

Řešení

Samotná kulová stříbrná nanočástice

2.1	Objem nanočástice: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4.19 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3$. Hmotnost nanočástice: $M = V \rho_{\text{Ag}} = 4.39 \cdot 10^{-20} \text{ kg}$ Počet iontů: $N = N_A \frac{M}{M_{\text{Ag}}} = 2.45 \cdot 10^5$. Hustota náboje $\rho = \frac{eN}{V} = 9.38 \cdot 10^9 \text{ C m}^{-3}$ Koncentrace elektronů $n = \frac{N}{V} = 5.85 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, tedy hustota náboje $\rho = en$ Celkový náboj volných elektronů $Q = eN = 3.93 \cdot 10^{-14} \text{ C}$, Celková hmotnost volných elektronů $m_0 = m_e N = 2.23 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$.	0,7
-----	---	-----

Elektrické pole v elektricky neutrální oblasti uvnitř nabitě koule

2.2	Pro libovolný bod uvnitř koule o poloměru R s konstantní hustotou náboje ρ určený polohovým vektorem $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ ($r < R$) plyne přímo z Gaussova zákona $4\pi^2 \epsilon_0 \mathbf{E}_+ = 4/3 \pi r^3 \rho \mathbf{e}_r$, kde $\mathbf{e}_r$ je jednotkový vektor směřující ze středu nabitě koule. Tedy, $\mathbf{E}_+ = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}$. Analogicky, uvnitř jiné koule o poloměru R_1 a hustotě náboje $-\rho$ je pole $\mathbf{E}_- = \frac{-\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r}'$, kde $\mathbf{r}'$ značí polohový vektor bodu v souřadnicovém systému s počátkem ve středu této koule. V našem případě zjevně platí $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_d$. Tedy uvnitř elektricky neutrální oblasti $\mathbf{r} - \mathbf{x}_p < R_1$ je elektrické pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0} (\mathbf{r} - \mathbf{x}_d)$, tedy $\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_d$ a hledaný číselný faktor $A = 1/3$.	1,2
-----	---	-----

Vratná síla působící na posunutý elektronový oblak

2.3	Pro $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$ s $x_p \ll R$ můžeme použít přibližně výsledek minulé úlohy, $\mathbf{E}_{\text{ind}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p$. Počet elektronů, které generují indukované pole $\mathbf{E}_{\text{ind}}$, je zanedbatelně malý v porovnání s počtem elektronů uvnitř nanočástice, tedy $\mathbf{F} \cong Q \mathbf{E}_{\text{ind}} = (-eN) \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{x}_p = \frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 x_p \mathbf{e}_x$ (harmonická síla). Práce vykonaná na elektronovém oblaku při jeho posunutí je $W_{\text{el}} = - \int_0^{x_p} F(x') dx' = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{9\epsilon_0} R^3 e^2 n^2 \right) x_p^2$.	1,0
-----	---	-----

Kulová nanočástice stříbra v konstantním vnějším elektrickém poli

2.4	Uvnitř kovové částice v rovnováze musí být celkové elektrické pole rovno 0. Indukované pole (z úloh 2.2 a 2.3) tedy kompenzuje vnější pole $E_0 + E_{\text{ind}} = 0$, tedy $x_p = \frac{3\varepsilon_0}{\rho} E_0 = \frac{3\varepsilon_0}{en} E_0.$ Náboj prošlý rovinou yz ve středu nanočástice je celkový náboj elektronů ve válci o poloměru R a výšce x_p, $-\Delta Q = -\rho\pi R^2 x_p = -\pi R^2 n e x_p$.	0,6
-----	--	-----

Ekvivalentní kapacita a indukčnost nanočástice stříbra

2.5a	Energie W_{el} kondenzátoru s kapacitou C nabitého nábojem $\pm\Delta Q$ je $W_{\text{el}} = \frac{\Delta Q^2}{2C}$. Tato energie se rovná práci (viz úloha 2.3) vykonané na oddělení nábojů (viz úloha 2.4), tedy $C = \frac{\Delta Q^2}{2W_{\text{el}}} = \frac{9}{4} \varepsilon_0 \pi R = 6.26 \cdot 10^{-19} \text{ F}.$	0,7
2.5b	Pro napětí na kondenzátoru platí $\Delta Q = CV_0$. Dosadíme náboj z úlohy 2.4 a kapacitu z úlohy 2.5a a dostaneme $V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{4}{3} RE_0$.	0,4

2.6a	Kinetická energie elektronového oblaku je dána kinetickou energií jednoho elektronu vynásobenou počtem elektronů v oblaku $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 N = \frac{1}{2} m_e v^2 \left(\frac{4}{3} \pi R^3 n \right)$. Elektrický proud I je číselně roven náboji elektronů ve válci s podstavou o ploše πR^2 a výšce $v\Delta t$ dělenému časovým intervalem Δt, tedy $I = -e n v \pi R^2$.	0,7
2.6b	Energie související s proudem I v náhradním obvodu s indukčností L je $W = \frac{1}{2} LI^2$. Tato energie se musí rovnat kinetické energii elektronů W_{kin}. Použijeme výsledky pro energii a proud z úlohy 2.6a a dostáváme $L = \frac{4 m_e}{3\pi R n e^2} = 2.57 \cdot 10^{-14} \text{ H}$.	0,5

Plazmonová resonance nanočástice stříbra

2.7a	Z analogie s LC – obvodem přímo odvodíme $\omega_p = (LC)^{-1/2} = \sqrt{ne^2/3\varepsilon_0 m_e}$.	0,5
2.7b	$\omega_p = 7.88 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$, vlnová délka světla s kruhovou frekvencí $\omega = \omega_p$ je $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p = 239 \text{ nm}$.	0,4

Nanočástice stříbra osvětlená světlem o plazmonové frekvenci

2.8a	Rychlost elektronu $v = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin \omega t = v_0 \sin \omega t$. Jelikož se jedná o harmonický pohyb, postačí průměrovat přes jeho periodu. Časová střední hodnota kinetické energie elektronu $\langle W_k \rangle = \left\langle \frac{m_e v^2}{2} \right\rangle = \frac{m_e}{2} \langle v^2 \rangle$. Během časového intervalu t_0 zasáhne každý elektron ionty t_0/τ krát. Tedy, energetická ztráta v celé nanočástici během jedné periody kmitání je $W_{heat} = N \left\langle \frac{m_e v^2}{2} \right\rangle = \frac{4}{3} \pi R^3 n \left\langle \frac{m_e v^2}{2} \right\rangle$. Časová střední hodnota výkonu Jouleovského ohřevu je tedy $P_{heat} = \frac{1}{\tau} W_{heat} = \frac{1}{2\tau} m_e \langle v^2 \rangle \left(\frac{4}{3} \pi R^3 n \right)$. Výraz pro proud známe z úlohy 2.6a, tedy $\langle I^2 \rangle = (en\pi R^2)^2 \langle v^2 \rangle = \left(\frac{3Q}{4R} \right)^2 \langle v^2 \rangle$.	1,0
2.8b	Střídavý proud $I = I_0 \sin \omega t = \pi R^2 n e v_0 \sin \omega t$ produkuje na odporu R_{heat} teplo rovné $P_{heat} = R_{heat} \langle I^2 \rangle$, což s použitím výsledku úlohy 2.8a vede k $R_{heat} = \frac{W_{heat}}{I^2} = \frac{2m_e}{3\pi e^2 R \tau} = 2,46 \Omega.$	1,0
2.9	$R_{scat} = \frac{P_{scat}}{\langle I^2 \rangle} \text{ a } \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} \omega_p^2 x_0^2 \text{ dávají } R_{scat} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12\pi \epsilon_0 c^3} \frac{16R^2}{9Q^2 \langle v^2 \rangle} = \frac{8\omega_p^2 R^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} = 2,45 \Omega.$	1,0
2.10a	Ohmův zákon pro LCR sériový obvod říká $I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{(R_{heat} + R_{scat})^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$. Při rezonanční frekvenci je časová střední hodnota kvadrátu napětí $\langle V^2 \rangle = Z_R^2 \langle I^2 \rangle = (R_{heat} + R_{scat})^2 \langle I^2 \rangle$. Z úlohy 2.5b $\langle V^2 \rangle = \frac{1}{2} V_0^2 = \frac{8}{9} R^2 E_0^2$, tedy z Ohmova zákona plyne $\langle I^2 \rangle = \frac{8R^2 E_0^2}{9(R_{heat} + R_{scat})^2}$. Časové střední hodnoty ztrát jsou $P_{heat} = R_{heat} \langle I^2 \rangle = \frac{8R_{heat} R^2}{9(R_{heat} + R_{scat})^2} E_0^2 \quad \text{a} \quad P_{scat} = \frac{8R_{scat} R^2}{9(R_{heat} + R_{scat})^2} E_0^2 = \frac{R_{scat}}{R_{heat}} \langle P_{heat} \rangle.$	1,2
2.10b	Použijeme amplitudu elektrického pole $E_0 = \sqrt{2S/(\epsilon_0 c)} = 27,4 \text{ kV/m}$, vypočteme $P_{heat} = 6,82 \text{ nW}$ a $P_{scat} = 6,81 \text{ nW}$.	0,3

Produkce páry světlem

2.11a	Celkový počet nanočástic v nádobě je $N_{np} = h^2 a n_{np} = 7,3 \cdot 10^{11}$. Celková časová střední hodnota výkonu Joulovského ohřevu je $P_{st} = N_{np} P_{heat} = 4,98 \text{ kW}$. Tento výkon se spo-třebovává na produkci páry, $P_{st} = \mu_{st} L_{tot}$, kde $L_{tot} = c_{wa}(T_{100} - T_{wa}) + L_{wa} + c_{st}(T_{st} - T_{100}) = 2,62 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$. Tedy, hmotnost vygenerované páry za jednotku času je μ_{st} : $\mu_{st} = \frac{P_{st}}{L_{tot}} = 1,90 \cdot 10^{-3} \text{ kg s}^{-1}$.	0,6
2.11b	T Výkon dopadajícího světla na nádobu $P_{tot} = h^2 S = 0,01 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ MW m}^{-2} = 10,0 \text{ kW}$, a výkon parního generátoru známe z přechozí úlohy. Tedy $\eta = \frac{P_{st}}{P_{tot}} = 0,498$.	0,2
	Celkem	12,0