Dvě úlohy z mechaniky (10 bodíků)

Než se pustíte do řešení, přečtěte si obecné pokyny ve zvláštní obálce.

Část A. Ukrytý disk (3,5 bodu)

Uvažujeme plný dřevěný válec o poloměru podstavy r_1 a výšce h_1. Někde uvnitř válce se nachází kovový disk o poloměru r_2 a výšce h_2. Kovový disk je umístěn tak, že je jeho osa symetrie B je rovnoběžná s osou symetrie S dřevěného válce. Vzdálenost horní podstavy disku od horní podstavy válce je stejná jako vzdálenost dolních podstav. Vzdálenost mezi osami S a B budiž označena d. Hustota dřeva je ρ_1, hustota kovu je $\rho_2 > \rho_1$. Celková hmotnost dřevěného válce společně s kovovým diskem uvnitř je M.

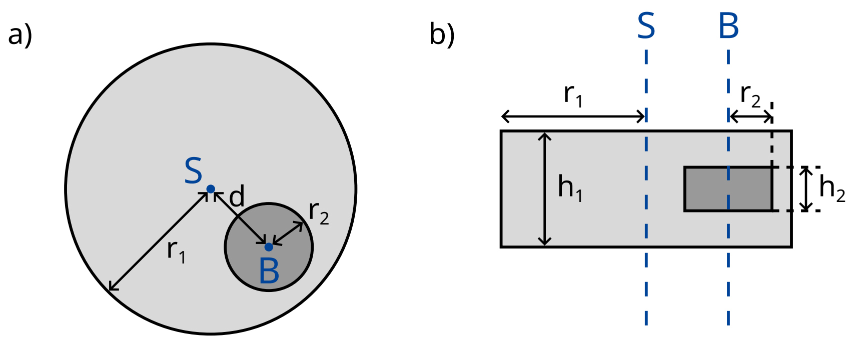
V této úloze postavímedřevěný válec na zem tak, že se může volně valit doprava a doleva. Na obr. 1 vidíte boční a horní pohled na soustavu.

Cílem úlohy je určit rozměry a polohu kovového disku.

Při řešeni celé úlohy uvažujte, že následující veličiny jsou známé

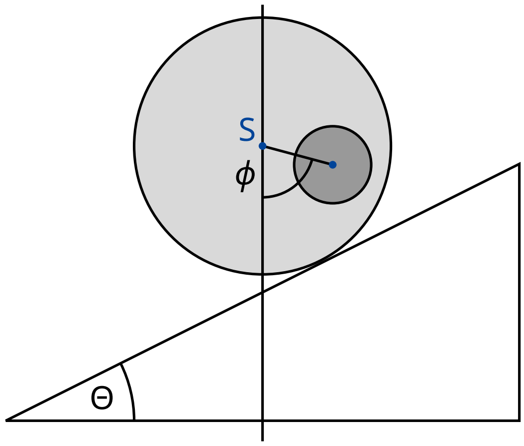
$$r_1,\ h_1,\ \rho_1,\ \rho_2, M\ . \tag{1}$$

Cílem je tedy určit r_2, h_2 a d, prostřednictvím nepřímých měření.



Obrázek 1: a) boční pohled b) pohled shora

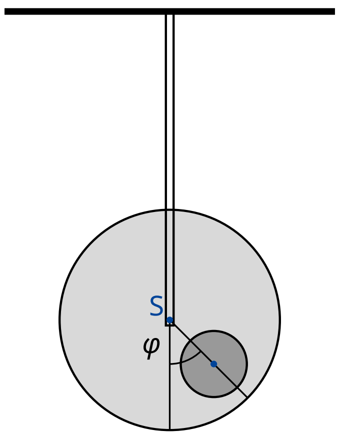
Označme b vzdálenost mezi hmotným středem C celé soustavy a osou symetrie dřevěného válce S. Tuto vzdálenost určíme pomocí následujícího experimentu: Položíme dřevěný válce na vodorovnou podložku tak, aby byl ve stabilní rovnováze. Nyní pomalu zvedáme podložku do nakloněné roviny s úhlem Θ (viz obr. 2). V důsledku klidového tření se dřevěný válec volně valí bez prokluzování. Válec se odvalí trochu směrem dolů, ale opět zastaví ve stabilní rovnovážné poloze poté, co se otočí o úhel ϕ, který můžeme měřit.



Obrázek 2: Válec na nakloněné rovině.

A.1	Nalezněte výraz pro vzdálenost b v závislosti na veličinách (1), úhlu ϕ a úhlu sklonu Θ podložky.	0.8pt

Od tohoto místa považujte v dalším veličinu b za známou.



Obrázek 3: Zavěšená soustava.

V dalším kroku změříme moment setrvačnosti I_S soustavy vzhledem k ose symetrie válce S. Zavěsíme dřevěný válec v jeho ose symetrie. Pootočíme jej z rovnovážné polohy o malý úhel φ, a uvolníme jej, viz obr. 3. Pozorujeme periodický pohyb, úhel φ se mění periodicky s periodou T.

A.2	Nalezněte pohybovou rovnici pro φ. Vyjádřete moment hybnosti I_S soustavy vzhledem k jeho ose symetrie S v závislosti na T, b a známých veličinách (1). Uvažujte pouze malé vychýlení z rovnovážné polohy, tedy úhel φ je po celou dobu velmi malý.	0.5pt

Z výsledků měření v úlohách **A.1** a **A.2** nyní určíme geometrii soustavy a polohu disku uvnitř dřevěného válce.

A.3	Nalezněte výraz pro vzdálenost d v závislosti na b a veličinách (1). Výsledek může záviset i na r_2 a h_2 jako proměnných, tyto veličiny totiž jistě snadno vypočtete v úloze **A.5**.	0.4pt

A.4	Nalezněte výraz pro moment setrvačnosti I_S v závislosti na b a veličinách (1). Výsledek může záviset i na r_2 a h_2 jako proměnných, tyto veličiny totiž jistě snadno vypočtete v úloze **A.5**.	0.7pt

A.5	Pomocí vašich předchozích výsledků napište výrazy pro h_2 a r_2 v závislosti na b, T a známých veličinách (1). Veličinu h_2 můžete vyjádřit jakožto funkci r_2.	1.1pt

Část B. Rotující vesmírná stanice (6,5 bodu)

Alenka je astronautka žijící na vesmírné stanici. Stanice má tvar gigantického kotouče o poloměru R. Stanice rotuje okolo své osy a poskytuje tak astronautům luxus v podobě umělé gravitace. Astronauti žijí na vnitřní straně ráfku (obruby) kotouče. Vlastní gravitaci vesmírné stanice zanedbejte stejně jako zakřivení podlahy stanice.

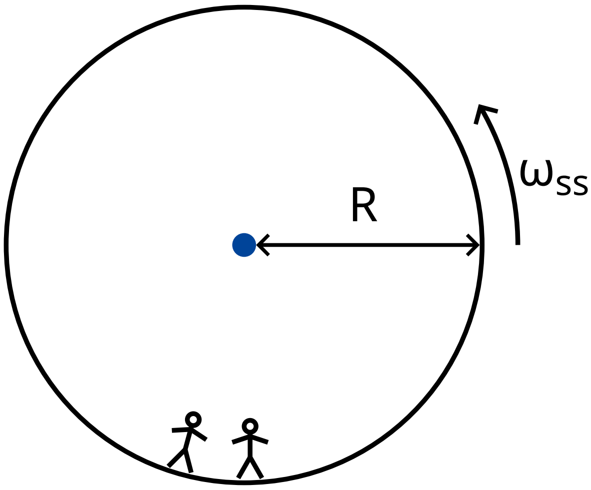
B.1	Jakou úhlovou rychlostí ω_{ss} musí rotovat vesmírná stanice, aby astronauti pociťovali stejné zrychlení g_E jako je gravitační zrychlení na povrchu Země?	0.5pt

Alenka a její vesmírný přítel Robertek mají spor. Robertek totiž nevěří, že opravdu žijí na vesmírné stanici a tvrdí, že jsou na Zemi. Alenka jakožto správná vědkyně chce Robertkovi dokázat, že žijí na rotující vesmírné stanici a pomocí nevyvratitelných fyzikálních důkazů utlouci jeho pochybnosti. Na pružinu s tuhostí k připevní hmotný bod o hmotnosti m a nechá jej kmitat. Hmotný bod může kmitat pouze ve svislém směru, ve vodorovném směru mu to podmínky experimentu neumožňují.

B.2	Předpokládejte, že gravitační zrychlení g_E je na Zemi konstantní. Jakou kruhovou frekvenci kmitání ω_E byste naměřili na Zemi?	0.2pt

B.3	Jakou kruhovou frekvenci kmitání ω naměří Alenka na vesmírné stanici?	0.6pt

Alenka je skálopevně přesvědčena, že její experiment jednoznačně prokázal, že jsou skutečně na vesmírné stanici. Robertek ale zůstává skeptický. Tvrdí, že vezmeme-li v úvahu změnu gravitačního zrychlení nad zemským povrchem, výsledek měření vysvětlíme, pozorujeme tedy stejný jev. V následující úloze prověříte, zda má Robertek pravdu.



Obrázek 4: Vesmírná stanice

B.4	Odvoďte výraz pro gravitační zrychlení $g_E(h)$ v závislosti na výšce nad povrchem Země pro malé výšky h a vypočtěte kruhovou frekvenci $\tilde{\omega}_E$ kmitajícího hmotného bodu (postačí její lineární aproximace). Poloměr Země označíme R_E, zanedbejte rotaci Země.	0.8pt

Skutečně, Alenka zjistila, že v její vesmírné stanici pružinový oscilátor kmitá s frekvencí, kterou Robertek předpověděl.

B.5	Pro jaký poloměr R vesmírné stanice odpovídá kruhová frekvence kmitání ω kruhové frekvenci $\tilde{\omega}_E$ na Zemi? Výsledek vyjádřete v závislosti na R_E.	0.3pt

Alenku, rozrušenou Robertkovou tvrdohlavostí, spásně napadá myšlenka na jiný experiment, aby dokázala svou pravdu. Pročež vyšplhá na věž výšky H nad podlahu vesmírné stanice, po které se obvykle pohybuje, a upustí hmotný bod. Tento experiment lze popsat v rotující vztažné soustavě, i v soustavě inerciální.

V rovnoměrně se otáčejících soustavách vzhledem k soustavám inerciálním cítí astronauté zdánlivou setrvačnou sílu $\vec{F}_C$, zvanou Coriolisova síla. Síla $\vec{F}_C$ působící na objekt o hmotnosti m pohybující se rychlostí $\vec{v}$ v rotující soustavě s konstantní úhlovou rychlostí $\vec{\omega}_{ss}$ je dána vztahem

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}_{ss} \, . \tag{2}$$

Skalárně lze tuto rovnici zapsat

$$F_C = 2mv\omega_{ss} \sin\phi \, , \tag{3}$$

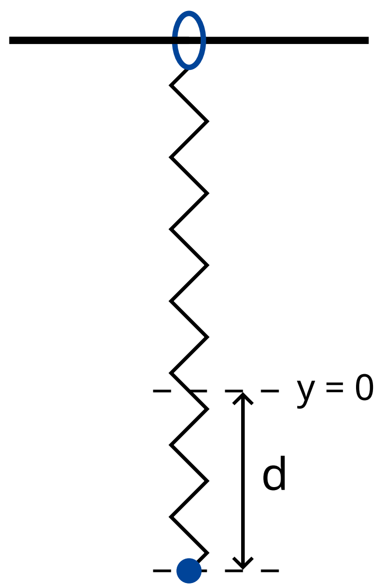
kde ϕ je úhel, který svírá vektor rychlosti objektu s osou otáčení soustavy. Síla je kolmá jak na vektor rychlosti v , tak na osu rotace. Orientace vektoru síly je dána pravidlem pravé ruky, nicméně v následujících úlohách si můžete orientaci zvolit libovolně.

B.6	Vypočtěte vodorovnou rychlost v_x a vodorovné posunutí d_x (vzhledem k patě věže, ve směru kolmém na věž) hmotného bodu v okamžiku, kdy dopadl na podlahu. Uvažujte, že výška H věže je natolik malá, že zrychlení lze během pohybu považovat za konstantní. Uvažujte také, že $d_x \ll H$.	1.1pt

Aby Alenka dostala skutečně přesvědčivý výsledek, rozhodla se povést svůj experiment z mnohem vyšší věže. K jejímu překvapení, hmotný bod dopadl přesně k patě věže, tedy $d_x = 0$.

B.7	Nalezněte spodní mez výšky věže, pro kterou může nastat případ $d_x = 0$.	1.3pt

Alenka provede ještě poslední zoufalý pokus přesvědčit tvrdohlavého Robertka. Chce použít svůj pružinový oscilátor, aby na něm demonstrovala důsledky Coriolisovy síly. Pružinku připevní na kroužek, který se může volně pohybovat po vodorovné tyči ve směru x beze tření. Pružinka sama kmitá ve směru y . Tyč je rovnoběžná s podlahou a kolmá na osu rotace vesmírné stanice. Rovina xy je tedy kolmá na osu rotace a směr y míří přímo do středu rotace vesmírné stanice.



Obrázek 5: Uspořádání experimentu.

B.8	Alenka zatáhne za hmotný bod tak, že se pružina protáhne o vzdálenost d směrem dolů z rovnovážné polohy $x = 0$, $y = 0$ a soustavu uvolní (viz obr. 5). • Odvoďte obecný výraz pro $x(t)$ a $y(t)$. Uvažujte, že $\omega_{ss} d$ je malé a zanedbejte složku Coriolisovy sílu ve směru osy y. • Načrtněte trajektorii $(x(t), y(t))$, a popište všechny podstatné vlastnosti křivky jako je třeba amplituda, atd.	1.7pt

Alenka se nicméně s Bobem neustále dohaduje.