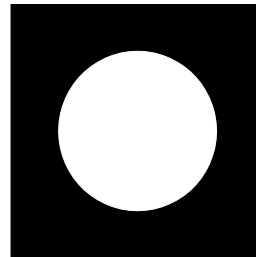


ŘEŠENÍ

Úloha 1



Úloha T1. Zaměřeno na náčrtky (13 bodů)

Část A. Balistika (4,5 bodu)

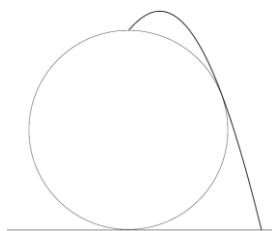
i. (0,8 b.) Hodíme-li míček svisle vzhůru, dosáhne bodu $x = 0$, $z = v_0^2/2g$ (jak plyne ze zákona zachování energie). Porovnáme-li tento výsledek s nerovností $z \leq z_0 - kx^2$ dojedeme k závěru, že

$$z_0 = \frac{v_0^2}{2g}. \quad [0.3 \text{ bodu}]$$

Uvažujme asymptotický případ $z \rightarrow -\infty$; trajektorie míčku je parabola a v této limitě je vodorovné posunutí (pro dané z) velmi citlivé na křivost paraboly: čím plošší je parabola, tím větší je posunutí. Parabola je nejplošší, pokud je míček vržen vodorovně, $x = v_0 t$ a $z = -gt^2/2$, tj. trajektorie míčku je popsána rovnicí $z = -gx^2/2v_0^2$. Připomeňme, že $z \leq z_0 - kx^2$, tj. $-\frac{gx^2}{2v_0^2} \leq z_0 - kx^2 \Rightarrow k \leq \frac{g}{2v_0^2}$. Kdyby platilo $k < \frac{g}{2v_0^2}$, znamenalo by to, že existuje mezera mezi parabolickou úsečí, $z \leq z_0 - kx^2$, a danou trajektorií $z = -gt^2/2$. Tuto trajektorii lze však považovat za optimální pro zasažení cílů hluboko pod povrchem ($z \rightarrow -\infty$), tedy tato mezera by neměla existovat. Z toho usoudíme, že

$$k = \frac{g}{2v_0^2}. \quad [0.5 \text{ bodu}]$$

ii. (1,2 b.) Poznamenejme, že trajektorie míčku je otočitelná a podle zákona zachování mechanické energie se můžeme ekvivalentně tázat, jaká je minimální velikost počáteční rychlosti míčku nutná k tomu, aby míček vržený z nejvyššího bodu kulové budovy dopadl na zem, aniž by zasáhl střešku a jaká je trajektorie tohoto vrhu. Snadno si představíme, že se tato trajektorie musí někde dotknout střešky nebo musíme míček vrhnout vodorovně z nejvyššího bodu s poloměrem křivosti trajektorie rovným R . Skutečně, kdyby nenastal ani jeden z těchto dvou případů, mohli bychom vrhnout pod stejným úhlem o něco menší rychlostí a míček by opět dopadl na zem bez toho, že by před tím zasáhl střešku. Navíc, kdybychom v nejvyšším bodě vrhali vodorovně, trajektorie se nedotýká ani neprotíná střešku budovy, protože parabola má maximální křivost v nejvyšším bodě. Mohli bychom tedy ponechat stejnou velikost počáteční rychlosti a nepatrně zvětšit elevační úhel (z vodorovného směru, mírně šikmo nahoru). Nová trajektorie nebude tečná ke střeše v nejvyšším bodě, ani se střešky nedotkne v žádném jiném bodě. Nyní můžeme mírně zmenšit velikost počáteční rychlosti a argumentovat stejně jako před chvílí. Učiníme tedy závěr, že optimální trajektorie má tvar zobrazený na obrázku.



iii. (2,5 b.) Budeme-li řešit úlohu hrubou silou, napíšeme matematicky podmínku, že se optimální trajektorie protíná s budovou ve dvou bodech a dotýká se v bodě jednom. Tato

podmínka bude reprezentována algebraickou rovnicí čtvrtého stupně, která je reálně neřešitelná v daném časovém intervalu.

Všimněme si, že vnitřek budovy musí ležet uvnitř oblasti bodů zasažitelných míčkem vrženým z nejvyššího bodu počáteční rychlostí o velikosti $v_{\min}$. Skutečně, jestliže jsme schopni přehodit budovu, můžeme zasáhnout jakýkoliv bod uvnitř zmenšováním elevačního úhlu. Na druhou stranu, hranice oblasti zasažitelných bodů se musí budovy dotýkat. Kdyby totiž byla mezera mezi hranicemi oblasti zasažitelných bodů a budovou, bylo by možné zasáhnout bod těsně nad bodem dotyku trajektorie a budovy. Trajektorie procházející tímto bodem by se budovy nikde nedotýkala, což je spor s předpokladem o optimální trajektorii.

Tedy s rychlostí v_0 odpovídající optimální trajektorii, se oblast zasažitelných bodů dotýká budovy. Díky symetrii, existují dva body dotyku této oblasti s budovou (pro menší rychlosti existují 4 průsečíky, pro vyšší rychlosti žádný). Umístíme-li počátek souřadnic na vrchol budovy, body dotyku jsou definovány touto soustavou rovnic:

$$x^2 + z^2 + 2zR = 0, \quad z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Vyloučíme z těchto rovnic z a dostaneme bikvadratickou rovnici pro x ,

$$x^4 \left(\frac{g}{2v_0^2} \right)^2 + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right) + \left(\frac{v_0^2}{4g} + R \right) \frac{v_0^2}{g} = 0.$$

Rychlost, pro níž má tato rovnice právě dvě reálná řešení, získáme z podmínky, že diskriminant této rovnice je roven 0,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v_0^2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{gR}{v_0^2} \Rightarrow \frac{gR}{v_0^2} = 2.$$

Rychlost získaná řešením této rovnice je rychlost odhodu, resp. dopadu, z nejvyššího bodu budovy. Rychlost dopadu na zem, resp. počáteční rychlost vrhu ze země, je nutno dopočítat ze zákona zachování mechanické energie,

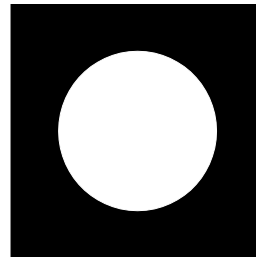
$$v_{\min} = \sqrt{v_0^2 + 4gR} = 3 \sqrt{\frac{gR}{2}}.$$

Část B. Proudění vzduchu okolo křídla (4 body)

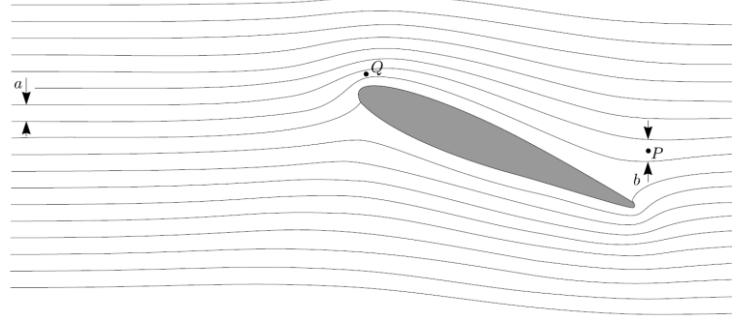
i. (0,8 b.) Ve vztažné soustavě spojené s letadlem, je v prostoru mezi dvěma proudnicemi objemový tok vzduchu (prošlý objem za jednotku času) konstantní díky rovnici kontinuity. Tento objemový tok je dán jako součin rychlosti proudění a obsahu příčného průřezu oblasti. Tedy, díky dvourozměrné geometrii je objemový tok přímo úměrný vzdálenosti mezi dvěma proudnicemi a lze ho měřit z obrázku v zadání. Jelikož nefouká vítr, je rychlost vzduchu ve vztažné soustavě spojené s letadlem v_0 . Změříme vzdálenosti $a = 10 \text{ mm}$ a $b = 13 \text{ mm}$ (viz obr.) a můžeme psát $v_0 a = u b$ a tedy $u = v_0 \frac{a}{b}$. Jelikož jsou v bodě P proudnice vodorovné, všechny rychlosti jsou rovnoběžné a vektorový součet přechází v součet skalární. Rychlost vzduchu vzhledem k zemi je $v_p = v_0 - u = v_0 \left(1 - \frac{b}{a} \right) = 23 \text{ m/s}$.

ŘEŠENÍ

Úloha 1



ii. (1,2 b.) I když je dynamický tlak $\frac{1}{2}\rho v^2$ relativně malý, způsobuje jisté adiabatické komprese a expanze. V expandujících oblastech teplota klesá a tedy klesá i tlak nasycených par. Pokud teplota dosáhne rosného bodu, objeví se kapičky. Tent jev nastane nejdříve v bodě, kde je maximální adiabatická expanze, tj. kde je minimální aerostatický tlak a následně, z Bernoulliho rovnice $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst}$, kde je maximální dynamický tlak. Tedy v místě, kde je rychlost vzduchu vzhledem k křídlu maximální a vzdálenost proudnic minimální. Tento bod je v obr. znázorněn jako Q.



iii. (2,0 b.) Nejprve musíme vypočítat rosný bod vzduchu s daným obsahem vodní páry (protože relativní změna tlaku bude malá, můžeme zanedbat závislost rosného bodu na tlaku). Tlak vodní páry je $p_w = p_{sa}r = 2,08 \text{ kPa}$. Relativní změna tlaku nasycených vodních par je malý, čili můžeme linearizovat její teplotní závislost,

$$\frac{p_{sa} - p_w}{T_a - T} = \frac{p_{sb} - p_{sa}}{T_b - T_a} \Rightarrow T_a - T = (T_b - T_a) \frac{(1-r)p_{sa}}{p_{sb} - p_{sa}};$$

číselně $T \approx 291,5 \text{ K}$. Dále, musíme nalézt souvislost mezi rychlostí vzduchu a teplotou. K tomu použijeme zákon zachování mechanické energie. Vhodně připravenou verzi zákona zachování energie představuje Bernoulliho rovnice. Použití této rovnice poskytne velmi dobrý model reality, ale striktně řečeno, měla by být změněna s ohledem na stlačitelnost vzduchu a s ní související mechanickou práci. Uvažujme 1 mol vzduchu mající hmotnost μ a objem $V = RT/p$. Zřejmě je děj velmi rychlý a uvažované množství vzduchu velké, tedy přenos tepla v uvažovaném vzduchu je zanedbatelný. Navíc se jedná o děj podzvukový. Můžeme tedy děje považovat za adiabatické. Uvažujme úsek proudové trubice (myšlená trubice tvořená proudnicemi). Označíme fyzikální veličiny na jednom jeho konci indexem 1 a na druhém konci indexem 2. Jestliže na jednom konci vteče do uvažovaného úseku jeden mol vzduchu, stejné množství vzduchu musí vytéci na druhém konci úseku. Vtékající plyn přináší kinetickou energii $\frac{1}{2}\mu v_1^2$ a vytékající plyn odnáší energii $\frac{1}{2}\mu v_2^2$. Na vtékajícím plynu konají tlakové síly práci $p_1 V_1 = RT_1$, otékající plyn koná práci $p_2 V_2 = RT_2$. Definujme ještě molární tepelné kapacity, $C_V = \mu c_V$ a $C_P = \mu c_P$. Vtékající vzduch nese tepelnou energii $C_V RT_1$ a vytékající odnáší $C_V RT_2$. Celkově můžeme tedy napsat energetickou bilanci jako $\frac{1}{2}\mu v^2 +$

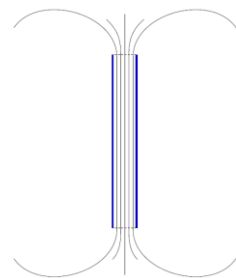
$C_p T = \text{konst}$. Odtud snadno vyjádříme $\Delta \frac{v^2}{2} = \frac{1}{c} v_{crit}^2 \left(\frac{a^2}{c^2} - 1 \right) = c_p \Delta T$, kde c je vzdálenost proudnic v bodě Q. Tedy,

$$v_{crit} = c \sqrt{\frac{2c_p \Delta T}{a^2 - c^2}} \approx 23 \text{ m/s},$$

kde jsme použili $c \approx 4,5 \text{ mm}$ a $\Delta T = 1,5 \text{ K}$. Poznamenejme, že ve skutečnosti bude požadovaná rychlost pravděpodobně o něco vyšší, protože pro rychlou kondenzaci je třeba přesycení par. Nicméně, řádově je tento výsledek jistě platný.

Část C. Magnetická brčka („slámky“) (4,5 bodů)

i. (0,8 b.) Díky supravodivým stěnám nemůže magnetické pole překročit stěny brčka, tedy magnetický tok je uvnitř trubičky konstantní. Uvažujeme-li uzavřenou křivku uvnitř trubičky, nesmí na ní být žádná rotace magnetického pole. Tedy, siločáry nemohou být zakřiveny a magnetické pole je uvnitř trubičky homogenní. Siločáry vně trubičky připomínají siločáry solenoidu.



ii. (1,2 b.) Uvažujme změnu magnetické energie při (virtuálním) prodloužení trubičky o malou délku Δl . Magnetický tok trubičkou zůstane zachován. Jakákoliv změna toku by způsobila nenulové elektromotorické napětí $\frac{d\Phi}{dt}$ a vzhledem k nulové rezistivitě nekonečný proud. Tedy, magnetická indukce je $B = \frac{\Phi}{\pi r^2}$. Hustota energie magnetického pole je $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Tedy, změnu magnetické energie vypočteme

$$\Delta W = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 \Delta l = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2} \Delta l.$$

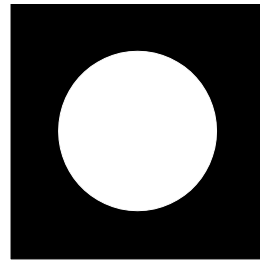
Tento nárůst energie je způsoben prací, kterou vykonala síla prodlužující trubičku, $\Delta W = T \Delta l$. Tedy, pro sílu platí

$$T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}.$$

iii. (2,5 b.) Analyzujme, jak by byla změna magnetické energie, pokud bychom jednu trubičku posunuli o malou vzdálenost. Magnetické pole uvnitř trubiček zůstane nezměněné díky zachování magnetického toku, ale magnetické pole vně trubiček se změní. Magnetické pole vně trubiček je definováno následující podmínkou. Neexistuje žádná cirkulace vektoru $\vec{B}$, protože vně trubiček netečou žádné proudy. Neexistují žádné jiné zdroje siločar, než jsou konce trubiček. Každý konec trubičky je zdrojem siločar se stálým magnetickým tokem $\pm \Phi$. Toto jsou přesně stejné podmínky, které definují elektrické pole čtyř nábojů $\pm Q$. Víme, že je-li vzdálenost mezi náboji mnohem větší, než geometrické rozměry nábojů, lze je považovat za náboje bodové. Tedy, konce trubiček budeme považovat za magnetické bodové náboje. Abychom vypočítali sílu mezi dvěma magnetickými náboji (magnetickými monopóly), vybudujeme korespondenci mezi magnetickými a elektrickými veličinami.

ŘEŠENÍ

Úloha 1



Mezi dvěma elektrickými náboji Q vzdálenými od sebe a působí síla $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^2}$ a v místě jednoho z nábojů má elektrické pole druhého hustotu energie $w = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{Q^2}{a^4}$, tedy můžeme psát, $F = 8\pi w a^2$. Toto je obecné vyjádření síly (pro případ, kdy mají siločáry pole stejný tvar jako v případě dvou opačných nábojů stejné absolutní hodnoty) závisící pouze na hustotě energie a nezávisící na původu pole. Můžeme tedy toto vyjádření použít pro naše magnetické pole. Skutečně, sílu lze vypočítat jako derivaci potenciální energie podle virtuálního posunutí zdroje (elektrického nebo magnetického náboje). Jsou-li hustoty energie dvou polí rovné v jednom bodě, jsou si rovné všude a musí se tedy rovnat i příslušné potenciální energie. Jak plyne z Gaussovy věty, pro bodový zdroj stálého magnetického toku Φ , ve vzdálenosti a je indukce $B = \frac{1}{4\pi} \frac{\Phi}{a^2}$. Tedy, hustota energie $w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{32\pi^2\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^4}$. Následně,

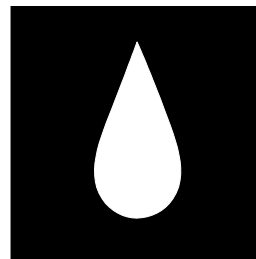
$$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{a^2}.$$

Pro dvě brčka máme čtyři magnetické náboje. Podélné síly (rovnoběžné s osami trubiček) se vyruší (síly pro každé brčko působí v opačném směru). Kolmá síla je součtem síly přitažlivé mezi opačnými náboji, $F_1 = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}$, a odpuzivé síly opačných nábojů, $F_2 = \frac{\sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{2l^2}$. Celková přitažlivá síla tedy je

$$F = 2(F_1 - F_2) = \frac{4 - \sqrt{2}}{8\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}.$$

ŘEŠENÍ

Úloha 2



Úloha T2. Kelvinovo vodní kapátko (8 bodů)

Část A. Jedna trubička (4 body)

i. (1,2 b.) Napíšeme rovnováhu sil pro kapičku. Protože $d \ll r$, můžeme zanedbat sílu $\frac{\pi}{4}\Delta p d^2$ způsobenou nárůstem tlaku Δp uvnitř trubičky. Tedy, tíhová síla $\frac{4}{3}\pi r_{max}^3 \rho g$ je v rovnováze s kapilární silou. Jakmile se kapička oddělí od trubičky, vodní povrch vytvoří v blízkosti konce trubičky „krček“, který má svislou tečnu. Ve vodorovném průřezu krčku je kapilární síla svislá a vypočteme ji jako $\pi \sigma d$. Tedy,

$$r_{max} = \sqrt[3]{\frac{3\sigma d}{4\rho g}}.$$

ii. (1,2 b.) Protože $d \ll r$, můžeme zanedbat změny kapacity kapičky způsobené trubičkou. Pro potenciál kapičky platí $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$. Tedy,

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \varphi r.$$

iii. (1,6 b.) Přetlak uvnitř kapičky je způsoben kapilárním tlakem $2\sigma/r$ (zvyšuje vnitřní tlak) a elektrostatickým tlakem $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \varphi^2/r^2$ (zmenšuje vnitřní tlak). Tedy, znaménko přetlaku se bude měnit, pokud $\frac{1}{2}\epsilon_0 \varphi_{max}^2/r^2 = 2\sigma/r$, tedy

$$\varphi_{max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}.$$

Výraz pro elektrostatický tlak uvedený výše lze odvodit následovně. Elektrostatická síla působící na povrchový náboj o hustotě τ a obsahu S je dána vztahem $F = \tau S \cdot \vec{E}$, kde $\vec{E}$ je elektrické pole generované zbytkem náboje mimo element povrchového náboje samotný. Tato síla je kolma na povrch, tedy výraz F/S lze interpretovat jako tlak. Povrchový náboj vytváří pole $\Delta E = \tau/\epsilon_0$ (což plyne z Gaussovy věty); uvnitř kapičky není žádné elektrické pole díky vodivosti kapičky. Tedy $\vec{E} - \frac{1}{2}\Delta E = 0$. Vně kapičky je pole $E = \vec{E} + \frac{1}{2}\Delta E$. Tedy $\vec{E} = \frac{1}{2}\Delta E$. Dohromady dostaneme výraz uvedený výše.

Alternativně lze tento výraz odvodit úvahou o virtuálním posunutí povrchu kondenzátoru a porovnáním tlakové práce $p\Delta V$ se změnou energie elektrostatického pole $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \Delta V$.

Řešení úlohy lze také odvodit z požadavku, že mechanická práce dW vykonaná pro infinitezimální nárůst kapičky musí být nulová. Ze zákona zachování energie, $dW + dW_{el} = \sigma d(4\pi r^2) + \frac{1}{2}\varphi_{max}^2 dC_d$, kde kapacita kapičky $C_d = 4\pi\epsilon_0 r$.

Elektrická práce $dW_{el} = \varphi_{max} dq = 4\pi\epsilon_0 \varphi_{max}^2 dr$. Položíme-li $dW = 0$, dostaneme rovnici pro φ_{max} , která dává stejný výsledek jako výše.

Část B. Dvě trubičky (4 body)

i. (1,2 b.) Tato úloha je v podstatě totožná s úlohou ii v části A, s tím rozdílem, že okolní potenciál je potenciál elektrody, $-U/2$ (kde $U = q/C$ je napětí na kondenzátoru) a kapička je uzemněná, má tedy potenciál nulový. Jelikož není řečeno, která elektroda je kladná, lze volit opačné znaménka potenciálu. Protože je válcová elektroda dlouhá, efektivně odstihuje potenciál okolí (podlaha, zdi, atd.) Tedy, vzhledem ke svému okolí je potenciál kapičky $U/2$. Použitím výsledku úlohy ii v části A dostaneme

$$Q = 2\pi\epsilon_0 U r_{max} = \frac{2\pi\epsilon_0 q r_{max}}{C}.$$

ii. (1,5 b.) Znaménko náboje kapičky je stejné jako je náboj opačné desky kondenzátoru (která je připojena ke vzdálenější elektrodě). Tedy, když kapička padá do mísy, zvyšuje náboj kondenzátoru o dq ,

$$dq = 2\pi\epsilon_0 U r_{max} dN = 2\pi\epsilon_0 r_{max} n dt \frac{q}{C},$$

kde $dN = n dt$ je počet kapiček, které padají za čas dt . Toto je jednoduchá lineární diferenciální rovnice, jejíž řešení je

$$q = q_0 e^{\gamma t}, \gamma = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{max} n}{C} = \frac{\pi\epsilon_0 n}{C} \sqrt{\frac{6\sigma d}{\rho d}}.$$

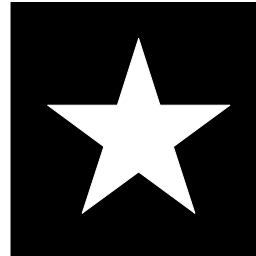
iii. (1,3 b.) Kapičky dopadnou do mísy, jestliže jejich mechanická energie mgH (kde m je hmotnost kapičky) je dostatečně velká, aby překonala elektrostatickou sílu. Kapička začíná padat, kde je elektrický potenciál 0, což je součet potenciálu $U/2$ elektrody a potenciálu kapičky $-U/2$. Její pohyb není ovlivňován elektrickým polem kapičky samotné, tedy musí spadnout z potenciálové hladiny $U/2$ dolů na potenciál $-U/2$, čemuž odpovídá změna elektrostatické energie $UQ \leq mgH$, kde $Q = 2\pi\epsilon_0 U r_{max}$ (viz výše). Tedy,

$$U_{max} = \frac{mgH}{2\pi\epsilon_0 U_{max} r_{max}},$$

$$U_{max} = \sqrt{\frac{H\sigma d}{2\epsilon_0 r_{max}}} = \sqrt[6]{\frac{H^3 g \sigma^2 \rho d^2}{6\epsilon_0^3}}.$$

ŘEŠENÍ

Úloha 3



Úloha T3. Formování protohvězdy (9 bodů)

i. (0,8 b.) Podle zadání se nemění teplota plynu, tedy $pV = \text{konst.}$ Jelikož je objem úměrný r^3 , platí $p \sim r^{-3}$, tedy

$$\frac{p(r_1)}{p(r_0)} = 2^3 = 8.$$

ii. (1 b.) Během uvažovaného časového intervalu je tlak zanedbatelný. Plyn se tedy smršťuje volným pádem. Jelikož se dosud koule příliš nesmršťovala, gravitační pole na jejím povrchu se téměř nezměnilo a zrychlení nejkratnější vnější vrstvy plynu lze tedy považovat přibližně za konstantní. Tedy,

$$t \approx \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{Gm/r_0^2}} = \sqrt{\frac{0,1r_0^3}{Gm}}.$$

iii. (2,5 b.) Nejkratnější vnější vrstva koule je gravitačně ovlivněna zbytkem plynu stejným způsobem, jako by celá hmotnost zbytku byla soustředěna do středu koule. Uvažujeme tedy Keplerovský pohyb: doba pádu libovolné částice z vnější vrstvy odpovídá polovině periody velmi výstředné eliptické trajektorie. Se zvětšováním výstřednosti elipsa degeneruje v úsečku spojující obě ohniska. Jedno ohnisko musí být ve středu plynové koule (podle 1. Keplerova zákona), druhé je ve vzdálenosti r_0 . Periodu určíme podle 3. Keplerova zákona z velké poloosy elipsy. Velká poloosa je zřejmě $r_0/2$ a zajímá nás polovina periody,

$$\left(\frac{2\pi}{2t_{r \rightarrow 0}}\right)^2 \frac{r_0}{2} = \frac{Gm}{(r_0/2)^2} \Rightarrow t_{r \rightarrow 0} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8Gm}}.$$

Alternativně je možné vyjít ze zákona zachování mechanické energie $\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{Gm}{r} = E$ (který je možno získat integrací z 2. Newtonova pohybového zákona $\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2}$ s $E = -\frac{Gm}{r_0}$, separovat proměnné ($\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}$) a napsat integrál $t = -\int \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2Gm}{r}}}$. Tento integrál je poměrně pracný a tudíž těžko spočitatelný během časového limitu daného během řešení MFO. Nicméně použitím substitucí $\xi = \sqrt{2E + 2Gm/r}$ a $v = \sqrt{2E}$ lze dojít ke stejnému výsledku jako v případě použití Keplerova zákona.

iv. (1,7 b.) Platí stavová rovnice plynu,

$$p = \frac{mRT_0}{\mu V}.$$

Práce gravitační síly tedy je

$$W = -\int_{V_{zac}}^{V_{kon}} p dV = -\frac{mRT_0}{\mu} \int_{\frac{4}{3}\pi r_0^3}^{\frac{4}{3}\pi r_3^3} \frac{dV}{V} = \frac{3mRT_0}{\mu} \ln \frac{r_0}{r_3}.$$

Teplota zůstává konstantní, nemění se tedy ani vnitřní energie plynu. Podle 1. termodynamického zákona je tedy vyzářené teplo rovno práci gravitační síly W .

v. (1 b.) Smršťování pokračuje adiabaticky, $TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$ Tedy,

$$T = T_0 \left(\frac{r_3}{r}\right)^{3\gamma-3}.$$

vi. (2 b.) Během kolapsu se gravitační energie měnila na teplo. Jelikož je $r_4 \ll r_3$, lze přeměněnou gravitační energii odhadnout jako $\Delta\Pi = -Gm^2(r_4^{-1} - r_3^{-1}) \approx -Gm^2/r_4$ (přesné řešení integrací přidává číselný faktor 3/5). Teplo odhadneme podle vztahu

$$\Delta Q = c_v \frac{m}{\mu} (T_4 - T_0) \approx c_v \frac{m}{\mu} T_4 = \frac{R}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} T_4 \approx \frac{m}{\mu} RT_4.$$

Pro teplotu T_4 použijeme výsledek předchozí úlohy,

$$T_4 = T_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3}. \text{ Jelikož počáteční celková energie byla}$$

přibližně nulová, můžeme psát $\Delta Q + \Delta\Pi \approx 0$. Dostáváme,

$$\frac{Gm}{r_4} \approx \frac{m}{\mu} RT_0 \left(\frac{r_3}{r_4}\right)^{3\gamma-3} \Rightarrow r_4 \approx r_3 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{1}{3\gamma-4}},$$

tedy

$$T_4 \approx T_0 \left(\frac{RT_0 r_3}{\mu m G}\right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}.$$

Alternativně je možné získat výsledek přibližnou rovností hydrostatického tlaku $\rho r_4 \frac{Gm}{r_4^2}$ s tlakem plynu $p_4 = \frac{\rho}{\mu} RT_4$. Výsledek je totožný s výsledkem uvedeným výše.