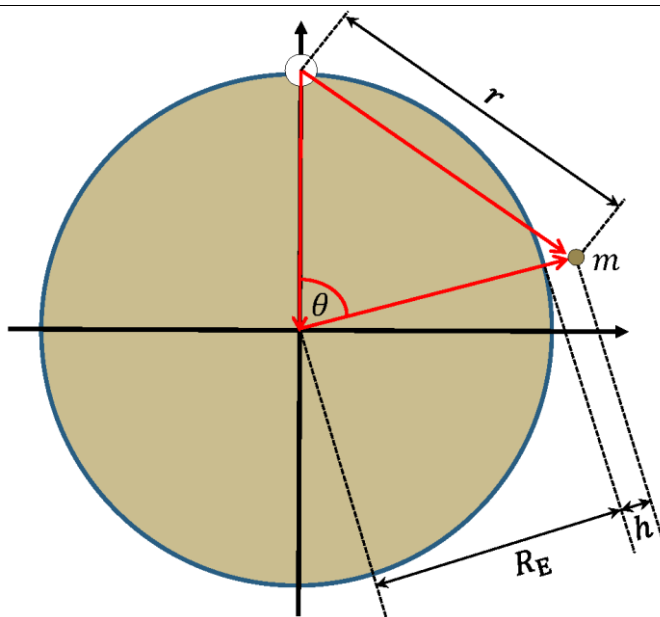


Řešení

3.1	Tlak je dán hydrostatickým tlakem $p(x, z) = \rho_{\text{ice}} g (H(x) - z)$ tak, aby byl nulový na povrchu.	0,3
3.2a	Ven mířící sílu působící na svislý plát ve vzdálenosti x od středu ledovce dostaneme integrací tlaku přes plochu: $F(x) = \Delta y \int_0^{H(x)} \rho_{\text{ice}} g (H(x) - z) dz = \frac{1}{2} \Delta y \rho_{\text{ice}} g H(x)^2$ z čehož plyne $\Delta F = F(x) - F(x + \Delta x) = -\frac{dF}{dx} \Delta x = -\Delta y \rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx} \Delta x$. Tedy, $S_b = \frac{\Delta F}{\Delta x \Delta y} = -\rho_{\text{ice}} g H(x) \frac{dH}{dx}$ Odtud přímo $k = -\rho_{\text{ice}} g$.	0,9
3.2b	Abychom našli výškový profil, řešíme diferenciální rovnici pro $H(x)$, $-\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} = H(x) \frac{dH}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} H(x)^2$ s okrajovou podmínkou $H(L) = 0$. Řešením této rovnice je $H(x) = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}} \sqrt{1 - x/L}$ Tedy maximální výška je $H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{\text{ice}} g}}$. Alternativně, lze použít dimensionální analýzu. $\mathcal{L} = [H_m] = [\rho_{\text{ice}}^\alpha g^\beta \tau_b^\gamma L^\delta]$, $[\rho_{\text{ice}}] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-3}$, $[g] = \mathcal{L} \mathcal{T}^{-2}$, $[\tau_b] = \mathcal{M} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{T}^{-2}$, $\mathcal{L} = [H_m] = [\rho_{\text{ice}}^\alpha g^\beta \tau_b^\gamma L^\delta] = \mathcal{M}^{\alpha+\gamma} \mathcal{L}^{-3\alpha+\beta-\gamma+\delta} \mathcal{T}^{-2\beta-2\gamma}$, $\alpha + \gamma = 0$, $-3\alpha + \beta - \gamma + \delta = 1$, $2\beta + 2\gamma = 0$. $\alpha = \beta = -\gamma = \delta - 1$, $H_m \propto \left(\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} \right)^\gamma L^{1-\gamma}$ Jelikož víme, že $H_m \propto \sqrt{L}$, je nutně $\gamma = 1/2$. S okrajovou podmínkou $H(L) = 0$, má řešení tvar $H(x) \propto \left(\frac{S_b}{\rho_{\text{ice}} g} \right)^{1/2} \sqrt{L - x}$ Konstantu $\sqrt{2}$ nelze tímto přístupem získat.	0,8

3.2c	Plocha obdélníkového modelu Grónska je $A = 10L^2$ a objem získáme integrací výškového profilu, který jsme našli v předešlé úloze. $V_{G,ice} = (5L)2 \int_0^L H(x) dx = 10L \int_0^L \left(\frac{\tau_b L}{\rho_{ice} g}\right)^{1/2} \sqrt{1 - x/L} dx = 10H_m L^2 \int_0^1 \sqrt{1 - \tilde{x}} d\tilde{x}$ $= 10H_m L^2 \left[-\frac{2}{3}(1 - \tilde{x})^{3/2}\right]_0^1 = \frac{20}{3} H_m L^2 \propto L^{5/2},$ z čehož vyplývá $V_{G,ice} \propto A^{5/4}$ a tedy $\gamma = 5/4$.	0,5
3.3	Podle předpokladu konstantní míry akumulace c, celková hmotnost akumulovaného ledu za jednotku času v oblasti o šířce Δy mezi ledovým předělem a libovolným bodem $x > 0$ musí být rovna toku hmotnosti odpovídajícím svislým průřezem v x. Tedy, $\rho c x \Delta y = \rho \Delta y H_m v_x(x)$, odkud $v_x(x) = \frac{cx}{H_m}$	0,6
3.4	Ze v zadání uvedené formule vyplývající z nestlačitelnosti máme $\frac{dv_z}{dz} = -\frac{dv_x}{dx} = -\frac{c}{H_m}$ Řešením této triviální diferenciální rovnici s okrajovou podmínkou $v_z(0) = 0$, dostaneme $v_z(z) = -\frac{cz}{H_m}$	0,6
3.5	Řešíme dvojici diferenciálních rovnic $\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \quad \text{and} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{cx}{H_m}$ s počátečními podmínkami $z(0) = H_m$ a $x(0) = x_i$ a dostaneme $z(t) = H_m e^{-ct/H_m} \quad \text{and} \quad x(t) = x_i e^{ct/H_m}$ Tedy, $z = H_m x_i / x$, což znamená, že led teče ve směru hyperbol v rovině xz.	0,9
3.6	V místě ledového předělu, $x = 0$, teče led pouze ve svislém směru. Výsledek minulé úlohy lze použít k nalezení stáří ledu dané výšce nad zemí: $\tau(z) = \frac{H_m}{c} \ln\left(\frac{H_m}{z}\right)$.	1,0
3.7a	Probíhající doba meziledová dosahuje v ledovci do hloubky 1 492 m, což odpovídá 11 700 letům. Použijeme-li výsledek úlohy 3.6, dostaneme míru akumulace v době meziledové, $c_{ig} = \frac{H_m}{11\,700 \text{ let}} \ln\left(\frac{H_m}{H_m - 1492 \text{ m}}\right) = 0,1749 \text{ m/rok.}$	0,8

	Začátek doby ledové před 120 000 lety je na obrázku 3.2b patrný jako pokles $\delta^{18}\text{O}$ v hloubce 3040 m. Užitím vztahu pro svislý tok ledovce z úlohy 3.4, dostaneme $\frac{dz}{z} = -\frac{c}{H_m} dt.$ Integrací do hloubky 3 040 m, s tím, že míra akumulace je po částech konstantní máme, $H_m \ln\left(\frac{H_m}{H_m - 3040 \text{ m}}\right) = -H_m \int_{H_m}^{H_m - 3040 \text{ m}} \frac{1}{z} dz$ $= \int_{11,700 \text{ let}}^{120,000 \text{ let}} c_{ia} dt + \int_0^{11,700 \text{ let}} c_{ig} dt$ $= c_{ia}(120\,000 \text{ let} - 11\,700 \text{ let}) + c_{ig} 11\,700 \text{ let}$ Z této rovnice dostaneme $c_{ia} = 0,12 \text{ m/rok}$.	
3.7b	Z obr. 3.2b, $\delta^{18}\text{O}$ se mění od $-43,5\text{‰}$ do $-34,5\text{‰}$. Z obr. 3.2a, T se mění od -40 °C do -28 °C. Tedy, $\Delta T \approx 12\text{ °C}$.	0,2
3.8	Z celkové plochy A_G modelu Grónska vypočteme $L = \sqrt{A_G / 10} = 4,14 \cdot 10^5 \text{ m}$. Dosadíme čísla do vztahu pro objem z úlohy 3.2b a máme, $V_{G,ice} = \frac{20}{3} L^{5/2} \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice} g}} = 3,46 \cdot 10^{15} \text{ m}^3.$ Led o tomto objemu roztaje ve vodu o objemu $V_{G,wa} = V_{G,ice} \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} = 3,17 \cdot 10^{15} \text{ m}^3.$ Globální nárůst hladiny moře v důsledku roztání grónského ledovce je tedy $h_{G,rise} = \frac{V_{G,wa}}{A_o} = 8,78 \text{ m}.$	0,6



Obr 3.S1 Geometrie úlohy 3.9. Bílá kulička značí hmotný bod, Grónsko

3.9

Celková hmotnost ledovce je

$$M_{\text{ice}} = V_{\text{G,ice}} \rho_{\text{ice}} = 3,17 \cdot 10^{18} \text{ kg} = 5,31 \cdot 10^{-7} m_E.$$

Celková gravitační potenciální energie testovací hmotnosti m ve výšce h nad povrchem Země, v úhlové vzdálenosti θ od Grónska (viz obr. 3.S1) je

$$U_{\text{tot}} = -\frac{Gm_E m}{R_E + h} - \frac{GM_{\text{ice}} m}{r} = -mgR_E \left(\frac{1}{1 + h/R_E} - \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} \right),$$

kde $g = Gm_E/R_E^2$. Jelikož $h/R_E \ll 1$, můžeme aproximovat,

$$U_{\text{tot}} \approx -mgR_E \left(1 - \frac{h}{R_E} + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} \right).$$

Vypočteme h , $h = h_0 + \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{r/R_E} R_E$, kde $h_0 = R_E + U_{\text{tot}}/(mg)$. Použitím další

aproximace a trigonometrie, máme

$$h(\theta) - h_0 \approx \frac{M_{\text{ice}}/m_E}{2|\sin(\theta/2)|} R_E \approx \frac{1,69 \text{ m}}{|\sin(\theta/2)|}.$$

Úhlová vzdálenost Kodaně od Grónska odpovídající oblouku kružnice o délce 3 500 km je $\theta_{\text{CPH}} = 0,549$, čemuž odpovídá rozdíl hladin $h_{\text{CPH}} - h_0 = 6,25$ m. Místu přesně naproti Grónsku odpovídá úhel $\theta_{\text{OPP}} = \pi$, tedy $h_{\text{OPP}} - h_0 = 1,69$ m.

Rozdíl hladin moře: $h_{\text{CPH}} - h_{\text{OPP}} = 4,56$ m.

1,6

Celkem

9,0