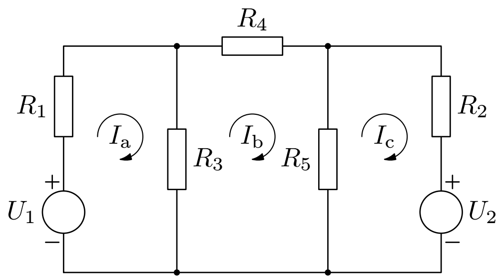
Určete proudy protékající jednotlivými rezistory v obvodu podle obr. 54



$U_1 = 24$ V
$U_2 = 22$ V
$R_1 = 1\ \Omega$
$R_2 = 1\ \Omega$
$R_3 = 10\ \Omega$
$R_4 = 2\ \Omega$
$R_5 = 2\ \Omega$

Obr. 54

Řešení



Obr. 55

Do jednotlivých smyček zavedeme smyčkové proudy I_a, I_b, I_c.
Dále napíšeme pro každou smyčku 2. KZ:

$$\begin{aligned} R_1 I_\mathrm{a} + R_3(I_\mathrm{a} - I_\mathrm{b}) - U_1 &= 0, \\ R_4 I_\mathrm{b} + R_5(I_\mathrm{b} - I_\mathrm{c}) + R_3(I_\mathrm{b} - I_\mathrm{a}) &= 0, \\ R_2 I_\mathrm{c} + R_5(I_\mathrm{c} - I_\mathrm{b}) + U_2 &= 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme soustavu třech rovnic o třech neznámých. Tuto soustavu nyní vyřešíme pro konkrétní hodnoty prvků.
Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned} 11 I_\mathrm{a} - 10 I_\mathrm{b} - 24 &= 0, \\ -10 I_\mathrm{a} + 14 I_\mathrm{b} - 2 I_\mathrm{c} &= 0, \\ -2 I_\mathrm{b} + 3 I_\mathrm{c} + 22 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme: $I_\mathrm{a} = 4$ A, $I_\mathrm{b} = 2$ A, $I_\mathrm{c} = -6$ A.

Rezistorem R_1 poteče proud $I_\mathrm{a} = 4$ A, rezistorem R_3 proud $I_\mathrm{a} - I_\mathrm{b} = 2$ A, rezistorem R_2 proud $I_\mathrm{c} = -6$ A, rezistorem R_4 proud $I_\mathrm{b} = 2$ A, rezistorem R_5 proud $I_\mathrm{c} - I_\mathrm{b} = -8$ A.

Znaménka minus u rezistorů R_2 a R_5 značí, že těmito rezistory protéká proud opačně, než jsme původně předpokládali.

Zkuste tuto úlohu vyřešit pomocí Kirchhoffových zákonů a obě metody pak porovnejte.

2.6 Metoda uzlových napětí

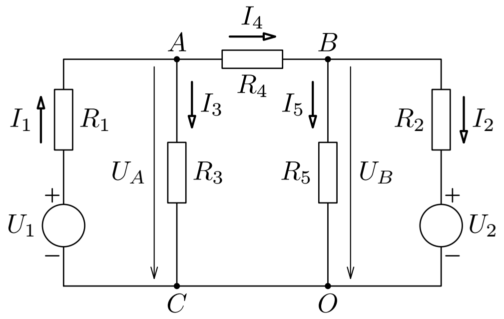
Tato metoda je založena na použití prvního Kirchhoffova zákona. Je výhodné ji použít zejména v obvodech s paralelně řazenými členy.

V daném obvodu zvolíme jeden uzel jako *vztažný*. Zpravidla volíme uzel, ve kterém je spojeno nejvíce prvků. Ostatní uzly očíslujeme a označíme napětí každého z uzlů vzhledem ke vztažnému uzlu. Potom pro tyto očíslované uzly sestavíme rovnice podle 1. KZ. Získáme tolik rovnic, kolik bude očíslovaných uzlů. Řešením této soustavy rovnic určíme napětí mezi označenými uzly a vztažným uzlem.

Příklad 11 – metoda uzlových napětí

Vyřešte příklad 10 pomocí metody uzlových napětí.

Řešení



Obr. 56

Za vztažný uzel O zvolíme uzel společný rezistorům R_3, R_5. Mezi uzly A, B a vztažným uzlem O označíme napětí U_A, U_B.
Pro uzel A platí: $I_1 - I_3 - I_4 = 0$.
Pro uzel B platí: $I_4 - I_2 - I_5 = 0$.
Po dosazení uzlových napětí dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{U_1 - U_A}{R_1} - \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_A}{R_3} &= 0, \\ \frac{U_A - U_B}{R_4} - \frac{U_B - U_2}{R_2} - \frac{U_B}{R_5} &= 0. \end{aligned}$$

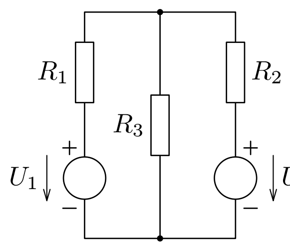
Po dosazení konkrétních číselných hodnot:

$$\begin{aligned} \frac{24 - U_A}{1} - \frac{U_A - U_B}{2} - \frac{U_A}{10} &= 0, \\ \frac{U_A - U_B}{2} - \frac{U_B - 22}{1} - \frac{U_B}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme: $U_A = 20$ V, $U_B = 16$ V.
Potom $I_1 = \dfrac{U_1 - U_A}{R_1} = 4$ A, $I_2 = \dfrac{U_B - U_2}{R_2} = -6$ A, $I_3 = \dfrac{U_A}{R_3} = 2$ A, $I_4 = \dfrac{U_A - U_B}{R_4}$, $I_5 = \dfrac{U_B}{R_5} = 8$ A.
I tato metoda dala stejné výsledky, které jsme získali metodou smyčkových proudů.

Cvičení 3

1. Určete proudy protékající jednotlivými rezistory v v níže uvedeném obvodu na obr. 57.
a) Užitím principu superpozice,
b) metodou smyčkových proudů,
c) metodou uzlových napětí.
Řešte pro hodnoty $U_1 = 7$ V, $U_2 = 9$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 1{,}5\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$.
Porovnejte vhodnost jednotlivých metod při řešení této úlohy.



Obr. 57

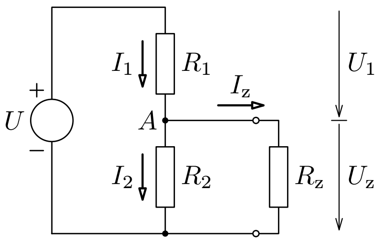
2. Určete proud protékající rezistorem R_3 na obr. 57 použitím Millmanovy poučky.

2.7 Věty o náhradních zdrojích

V této části se zaměříme na metody umožňující řešit složitější elektrické obvody.

Pomocí vět o náhradních zdrojích lze libovolně složitý obvod sestavený z lineárních prvků nahradit vzhledem k libovolným dvěma svorkám obvodem skutečného zdroje napětí nebo obvodem skutečného zdroje proudu.

a) Théveninova poučka – věta o náhradním zdroji napětí



Obr. 58

Pro uzel A platí

$$I_1 - I_2 - I_z = 0.$$

Použitím Ohmova zákona dostaneme

$$\frac{U - U_z}{R_1} - \frac{U_z}{R_z} - I_z = 0.$$

Výše uvedenou rovnici násobíme výrazem R_1R_2 a dostáváme

$$(U - U_z)R_z - U_zR_1 - I_zR_1R_2 = 0.$$

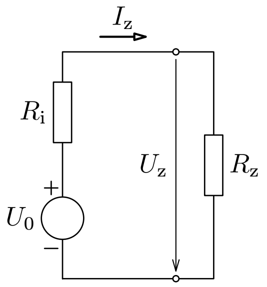
Po úpravě $UR_2 - U_z(R_1 + R_2) - I_zR_1R_2 = 0$.
Napětí U_z na zátěži je

$$U_z = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U - \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I_z. \tag{18}$$

Napětí na zátěži U_z můžeme rovněž vyjádřit rovnicí, která popisuje obvod skutečného zdroje napětí

$$U_z = U_0 - R_iI_z. \tag{19}$$

Náhradní obvod k tomuto vztahu je znázorněn na obr. 59.



Obr. 59

Z porovnání rovnic (18) a (19) pro U_z vyplývá definice *Théveninovy poučky*, že libovolně složitý obvod lze vzhledem k libovolným dvěma svorkám nahradit obvodem skutečného zdroje napětí. U skutečného zdroje napětí je pak U_0 napětí ideálního zdroje napětí, R_i je vnitřní odpor. Napětí U_0 v libovolně složitém obvodu stanovíme jako napětí naprázdno na výstupních svorkách.

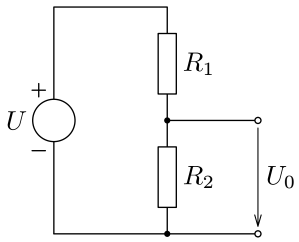
Vnitřní odpor R_i v libovolně složitém obvodu stanovíme jako odpor mezi výstupními svorkami v případě, že je zátěž odpojena, všechny zdroje napětí zkratovány, případně zdroje proudu vyřazeny. Na výstupních svorkách je napětí naprázdno U_0. Pro obvod zatíženého děliče napětí (viz obr. 60) platí

$$U_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}U, \tag{20}$$

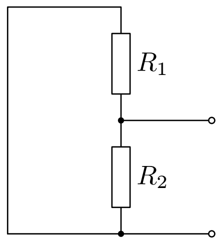
kde R_i je vnitřní odpor, který určíme jako odpor mezi výstupními svorkami v případě, že odpojíme zátěž a zdroj napětí zkratujeme, případně zdroj proudu vyřadíme.

Pro zatížený dělič (viz obr. 61) platí vztah

$$R_i = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}. \tag{21}$$



Obr. 60



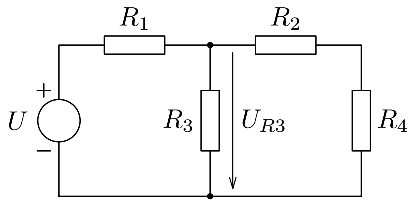
Obr. 61

Vztahy Théveninovy poučky je tedy možno použít:
a) V případě, že máme zadán proud I_z zátěže. Pak budeme napětí na zatěžovacím rezistoru počítat dle vztahu (19).
b) V případě, že je dán odpor zatěžovacího rezistoru R_z. Pak bude napětí na tomto rezistoru dáno vztahem

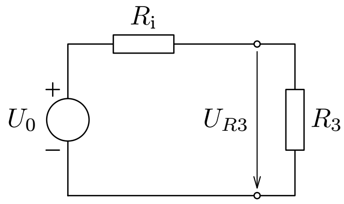
$$U_z = \frac{R_z}{R_i + R_z} U_0. \tag{22}$$

Příklad 12 – použití Théveninovy poučky

Vypočtěte napětí na rezistoru R_3 v obvodu zapojeném podle obr. 62. Napětí zdroje $U = 12$ V, odpory rezistorů $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 25\ \Omega$, $R_4 = 60\ \Omega$.



Obr. 62



Obr. 63

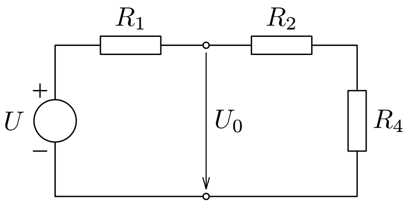
Řešení

Sestavíme náhradní obvod podle definice Théveninovy poučky (obr. 63). Ideální zdroj napětí U_0 (obr. 64) je

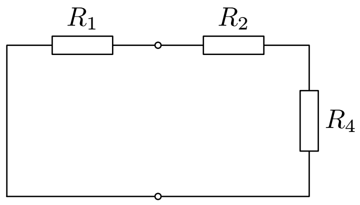
$$U_0 = \frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_4} U,$$

Vnitřní odpor R_i (obr. 65) je

$$R_i = \frac{R_1(R_2 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_4}.$$



Obr. 64



Obr. 65

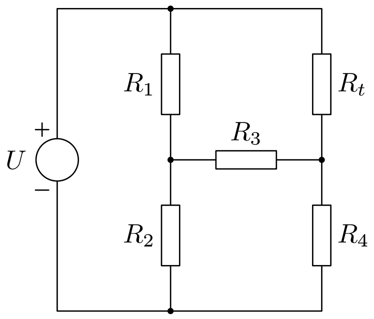
Napětí na rezistoru R_3 bude (podle obr. 63)

$$U_{R3} = \frac{R_3}{R_\mathrm{i} + R_3} U_0.$$

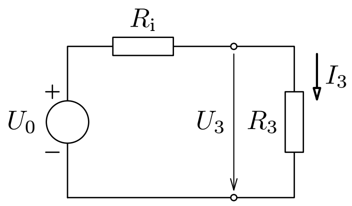
Pro dané hodnoty: $U_0 = 6$ V, $R_\mathrm{i} = 50\ \Omega$, $U_{R3} = 4$ V.

Příklad 13 – teplotní závislost elektrického odporu

V obvodu sestaveném podle obr. 66 stanovte proud procházející rezistorem R_3 v závislosti na teplotě. Rezistor R_t je teplotně závislý. Je zhotoven z materiálu, jehož teplotní součinitel odporu je $4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$. Při teplotě 0 °C má odpor 50 Ω. Rezistory R_1, R_2, R_4 jsou teplotně nezávislé a mají stejný odpor, a to 150 Ω. Rezistor R_3 je také teplotně nezávislý a má odpor 50 Ω. Napětí zdroje $U = 20$ V. Nakreslete pro dané hodnoty graf závislosti napětí U_3 (měřeném na rezistoru R_3) na teplotě t rezistoru R_t v teplotním intervalu $\langle 0, 100\ °\mathrm{C}\rangle$.[6]



Obr. 66



Obr. 67

[6] Graf je možno vytvořit pomocí Excelu - viz [11].

Řešení

Odpor rezistoru R_t při teplotě t bude dán vztahem

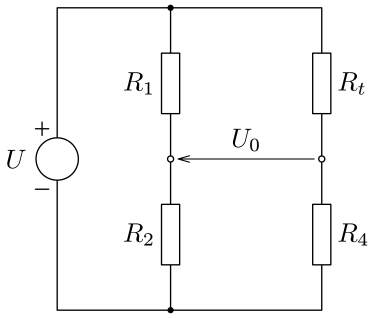
$$R_t = R_0(1 + \alpha \Delta t) = R_0(1 + \alpha t).$$

Obvod nahradíme zapojením podle obr. 67.
Ideální zdroj napětí U_0 určíme dle obr. 68

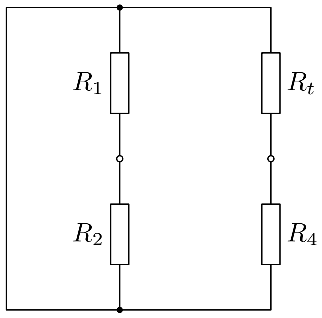
$$U_{02} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U, \quad U_{04} = \frac{R_4}{R_t + R_4} U, \quad U_0 = U_{04} - U_{02}.$$

Vnitřní odpor R_i stanovíme podle zapojení na obr. 69

$$R_\mathrm{i} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_t R_4}{R_t + R_4}.$$



Obr. 68



Obr. 69

Proud procházející rezistorem R_3 bude

$$I_3 = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_3}.$$

Po dosazení za U_0, R_i, $R_1 = R_2 = R_4 = R$ a úpravě dostaneme

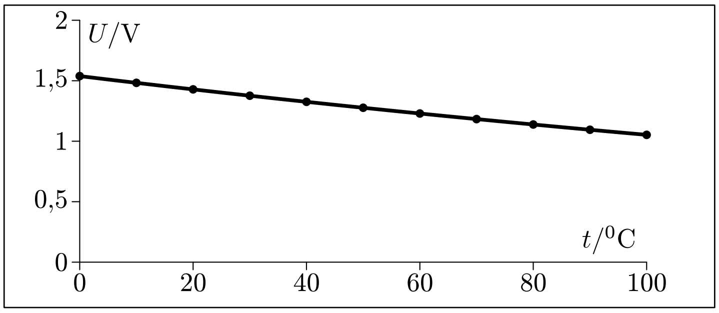
$$I_3 = \frac{R - R_t}{(3R + 2R_3)R_t + R^2 + 2R_3 R} U,$$

po dosazení vztahu pro R_t, úpravě a dosazení daných hodnot dostaneme

$$I_3 = \frac{100 - 0{,}2t}{65\,000 + 110t} \cdot 20 \text{ A}.$$

Napětí U_3 na rezistoru R_3 je pak dáno vztahem $U_3 = I_3 R_3$, po dosazení za I_3

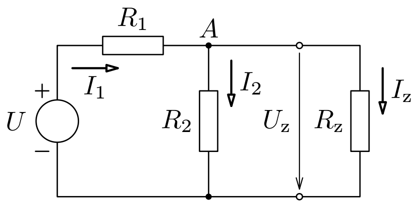
$$U_3 = \frac{100 - 0{,}2t}{65 + 0{,}11t} \text{ V}..$$



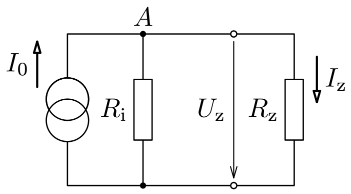
Obr. 70 Graf závislosti napětí na rezistoru R_3 na teplotě

2.8 Nortonova poučka – věta o náhradním zdroji proudu

Podle *Nortonovy poučky* lze libovolný obvod složený z lineárních prvků nahradit vzhledem k libovolným dvěma svorkám obvodem skutečného zdroje proudu.



Obr. 71



Obr. 72

Pro uzel A platí

$$I_1 - I_2 - I_z = 0, \tag{23}$$

Podle 2. KZ pro smyčku na obvodu platí

$$I_1 R_1 + U_z - U = 0,$$

z čehož $I_1 = \dfrac{U - U_z}{R_1}$.

Obdobně pro I_2 dostaneme $I_2 = \dfrac{U_z}{R_2}$.

Po dosazení za I_1, I_2 do (27) dostaneme

$$\frac{U - U_z}{R_1} - \frac{U_z}{R_2} - I_z = 0.$$

Po úpravě

$$U_z \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{U}{R_1} - I_z.$$

Označíme-li $\dfrac{1}{R_\mathrm{i}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$, $I_0 = \dfrac{U}{R_1}$ (viz obr. 72),
dostaneme

$$U_\mathrm{z} = (I_0 - I_\mathrm{z})R_\mathrm{i}. \tag{24}$$

Pro napětí U_z jsme dostali shodný výraz s výrazem pro obvod skutečného zdroje proudu (obr. 72). Nahradili jsme obvod původní obvodem skutečného zdroje proudu.

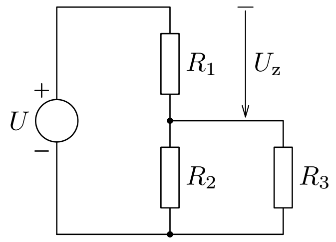
U náhradního obvodu je I_0 proud ideálního zdroje proudu a určí se jako proud, který prochází zkratovanými výstupními svorkami. Vnitřní odpor R_i se určí stejným způsobem jako u Théveninovy poučky.

Vztahy Nortonovy poučky je tedy možno použít:
a) V případě, že je dán proud procházející zátěží I_z, bude napětí na zatěžovacím rezistoru dáno vztahem (24).
b) V případě, že je dán odpor zatěžovacího rezistoru, bude na něm napětí

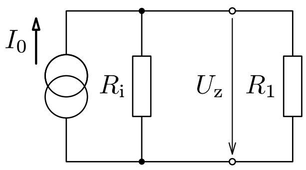
$$U_\mathrm{z} = \frac{R_\mathrm{i}R_\mathrm{z}}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{z}} I_0. \tag{25}$$

Příklad 14 – Nortonova poučka

Stanovte napětí na rezistoru R_1 v zapojení podle obr. 73. Napětí zdroje $U = 12$ V, odpory rezistorů $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$.



Obr. 73



Obr. 74

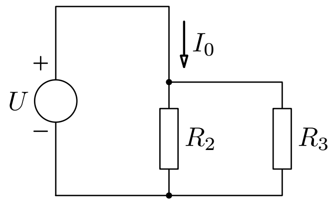
Řešení

Náhradní obvod definovaný Nortonovou poučkou je na obr. 75. Ideální zdroj proudu I_0 stanovíme ze zapojení na obr. 75.

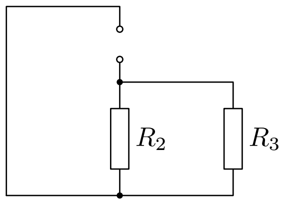
$$I_0 = \frac{U}{\dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}}.$$

Vnitřní odpor R_i stanovíme ze zapojení na obr. 76.

$$R_\mathrm{i} = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}.$$



Obr. 75

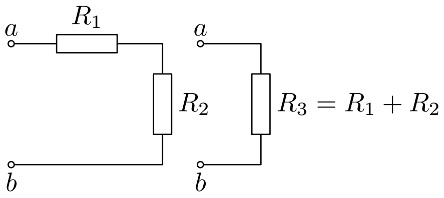


Obr. 76

Podle zapojení na obr. 74 bude napětí $U_\mathrm{z} = \dfrac{R_\mathrm{i} R_1}{R_\mathrm{i} + R_1} I_0$.
Pro dané hodnoty: $I_0 = 0{,}8$ A, $R_\mathrm{i} = 15\ \Omega$, $U_\mathrm{z} = 8$ V.

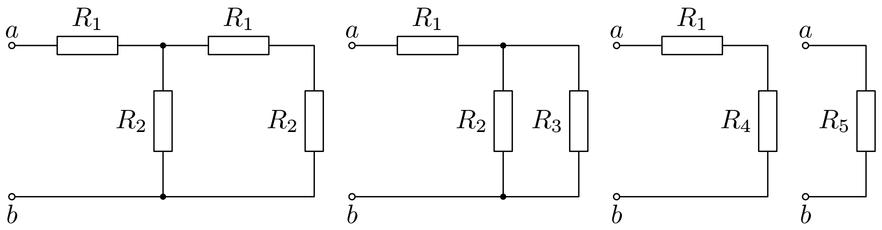
2.9 Řetězový obvod

V této části se budeme zabývat obvodem, který je možno analyzovat pomocí sériových a paralelních zapojení. Začneme jednoduchým obvodem, jehož schéma je na obr. 77. Je vidět, že celkový odpor obvodu je $R_3 = R_1 + R_2$.



Obr. 77

Vezměme nyní obvod na obr. 78. Zde lze provést náhradu koncové dvojice rezistorů rezistorem R_3, rezistory R_3, R_4 pak nahradit rezistorem R_5.

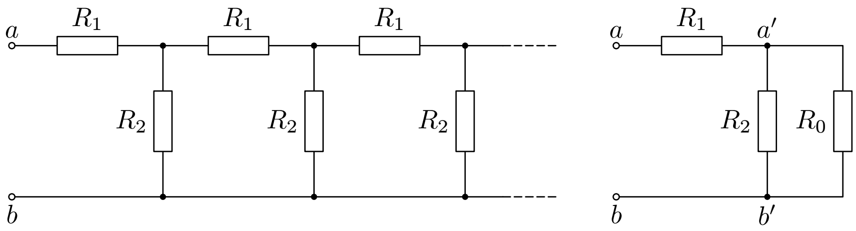


Obr. 78

Pro rezistory R_3, R_4 a R_5 na obr. 78 platí

$$R_3 = R_1 + R_2, \quad \frac{1}{R_4} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}, \quad R_5 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Zkusme nyní vyřešit situaci, kdybychom do sítě na obr. 78 přidávali další a další dvojice rezistorů R_1 a R_2 viz obr. 79.



Obr. 79

Odpor nekonečné sítě mezi svorkami a, b označíme R_0 (viz obr. 79). Je-li síť nekonečná, pak také odpor mezi svorkami a', b' je R_0. Pak platí

$$R_0 = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_0}}, \text{ tj. } R_0 = R_1 + \frac{R_2 R_0}{R_2 + R_0}.$$

Dostaneme kvadratickou rovnici, ze které vyjádříme neznámou R_0 (fyzikální význam má pouze kladné řešení):

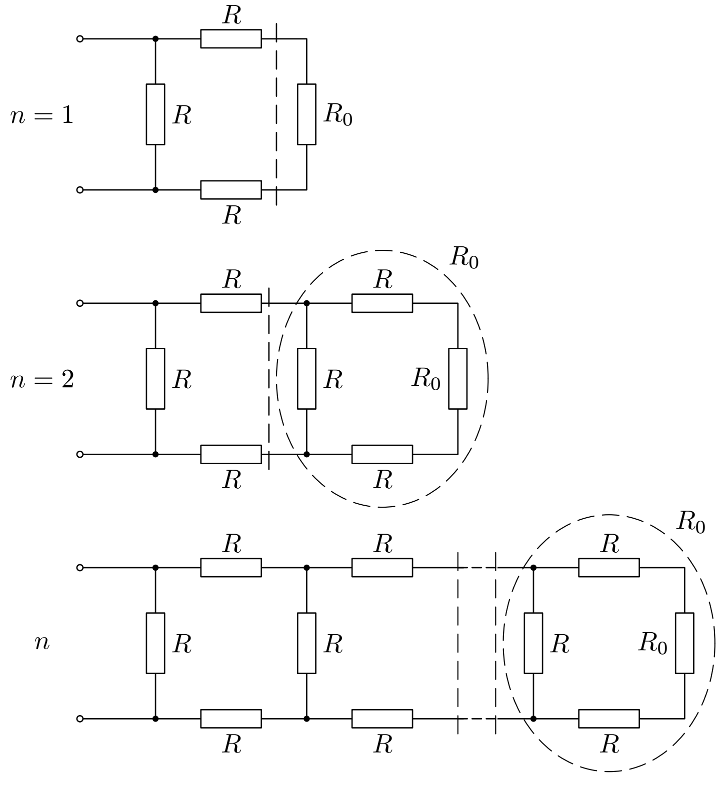
$$R_0 = \frac{1}{2}(R_1 + \sqrt{R_1^2 + 4R_1R_2}). \tag{26}$$

Našli jsme výraz[7] pro odpor nekonečného řetězového obvodu skládajícího se z opakujících se sériových a paralelních rezistorů.

Příklad 15 – řetězový obvod

Na obr. 80 je zakreslen elektrický obvod složený z rezistorů o stejném odporu R. Obvod lze rozložit na n stejných částí ($n \in N$). Obvod je ukončen rezistorem o odporu R_0. Určete velikost odporu R_0 tak, aby odpor elektrického obvodu byl stejný pro libovolné n.

[7] K témuž výsledku by bylo možno dospět i vhodným použitím Kirchhoffových zákonů.



Obr. 80

Řešení

Nemá-li být odpor elektrického obvodu závislý na počtu částí n, musí být tento odpor roven právě hodnotě R_0.
Pro $n = 1$:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_0},$$

$$R_0^2 + 2R_0R - 2R^2 = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice dostaneme dva kořeny, smysl má pouze kladný kořen $R_0 = (\sqrt{3} - 1)R = 0{,}732\,R$.
Přechod z $n = 1$ na $n = 2$ provedeme tak, že nahradíme pravý koncový rezistor o odporu R_0 rezistorem o odporu R a na konec přidáme trojici R, R_0, R (viz obr. 80).

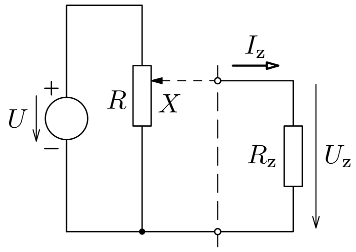
Z předchozí úvahy je zřejmé, že obvod lze zjednodušit na případ $n = 1$. Takto bychom mohli postupně zjednodušovat obvod pro libovolné n, a vždy bychom dospěli ke stejné rovnici $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_0}$, kterou jsme již vyřešili pro $n = 1$.

Pro libovolné n musí tedy být odpor obvodu (a tedy i rezistoru připojeného na konec obvodu) roven $R_0 = 0{,}732\,R$.

Cvičení 4

1. Posuvný odpor R je zapojen jako potenciometr a připojen ke zdroji se svorkovým napětím U (viz obr. 81). Paralelně k části, jejíž odpor je X, je připojen spotřebič o odporu R_z. Určete

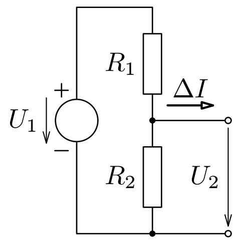
a) proud I_z, který protéká spotřebičem,
b) napětí U_z na spotřebiči.
Úlohu řešte pomocí Théveninova i Nortonova teorému.



Obr. 81

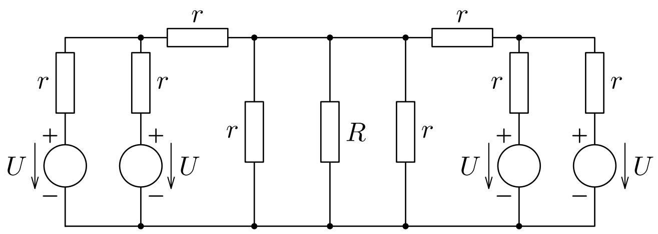
2. V děliči napětí podle obr. 82 mají být odpory rezistorů R_1, R_2 stanoveny tak, aby napětí na rezistoru R_2 bylo U_{2max} při odběru proudu I_{min} a napětí U_{2min} při odběru proudu I_{max}. Řešení proveďte

a) pomocí Théveninovy poučky,
b) pomocí Nortonovy poučky.
Řešte nejprve obecně, potom pro $U_1 = 12{,}00$ V, $I_{max} = 120$ μA, $I_{min} = 80$ μA, $U_{2max} = 4{,}40$ V, $U_{2min} = 4{,}00$ V.



Obr. 82

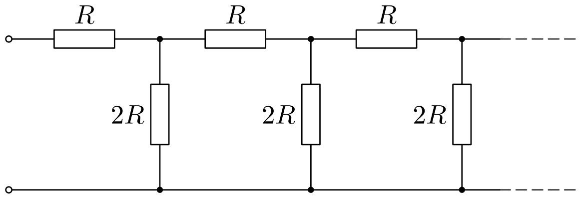
3. V síti znázorněné na obr. 83 vypočítejte proud I_R, který protéká spotřebičem o odporu R, a napětí U_R na tomto spotřebiči. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $U = 12$ V, $r = 2$ Ω, $R = 10$ Ω.



Obr. 83

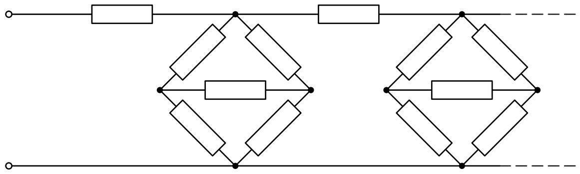
4. Určete velikost elektrického odporu nekonečných sítí znázorněných na obrázcích a) až d). V případech b) až d) mají všechny rezistory stejně velký odpor R. Odpor spojovacích vodičů a přechodový odpor v uzlech zanedbejte.

a)



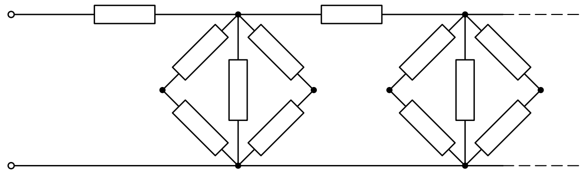
Obr. 84

b)



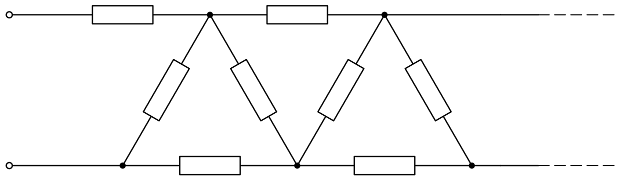
Obr. 85

c)



Obr. 86

d)

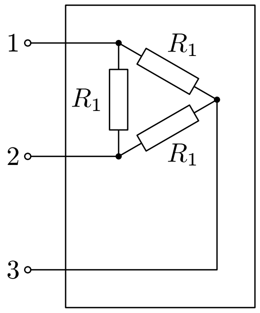


Obr. 87

Řešení úloh

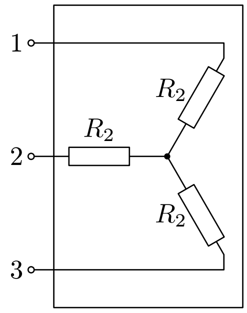
Cvičení 1

1. Úloha má dvě řešení (viz obr.88, 89). Od jednoho řešení k druhému je možno přejít pomocí transfigurace.



$R_1 = 3\ \Omega$

Obr. 88



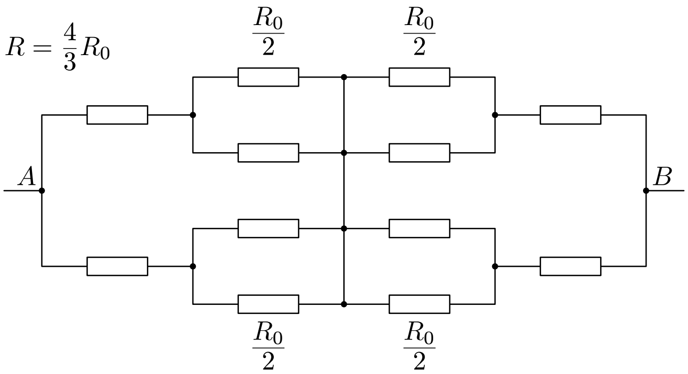
$R_2 = 1\ \Omega$

Obr. 89

2. Body C, D mají stejný potenciál, proud mezi nimi nepoteče – hranu CD můžeme vynechat. Potom $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_0} + \dfrac{1}{2R_0} + \dfrac{1}{2R_0}$, z čehož $R = \dfrac{R_0}{2}$.

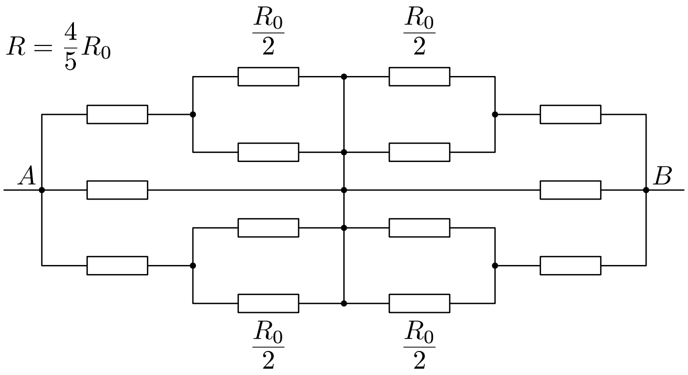
3. Nakreslíme náhradní schémata pro jednotlivé případy. Neoznačené rezistory v obr. 90, 91, 92 mají elektrický odpor R_0. Ze symetrie vyplývá možnost jednotlivá schémata ze zadání překreslit dle následujících obrázků.

a) $R = \dfrac{4}{3}R_0$



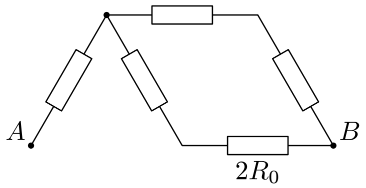
Obr. 90

b) $R = \frac{4}{5}R_0$



Obr. 91

c) Schéma lze překreslit na spojení dvou paralelních větví, přičemž odpor R_0 mezi body O, B lze nahradit dvěma paralelními rezistory, každý o odporu $2R_0$. Jedna z větví je znázorněna na obr. 92.



Obr. 92

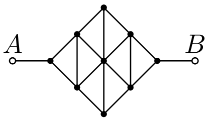
Platí $\frac{1}{R} = \cfrac{2}{R_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{3R_0} + \cfrac{1}{2R_0}}}$,

z čehož

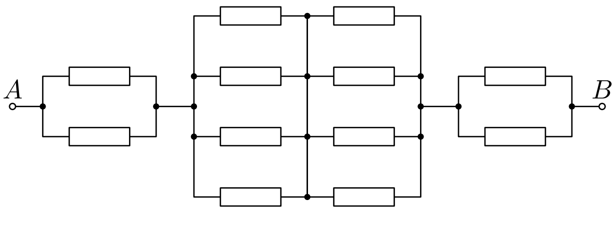
$$R = \frac{11}{10}R_0.$$

4. Úlohu lze řešit několika způsoby.

1. způsob – síť překreslíme dle obr.93 (spojíme body se stejným potenciálem), pak podle obr. 94 (všechny rezistory mají stejně velký odpor R_0.



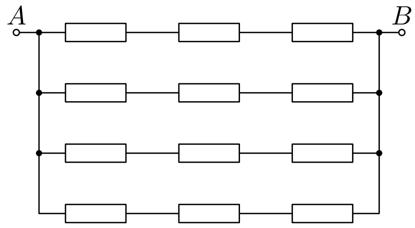
Obr. 93



Obr. 94

Výsledný odpor R je pak dán vztahem: $R = \frac{R_0}{2} + \frac{R_0}{4} + \frac{R_0}{4} + \frac{R_0}{2} = \frac{3}{2}R_0$.

2. způsob – náhradní obvod ke schématu na obr. 23 lze nakreslit také takto:



Obr. 95

Náhradní schéma vychází z poznatků, že výsledný odpor dvou paralelně zapojených rezistorů – každý o odporu $2R_0$ je R_0 a že výsledný odpor dvou sériově zapojených rezistorů – každý o odporu R_0 je $2R_0$. Všechny rezistory na obr. 95 mají odpor $2R_0$. Výsledný odpor $R = \dfrac{3}{2}R_0$.

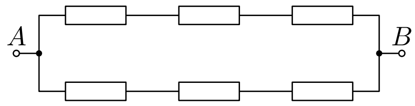
3. způsob – celkový výkon obvodu je roven součtu výkonů na jednotlivých rezistorech:

$$P = 2R_0\left(\frac{I}{2}\right)^2 + 4R_0\left(\frac{I}{4}\right)^2 + 4R_0\left(\frac{I}{4}\right)^2 + 2R_0\left(\frac{I}{2}\right)^2,$$

$$P = RI^2 = \frac{3}{2}R_0I^2,$$

z čehož $R = \dfrac{3}{2}R_0$.

4. způsob – ke schématu na obr. 93 lze vytvořit náhradní schéma také takto (viz obr. 96):

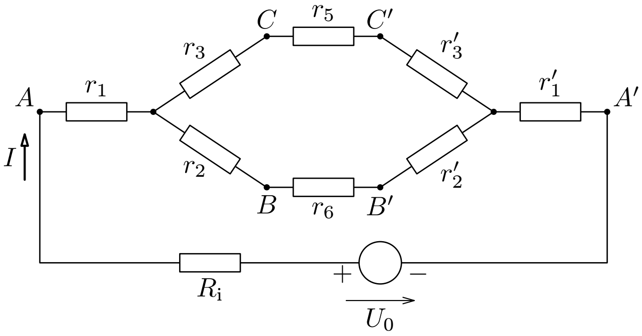


Obr. 96

Všechny rezistory na obr. 96 mají odpor R_0, výsledný odpor je pak

$$R = \frac{3}{2}R_0.$$

5. Užitím transfigurace (trojúhelník → hvězda) dostaneme: $r_1 = 2\ \Omega$; $r_2 = 0{,}5\ \Omega$; $r_3 = 0{,}4\ \Omega$; $r_1' = 3\ \Omega$; $r_2' = 1{,}2\ \Omega$; $r_3' = 2\ \Omega$ (viz obr. 97).



Obr. 97

Odpor horní větve bude $R_\mathrm{h} = r_3 + r_5 + r_3' = 3\ \Omega$, odpor dolní větve je $R_\mathrm{d} = r_2 + r_6 + r_2' = 6\ \Omega$.

Pro náhradní odpor R_n platí $\dfrac{1}{R_\mathrm{n}} = \dfrac{1}{R_\mathrm{h}} + \dfrac{1}{R_\mathrm{d}} = \dfrac{1}{2}$.

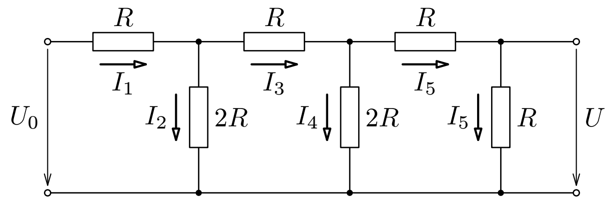
Vnější odpor $R = r_1 + R_\mathrm{n} + r_1' = 7\ \Omega$. Proud $I = \dfrac{U_0}{R + R_\mathrm{i}} = 2$ A.

Cvičení 2

1. Užitím Kirchhoffových zákonů (viz obr. 98) dostaneme:

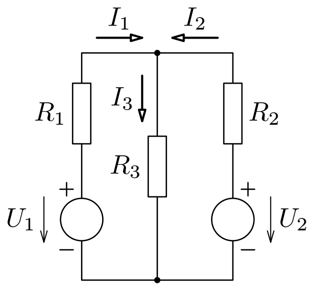
$I_1 = I_2 + I_3$, $I_3 = I_4 + I_5$, $RI_1 + 2RI_2 = U_0$, $RI_3 + 2RI_4 - 2RI_2 = 0$, $RI_5 + RI_5 - 2RI_4 = 0$.

Řešením soustavy dostaneme: $I_5 = \dfrac{U_0}{8R}$, $U = RI_5 = \dfrac{U_0}{8}$.



Obr. 98

2. Užitím Kirchhoffových zákonů (viz obr. 99) dostaneme:



Obr. 99

a)

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 - I_3 &= 0,\\
R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_1 &= 0,\\
-R_2 I_2 + U_2 - R_3 I_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Řešením této soustavy pro konkrétní hodnoty dostaneme: $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 3$ A.

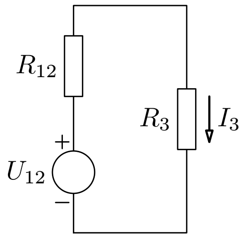
b) Změnou polarity zdroje U_2 se změní 3. rovnice soustavy: $-R_2 I_2 - U_2 - R_3 I_3 = 0$. Nové řešení soustavy: $I_1 = 6{,}54$ A, $I_2 = -6{,}31$ A, $I_3 = 0{,}23$ A.

c) Musí platit $I_1 = I_2$. Po dosazení do soustavy rovnic v úloze a) a řešením této soustavy dostaneme $I_1 = I_2 = 4$ A, $I_3 = 8$ A, $R_3 = 0{,}375\ \Omega$.

Cvičení 3

1. Ve všech případech a), b), c) dostaneme $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 3$ A. Proudy mají orientaci dle obr. 99.

2. Vytvoříme náhradní obvod dle obr. 100



Obr. 100

Platí $R_{12} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 0{,}6\ \Omega$,

$U_{12} = \dfrac{U_1R_2 + U_2R_1}{R_1 + R_2} = 7{,}8$ V.

Potom

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_{12} + R_3} = 3 \text{ A.}$$

Cvičení 4

1. Pomocí Théveninova teorému.

Na obr. 80 je znázorněno oddělení spotřebiče od ostatních částí obvodu. Tuto část lze nahradit zdrojem o vnitřním napětí U_0 a vnitřním odporu R_i, přičemž $U_0 = \dfrac{UX}{R}$, $R_\mathrm{i} = \dfrac{X(R-X)}{R}$.

a) Pro proud I_z pak dostaneme $I_\mathrm{z} = \dfrac{U_0}{R_\mathrm{z} + R_\mathrm{i}} = \dfrac{UX}{R(R_\mathrm{z} + X) - X^2}$.

b) Pro napětí U_z na spotřebiči dostáváme $U_\mathrm{z} = R_\mathrm{z}I_\mathrm{z} = \dfrac{UX}{R\left(1 + \dfrac{X}{R}\right) - \dfrac{X^2}{R}}$.

Pomocí Nortonova teorému.

Uvažujme paralelní kombinaci R_i a R, proud $I_0 = \dfrac{U}{R-X}$. Proud tekoucí odporem R_i označíme I_i, proud tekoucí spotřebičem I_z. Platí $I_\mathrm{i} + I_\mathrm{z} = I_0$; $I_\mathrm{z} : I_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} : R_\mathrm{z}$. Odtud $I_\mathrm{z} = I_0\dfrac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{z} + R_\mathrm{i}}$, po dosazení za $I_0 = \dfrac{U}{R-X}$, $R_\mathrm{i} = \dfrac{X(R-X)}{R}$ dostaneme $I_\mathrm{z} = \dfrac{UX}{R(R_\mathrm{z} + X) - X^2}$.

Řešení úlohy b) je shodné s řešením pomocí Théveninova teorému.

2. a) Pomocí Théveninovy poučky $U_0 = U_1\dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$, $R_\mathrm{i} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$.

Podle zadání úlohy má být:

$U_{2\min} = U_0 - R_\mathrm{i} I_{\max}$, $U_{2\max} = U_0 - R_\mathrm{i} I_{\min}$.

Dostali jsme 2 rovnice o 2 neznámých U_0, R_i:

$U_0 = \dfrac{U_{2\max} I_{\max} - U_{2\min} I_{\min}}{I_{\max} - I_{\min}} = 5{,}2$ V, $R_\mathrm{i} = \dfrac{U_{2\max} - U_{2\min}}{I_{\max} - I_{\min}} = 10$ kΩ.

Dále z výše napsaných rovnic dostaneme:

$R_1 = \dfrac{U_1}{U_0} R_\mathrm{i} = 23$ kΩ, $R_2 = \dfrac{U_1}{U_1 - U_0} R_\mathrm{i} = 17{,}6$ kΩ.

b) Pomocí Nortonovy poučky $I_0 = \dfrac{U_1}{R_1}$, $R_\mathrm{i} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

Potom $U_2 = R_\mathrm{i}(I_0 - I)$.

Dle zadání $U_{2\max} = R_\mathrm{i}(I_0 - I_{\min})$, $U_{2\min} = R_\mathrm{i}(I_0 - I_{\max})$.

Dostali jsme 2 rovnice o 2 neznámých I_0, R_i:

$I_0 = \dfrac{U_{2\max} I_{\max} - U_{2\min} I_{\min}}{U_{2\max} - U_{2\min}} = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$ A, $R_\mathrm{i} = \dfrac{U_{2\max}}{I_0 - I_{\min}} = 10$ kΩ.

Potom $R_1 = \dfrac{U_1}{I_0} = 23$ kΩ, $R_2 = \dfrac{R_\mathrm{i} R_1}{R_1 - R_\mathrm{i}} = 17{,}6$ kΩ.

Obě metody dávají stejné výsledky.

3. Použitím Millmanovy poučky můžeme 4 zdroje napětí nahradit jediným o napětí U_1:

$$U_1 = \frac{4 \cdot \dfrac{U}{r}}{4 \cdot \dfrac{1}{r}} = U.$$

Použitím Théveninovy poučky $U_0 = U_1 \dfrac{r}{r/2 + r + r} = \dfrac{2}{5} U_1 = \dfrac{2}{5} U$.

Postupným zjednodušováním obvodu s rezistory dostaneme

$\dfrac{1}{R_\mathrm{i}} = \dfrac{1}{5R/3 + 5R/3}$, z čehož $R_\mathrm{i} = \dfrac{3}{10} r$. Proud protékající rezistorem R pak bude $I_\mathrm{R} = \dfrac{U_0}{R + R_\mathrm{i}} = \dfrac{4U}{10R + 3r} = 0{,}45$ A.

Napětí na rezistoru potom bude $U_\mathrm{R} = I_\mathrm{R} \cdot R = 4{,}53$ V.

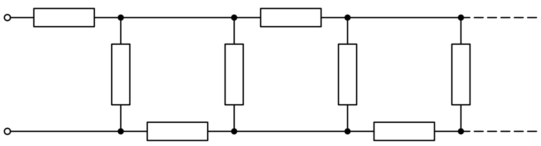
4. a) $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, po dosazení do vztahu (26) $R_\mathrm{a} = 2R$.

b) Obvod lze zjednodušit na obvod obr. 78, kde $R_1 = R$, $R_2 = R$, potom po dosazení do (26) $R_\mathrm{b} = 1{,}62R$.

c) Obvod lze zjednodušit na obvod na obr. 78, kde $R_1 = R$, $R_2 = \dfrac{R}{2}$. Po dosazení do (26) $R_c = 1{,}37R$.

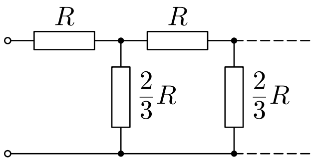
d) Všechny rezistory na obr. 101 mají odpor R.

Schéma lze zjednodušit na tvar:



Obr. 101

a potom na tvar



Obr. 102

Po dosazení do (26) za $R_1 = R$, $R_2 = \dfrac{2}{3}R$ dostaneme $R_e = 1{,}46R$.

Literatura

[1] Blahovec, A.: *Elektrotechnika I.* Informatorium, Praha 1999.

[2] Blahovec, A.: *Elektrotechnika III.* Informatorium, Praha 2002.

[3] Feynman, R., P., Leighton, R., B., Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady I.* Fragment, Havlíčkův Brod 2001.

[4] Houdek, V.: *Obecná fyzika II.* SPN, Praha 1984.

[5] Lepil, O., Šedivý, P.: *Elektřina a magnetismus.* Prometheus, Praha 2000.

[6] Maťátko, J.: *Elektronika.* IDEA SERVIS, Praha 2002.

[7] Myslík, J.: *Hlavolamy z elektrotechniky.* BEN, Praha 1996.

[8] Myslík, J.: *Elektrotechnika jinak.* BEN, Praha 1998.

[9] Rauner, K.: *Elektronika.* ZUČ, Plzeň 2001.

[10] Šedivý, P.:*Pokusy s operačními zesilovači.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 11. MAFY, Hradec Králové 1998.

[11] Šedivý, P.:*Teplotní závislosti fyzikálních veličin.* Knihovnička fyzikální olympiády č. 51. MAFY, Hradec Králové 2002.

[12] Vitamvás, Z.: *Teorémy při řešení elektrických obvodů.* SPN, Praha 1975.