|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **Extremální princip** | **(Počet bodů: 10)** |
| **A** | **Extremální princip v mechanice**Uvažujte rovinnou plochu bez tření, viz obr. 1. Tato plocha je rozdělena na dvě oblasti, I a II, přímkou AB, jež má rovnici . Potenciální energie částice (hmotného bodu) o hmotnosti v oblasti I je a v oblasti II je . Částice je vržena z počátku O rychlostí pod elevačním úhlem , který svírá vektor rychlosti s osou . Částice dorazí do bodu P v oblasti II rychlostí podél přímky svírající s osou úhel . V celé úloze T-2 (ve všech částech) zanedbejte gravitaci a veškeré relativistické děje.Obrázek 1 |  |
| A1 | Vyjádřete pouze pomocí , a . | **0,2** |
| A2 | Vyjádřete pouze pomocí *,* a. | **0,3** |
|  | Zaveďme veličinu nazývanou akce , kde je infinitezimální délka podél trajektorie částice o hmotnosti pohybující se rychlostí o velikosti . Integrál musíte uvažovat přes celou trajektorii. Jako příklad mějme částici pohybující se konstantní rychlostí po kruhové dráze o poloměru . Její akce je pro jedno otočení rovna . Má-li částice konstantní energii, lze ukázat, že ze všech možných trajektorií mezi dvěma pevně zvolenými body, se realizuje pouze ta trajektorie, na které má definovená výše extrém (minimum nebo maximum). Z historie je toto známo jako princip nejmenší akce (PNA). |  |
| A3 | PNA říká, že trajektorie částice pohybující se mezi dvěma body v oblasti s neměnným potenciálem bude přímka. Mějme dva pevně zvolené body O a P na obr. 1 o souřadnicích resp. a hraniční bod, kterým částice prochází při přechodu z oblasti I do oblasti II, mající souřadnice Všimněte si, že je pevně dané a akce se mění pouze v závislosti na souřadnici . Odvoďte vztah pro akci . Použijte PNA pro nalezení vztahu mezi a těmito souřadnicemi. III | **1,0** |
| **B** | **Extremální princip v optice**Paprsek světla prochází z prostředí I do prostředí II s indexy lomu resp. . Tato prostředí jsou oddělena přímkou rovnoběžnou s osou . Paprsek světla svíra s osou v prostředí I úhel a v prostředí II úhel (viz obr. 2). Abychom zjistili trajektorii paprsku, využijeme další extremální (minimální či maximální) princip známý jako Fermatův princip nejmenšího času.Obrázek 2 |  |
| B1 | Princip říká, že světelný paprsek se bude mezi dvěma pevně zvolenými body pohybovat tak, že čas, který mu to zabere, nabývá extrému. Odvoďte vztah mezi and pomocí Fermatova principu. | **0,5** |
|  | Na obr. 3 je schématický náčrtek trajektorie laserového paprsku dopadajícího vodorovně do cukru rozpuštěného ve vodě, kde koncentrace cukru roste směrem ke dnu nádoby. Důsledkem je, že roste směrem ke dnu i index lomu.Obrázek 3: Nádoba s rozpuštěným cukrem |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| B2 | Předpokládejte, že index lomu závisí pouze na . Použijte rovnici získanou v B1 a odvoďte vztah pro směrnici dráhy paprsku pomocí indexu lomu v a . | **1,5** |
| B3 | Paprsek laseru míří vodorovně z počátku do rozpuštěného cukru ve výšce nad dnem nádoby, jak je ukázáno na obrázku 3. Předpokládejte, že platí , kde a jsou kladné konstanty. Odvoďte vztah pro v závislosti na a dalších potřebných veličinách popisující skutečnou trajektorii laserového paprsku. Můžete využít: , kde nebo | **1,2** |
| B4 | Určete souřadnici místa, kde paprsek dopadá na dno nádoby. Předpokládejte cm, , (1 cm = 10-2 m). | **0,8** |
| **C** | **Extremální princip a vlnový charakter hmoty** Prozkoumáme nyní vztah PNA a vlnového charakteru pohybující se částice. Uvažujme, že částice pohybující se z bodu O do bodu P, může cestovat po všech možných trajektoriích a budeme hledat trakejktorii, která závisí na konstruktivní interferenci de Broglieho vln. |  |
| C1 | Nalezněte vztah pro změnu fáze de Broglieho vlny pomocí změny akce a Planckovy konstanty ve dvou místech na trajektorii částice vzdálených od sebe o infinitesimální vzdálenost ve stejném čase.  | **0,6** |
| C2 | Budeme řešit podobný problém jako v části A této úlohy, tedy částici pohybující se z bodu O do bodu P (viz obr. 4). Na hranici AB mezi oběma oblastmi umístíme pro částici neprostoupnou překážku. V přepážce ponecháme částici otevřené malé okénko CD o šířce na úsečce AB tak, že a .Uvažujme dvě extremální trajektorie a takové, že trajektorie je klasická trajektorie částice diskutovaná v bodě A. Vypočtěte fázový rozdíl mezi oběma trajektoriemi do prvního řádu. Obrázek 4 | **1,2** |
| **D** | **Interference vlnové povahy hmoty**215.00 nm250 mmUvažujte elektronový zářič v bodě , který míří kolimovaný svazek elektronů na úzkou štěrbinu v bodě v neprostupné přepážce ležící na přímce tak, že body leží na přímce. je bod na stínítku na přímce (viz obr. 5). Rychlost v oblasti I je a . Potenciál v oblasti II je takový, že rychlost . Vzdálenost je (). Zanedbejte vzájemné interakce mezi elektrony.Obrázek 5 |  |
| D1 | Elektrony byly v bodě urychleny z klidu. Vypočtěte urychlovací napětí . | **0,3** |
| D2 | Uvažujme ještě druhou identickou štěrbinku v bodě v přepážce ve vzdálenosti () pod štěrbinkou (viz obr. 5)*.* Je-li fázový rozdíl mezi de Broglieho vlnami procházejícími štěrbinami F a G a dopadajícími do bodu P 2π*β*, vypočtěte *β*. | **0,8** |
| D3 | Jaká je nejmenší vzdálenost od bodu P*,* ve které lze očekávat nulovou detekci elektronů na stínítku? [Pozn: může se hodit aproximace ] | **1,2** |
| D4 | Svazek má čtvercový průřez o rozmětech a celá aparatura je 2 m dlouhá. Jaká musí být minimánlí hustota toku elektronů *Imin* (počet elektronů procházejících jednotkovou plochou za jednotku času)má-li být v průměru v aparatuře v jakékoliv čase aspoň jeden elektron?  | **0,4** |