

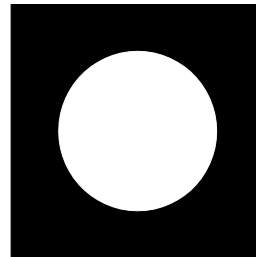
43. Mezinárodní fyzikální olympiáda — teoretická část

Tartu, Estonsko — úterý, 17. července 2012

- Celý test trvá 5 hodin. Jsou zadány 3 úlohy, celkem můžete získat 30 bodů. **Prosím, všimněte si, že bodování tří teoretických úloh není rovnoměrné!**
- Nesmíte otevřít obálku se zadáním před zvukovým signálem označujícím začátek soutěže (tři krátké zvuky).
- Nesmíte bez svolení opustit vaše pracovní místo. Pokud potřebujete pomoc (rozbitá kalkulačka, potřebujete na toaletu, apod.), zvedněte, prosím, příslušnou, cedulku „HELP“ nebo „TOILET“ s dlouhým držadlem nad váš pracovní box a nechte ji zvednutou, dokud se neobjeví organizátor.
- Vaše odpovědi musí být vyjádřeny v závislosti na těch veličinách, které jsou zvýrazněny v zadání, případně mohou obsahovat také fundamentální fyzikální konstanty, pokud je to třeba. Tedy, pokud je v textu uvedeno „výška rámečku je a a jeho šířka– b “ můžete v řešení použít veličinu a , zatímco veličinu b nikoliv (není-li zvýrazněna jinde v textu, viz níže). Ty veličiny, které jsou zvýrazněny v textu podotázky, mohou být použity pouze v odpovědích dané podotázky; ty veličiny, které jsou zvýrazněny v úvodním textu úlohy (nebo části úlohy), tj. mimo rámeček jakékoliv podotázky, mohou být použity v odpovědích celé úlohy (nebo její části).
- Používejte pouze přední (potištěné) strany listů papíru.
- Pro každou úlohu jsou určeny listy řešení (viz číslo a piktogram v záhlaví). Pište svá řešení na příslušné listy řešení. Pro každou úlohu jsou listy řešení očíslovány; používejte listy podle očíslování. **Vždy označte, kterou úlohou a kterou její částí se na daném listu zabýváte.**

Konečné odpovědi opište do příslušných rámečků **listů odpovědí**. Dostanete také papíry na **koncepty**; tyto používejte pro psaní věcí, které nechcete hodnotit. Pokud napíšete něco, co nechcete, aby bylo hodnoceno, do listů řešení (např. nesprávná řešení), tyto části škrtněte.

- Potřebujete-li více papíru pro danou úlohu, zvedněte, prosím, cedulku „HELP“ a sdělte organizátorovi číslo úlohy; dostanete dva listy řešení (můžete to udělat vícekrát).
- **Měli byste používat co možná nejméně textu:** snažte se vyjadřovat svá řešení především rovnicemi, čísly, symboly a diagramy. ~~Pokud je textové vysvětlení nevyhnutelné, zkuste psát kromě českých kometnářů i jejich anglické překlady (pokud text přeložíte špatně nebo ho vůbec nepřeložíte, bude hodnocen váš český text při moderaci s vedoucími).~~
- První jednoduchý zvukový signál vám oznámí, že máte k dispozici posledních 30 minut na řešení; druhý, dvojitý zvukový signál znamená 5 minut do konce; třetí, trojitý zvukový signál označuje konec času na řešení. **Po třetím zvukovém signálu musíte okamžitě přestat psát.** Vložte všechny papíry do obálky na vašem stole. **Nesmíte si vzít s sebou ven z místnosti žádný papír.** Pokud skončíte před konečným zvukovým signálem, zvedněte, prosím, cedulku.



Úloha T1. Zaměřeno na náčrtky (13 bodů)

Část A. Balistika (4,5 bodu)

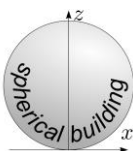
Míček hozený počáteční rychlostí v_0 se pohybuje v homogenním tíhovém poli v rovině x - z , kde osa x je vodorovná (horizontální) a osa z je svislá (vertikální), opačně orientovaná, než je směr tíhového zrychlení g ; zanedbejte odpor vzduchu.

i. (0,8 b.) Změnami úhlu odhodu (elevačního úhlu) míčku hozeného rychlostí o dané velikosti v_0 z počátku souřadnic, mohou být zasaženy cíle v oblasti popsané rovnicí

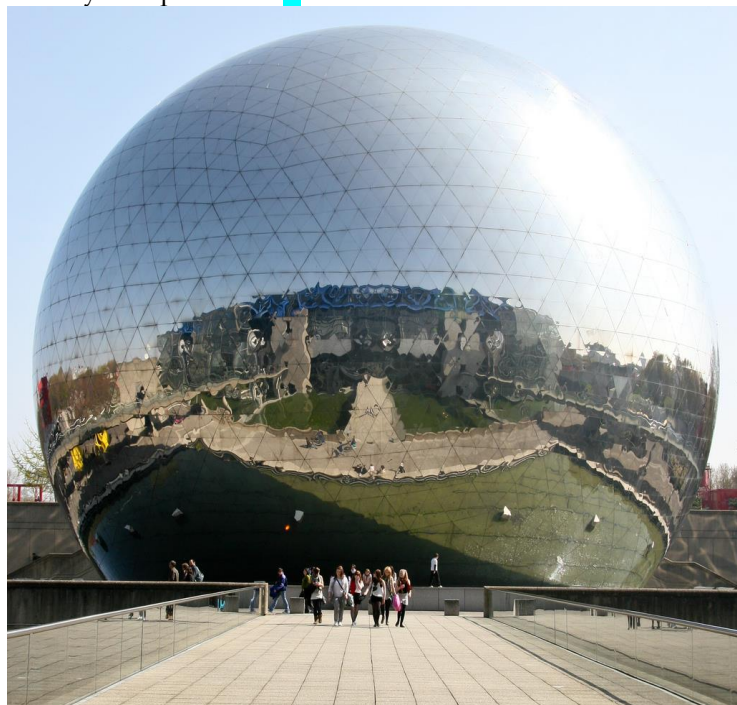
$$z \leq z_0 - kx^2;$$

tento fakt nemusíte dokazovat. Najděte konstanty z_0 a k .

ii. (1,2 b.) Nyní lze zvolit počáteční bod vrhu kdekoli v rovině $z = 0$ a elevační úhel může být nastaven, jak bude třeba; cílem je zasáhnout nejvyšší bod sférické budovy o poloměru R (viz obr.) malým objektem s co možná nejmenší velikostí počáteční rychlosti v_0 (před zasažením cíle nejsou povoleny odrazy od střechy). Načrtněte kvalitativně tvar optimální trajektorie míčku (použijte připravený rámeček v listu odpovědí). Pozn: **Body zde získáte za náčrt, ne za výpočet.**



iii. (2,5 b.) Jaká je minimální velikost počáteční rychlosti vrhu míčku $v_{\min}$ potřebná k zasažení nejvyššího bodu sférické budovy o poloměru R ?

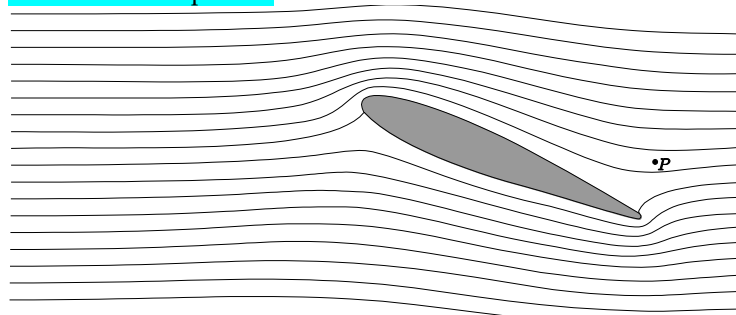


La Géode, Parc de la Villette, Paříž. Foto: katchooo/flickr.com

Část B. Proudění vzduchu okolo křídla (4 body)

Pro tuto část úlohy mohou být užitečné následující informace. Pro proudění kapaliny nebo plynu v trubici, platí podél proudnice vztah $p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const.}$, za předpokladu, že rychlost v je mnohem menší než je rychlost zvuku. Zde, ρ značí hustotu, h výšku, g tíhové zrychlení a p hydrostatický tlak. Proudnice jsou definovány jako trajektorie částic tekutiny (za předpokladu laminárního proudění). Členu $\frac{1}{2} \rho v^2$ se říká dynamický tlak.

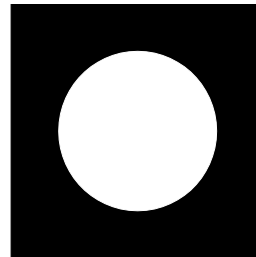
Na obrázku uvedeném níže je znázorněn řez křídla letadla spolu s proudnicemi vzduchu proudícího okolo křídla z pohledu vztahné soustavy spojené s křídlem. Předpokládejte, že (a) proudění vzduchu je dvojrozměrné (tj. vektory rychlosti vzduchu leží v rovině obrázku); (b) tvar proudnic nezávisí na rychlosti letadla; (c) nefouká žádný vítr; (d) dynamický tlak je mnohem menší než atmosférický $p_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Můžete použít pravítko k měření jakýchkoliv hodnot z obr. v listu odpovědí.



i. (0,8 b.) Je-li rychlost letadla vzhledem k zemi $v_0 = 100 \text{ m/s}$, jaká je rychlost vzduchu v_P v bodě P (znázorněném na obr.) vzhledem k zemi?

ii. (1,2 b.) Je-li vysoká relativní vlhkost vzduchu a rychlost letadla vzhledem k zemi překročí jistou kritickou hodnotu v_{crit} , vytváří se kondenzací za křídlem proud vodních kapiček. Kapičky se objeví v jistém bodě Q . Vyznačte bod Q v obrázku v listu odpovědí. Vysvětlete kvalitativně (použitím vztahů a co možná nejméně textu), jak jste určili polohu tohoto bodu.

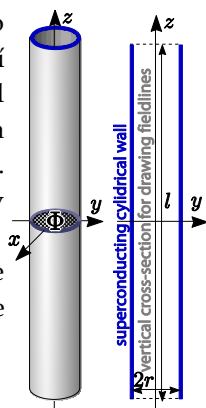
iii. (2,0 b.) Odhadněte kritickou rychlost v_{crit} použitím následujících údajů: relativní vlhkost nezvlhčeného vzduchu je $r = 90\%$ a jeho absolutní teplota je $T_a = 293 \text{ K}$. Tlak nasycené páry za této teploty je $p_{sa} = 2,31 \text{ kPa}$. Měrná tepelná kapacita vzduchu za konstantního tlaku je $c_p = 1,00 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, Tlak nasycené páry za teploty $T_b = 294 \text{ K}$ je $p_{sb} = 2,46$. Možná se vám může také hodit (ale nemusí, záleží na cestě, kterou se dáte) měrná tepelná kapacita vzduchu za konstantního objemu $c_v = 0,717 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. Relativní vlhkost vzduchu je definovaná jako poměr tlaku páry ku tlaku nasycené páry za dané teploty. Tlak nasycené páry je definován jako tlak páry, která je v rovnováze se svojí kapalinou.



Část C. Magnetická brčka („slámky“) (4,5 bodů)

Uvažujte válcovité trubičky ze supravodivého materiálu. Délka trubičky je l a její vnitřní poloměr r ; vždy předpokládejte $l \gg r$. Střed trubičky leží v počátku souřadnic a geometrická osa trubičky je totožná s osou z . Magnetický indukční tok průřezem trubičky v jejím středu $z = 0$, $x^2 + y^2 < r^2$ je Φ .

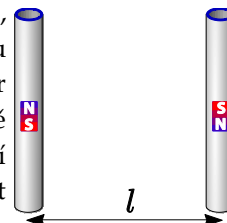
Supravodič je materiál, který vypuzuje veškeré magnetické pole (magnetické pole uvnitř supravodiče je nulové).

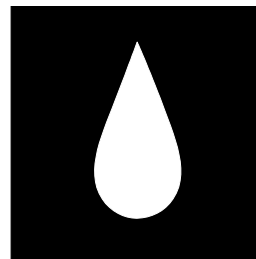


i. (0,8 b.) Načrtněte pět takových magnetických indukčních čar do příslušného rámečku v listu odpovědí, které procházejí pěti červenými tečkami vyznačenými na průřezu trubičky.

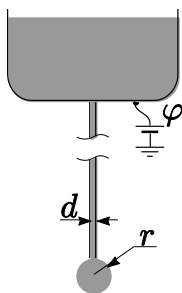
ii. (1,2 b.) Nalezněte sílu napjatosti T ve směru osy z ve středu trubičky (tj. sílu, kterou na sebe vzájemně působí obě poloviny trubičky, $z > 0$ a $z < 0$).

iii. (2,5 b.) Uvažujte nyní druhou trubičku, identickou a rovnoběžnou s trubičkou původní. Druhá trubička má opačný směr magnetického pole a její střed je v bodě $y = l$, $x = z = 0$ (takže trubičky tvoří protilehlé strany čtverce). Určete velikost magnetické síly F mezi oběma trubičkami.



**Úloha T2. Kelvinovo vodní kapátko (8 bodů)**

Dlouhá kovová trubička o vnitřním průměru d míří přímo dolů; voda pomalu kape z ústí na jejím spodním konci, viz obrázek. Vodu považujeme za elektricky vodivou; její povrchové napětí je σ a hustota je ρ . Vždy budeme předpokládat, že $d \ll r$. Zde r značí poloměr kapky visící pod ústím; tato kapka pomalu roste s časem, dokud se neoddělí od ústí trubičky díky tíhovému zrychlení g .

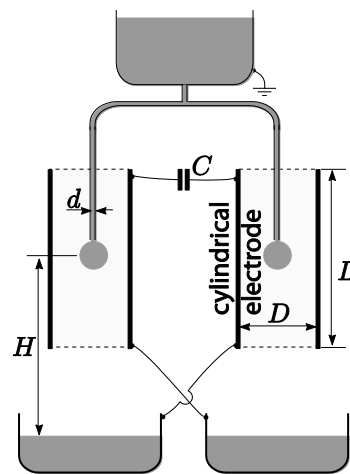
**Část A. Jedna trubička (4 body)**

- i. (1,2 b.) Najděte poloměr $r_{\max}$ kapky těsně před tím, než se oddělí od ústí trubičky.
- ii. (1,2 b.) Potenciál trubičky vzhledem k velmi vzdálenému okolí je ϕ . Nalezněte náboj kapky Q v situaci, kdy je její poloměr r .
- iii. (1,6 b.) Pro tento úkol předpokládejme, že r je konstantní a ϕ pomalu roste. Kapka začne být nestabilní a rozpadne se na kousky, pokud hydrostatický tlak uvnitř kapky začne být menší než atmosférický tlak. Určete kritický potenciál $\phi_{\max}$, při kterém tato situace nastane.

Část B. Dvě trubičky (4 body)

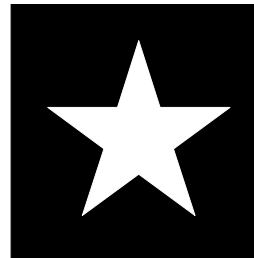
Přístroj nazývaný se „Kelvinovo vodní kapátko“ se skládá z dvou trubiček (identických s těmi, které jsou popsány v Části A), spojených T-spojkou – viz obrázek. Konce obou trubiček jsou uprostřed dvou válcových elektrod (o výšce L a průměru

$D, L \gg D \gg r$); frekvence kapání je pro obě trubičky n kapek za jednotku času. Kapky padají z výšky H do vodivých nádob pod ústími trubiček, křížem propojených s elektrodami, jak je ukázáno na obrázku; elektrody jsou propojeny přes kondenzátor o kapacitě C . Celkový náboj na systému nádob a na elektrodách je nulový. Všimněte si, že horní zásobník vody je uzemněný.



První kapička, která se oddělí, má mikroskopický náboj, který způsobí nerovnováhu mezi oběma stranami a nabije se kondenzátor.

- i. (1,2 b.) Vyjádřete velikost náboje Q_0 kapek oddělujících se v okamžiku, kdy je náboj na kondenzátoru roven q , užitím veličiny $r_{\max}$ (z Části A-i). Zanedbejte efekt popsany v Části A-iii.
- ii. (1,5 b.) Najděte závislost náboje q na čase t tak, že jej budete aproximovat spojitou funkcí $q(t)$ a budete předpokládat, že $q(0) = q_0$.
- iii. (1,3 b.) Fungování kapátka může být zabráněno efektem ukázaným v Části A-iii. Navíc existuje limit dosažitelného napětí mezi elektrodami $U_{\max}$ z důvodu elektrostatického tlaku mezi kapkou a nádobou pod ní. Určete $U_{\max}$.

**Úloha T3. Formování protohvězdy (9 bodů)**

Představme si model formování hvězdy následovně. Sférický oblak (koule) řídkého mezihvězdného plynu, který je na počátku v klidu, začne kolapsovat vlivem vlastní gravitace. Počáteční poloměr koule je r_0 a její hmotnost m . Teplota okolí (které je mnohem řidší než plyn) je všude T_0 . Plyn považujte za ideální. Průměrná molární hmotnost plynu je μ a jeho Poissonova konstanta je $\gamma > 4/3$. Předpokládejme, že $GM\mu/r_0 \gg RT_0$, kde R je molární plynová konstanta a G gravitační konstanta.

i. (0,8 b.) Během značné části probíhajícího kolapsu je plyn tak průhledný, že jakékoliv generované teplo je okamžitě vyzařeno, tj. koule zůstává v termodynamické rovnováze se svým okolím. Kolikrát (n) se zvětší tlak, pokud se poloměr zmenší na polovinu ($r_1 = 0,5r_0$)? Předpokládejme, že hustota plynu zůstává homogenní.

ii. (1 b.) Odhadněte (přibližně) čas t_2 potřebný k tomu, aby se poloměr zmenšil z r_0 na $r_2 = 0,95r_0$. Zanedbejte změnu gravitačního pole na povrchu koule vzhledem k malé změně poloměru.

iii. (2,5 b.) Budeme-li předpokládat, že tlak je zanedbatelný, najděte čas $t_{r \rightarrow 0}$ potřebný k tomu, aby koule zkolabovala z r_0 na mnohem menší poloměr – použitím Keplerova zákona pro eliptické orbity.

iv. (1,7 b.) Při jistém poloměru $r_3 \ll r_0$ začne být plyn dostatečně hustý na to, aby se stal neprůhledným pro tepelné záření. Vypočítejte množství tepla Q vyzařeného během kolapsu, kdy se poloměr změnil z r_0 na r_3 .

v. (1 b.) Pro poloměry menší než r_3 můžeme zanedbat tepelné vyzařování. Určete, jak závisí teplota sféry T na poloměru $r < r_3$.

vi. (2 b.) Nakonec již nemůžeme zanedbávat vliv tlaku na dynamiku plynu a kolaps se zastaví na poloměru $r = r_4$ (kde $r_4 \ll r_3$). Záření však může stále být zanedbáno a teplota ještě není dostatečně vysoká, aby zažehla jadernou fúzi. Tlak takové protohvězdy již není homogenní, ale stále je možné dělat hrubé odhady se zanedbáním číselných koeficientů. Odhadněte konečný poloměr r_4 a příslušnou teplotu T_4 .