



Úloha E1. Magnetická permeabilita vody (10 bodů)

Část A. Tvar vodní hladiny kvalitativně (1 bod)

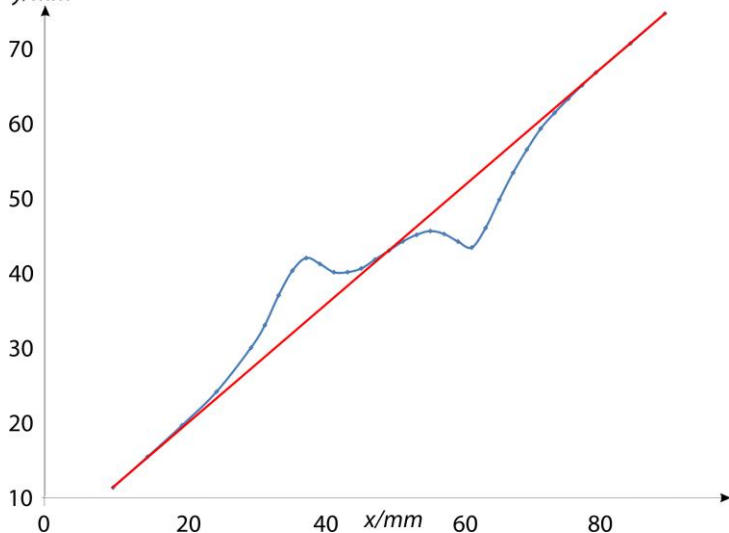
Pozorováním odrazů od vodní hladiny lze zjistit, že hladina má nad magnetem jedno relativně ploché minimum. Správná je tedy varianta D (plný bodový zisk bude udělen i za odpověď varianta B). Tento profil znamená, že voda je odpuzována od magnetu, což znamená $\mu < 1$ (poznamenejme, že feromagnety s $\mu > 1$ jsou přitahovány).

Část B. Přesný tvar vodní hladiny (7 bodů)

i. (1,6 b.) Naměřené hodnoty výšky stopy na stínítku y v závislosti na vodorovné poloze x posuvného měřítka jsou v tabulce.

x / mm	10	15	20	25	30	32	34	36
y / mm	12	16	20	24	30	33	37	41
x / mm	38	40	42	44	46	48	50	52
y / mm	42	41	40	40	41	42	43	44
x / mm	54	56	58	60	62	64	66	68
y / mm	45	46	45	44	44	46	50	54
x / mm	70	72	74	76	78	80	85	90
y / mm	57	60	62	64	65	67	71	75

ii. (0,7 b.)



iii. (0,7 b.) Pokud by byl vodní povrch plochý, byla by závislost y na x lineární a $\tan \alpha_0$ by byla směrnici této lineární závislosti. V extrémních polohách ukazovátka dopadá laserový paprsek na plochou hladinu daleko od magnetu. Spojíme-li tedy tyto extrémní polohy úsečkou (červená úsečka v obr. 13), dostaneme závislost odpovídající plochému vodnímu povrchu. Úhel α_0 lze tedy snadno určit z extrémních bodů $\alpha_0 = \arctg((75-12)/(90-10)) = 38^\circ$.

iv. (1,4 b.) Pro rychlejší výpočty je výhodné z grafu odečíst svislé vzdálenosti modré křivky od červené úsečky, které odpovídají výrazu $y - y_0 - (x - x_0) \tan \alpha_0$. V tab. jsou uvedeny vypočtené hodnoty $tg \beta$.

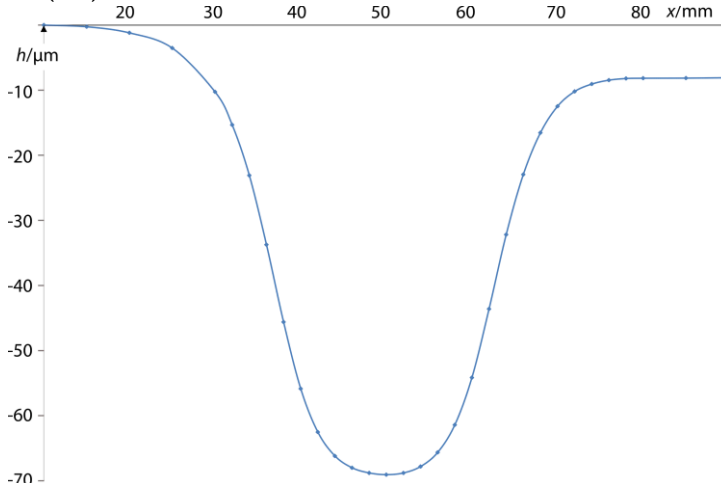
x / mm	10	15	20	25	30	32	34	36
$tg \beta / 10^5$	0	10	27	66	204	303	473	591
x / mm	38	40	42	44	46	48	50	52
$tg \beta / 10^5$	597	428	239	128	53	26	0	-26
x / mm	54	56	58	60	62	64	66	68
$tg \beta / 10^5$	72	145	278	449	606	536	388	254
x / mm	70	72	74	76	78	80	85	90
$tg \beta / 10^5$	154	74	40	20	6	2	2	0

v. (1,6 b.) Výšku hladiny dostaneme jako integrál $h = \int tg \beta dx$. Provedeme tedy numerickou integraci, jejíž výsledky jsou uvedeny v tabulce.

x / mm	10	15	20	25	30	32	34	36
$-h / \mu\text{m}$	0	0	1	4	10	15	23	34
x / mm	38	40	42	44	46	48	50	52
$-h / \mu\text{m}$	46	56	63	66	68	69	69	69
x / mm	54	56	58	60	62	64	66	68
$-h / \mu\text{m}$	68	66	61	54	44	32	23	17
x / mm	70	72	74	76	78	80	85	90
$-h / \mu\text{m}$	12	10	9	8	8	8	8	8

Poznamenejme, že výška hladiny na konci tabulky by také měla být 0 (magnetem neporušená oblast). Nenulovou výšku lze vysvětlit nepřesnostmi měření.

vi. (1 b.)



Polohu magnetu lze určit pomocí posuvného měřidla. Nalezneme polohy, kdy paprsek dopadá nad hrany magnetu, a z těchto poloh vypočítáme průměr magnetu asi 24 mm. Díky

REŠENÍ

ÚLOHA E1



symetrii bude střed magnetu nad minimem výšky vodní hladiny.

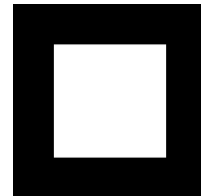
Část C. Magnetická permeabilita (2 b.)

Vodní povrch zaujímá tvar ekvipotenciální plochy. Potenciální energie spojená s magnetickou interakcí vztažená na jednotku objemu je $\frac{B^2}{2\mu_0}(\mu^{-1} - 1) \approx B^2 \frac{1 - \mu}{2\mu_0}$. Potenciální

energie tíhového pole (vztažená na jednotku objemu) je ρgh . Na vodní hladině musí být součet těchto energií konstantní. Položme nulovou potenciální hladinu do místa, kde je hladina vodorovná, neporušená magnetem. Potom nad magnetem

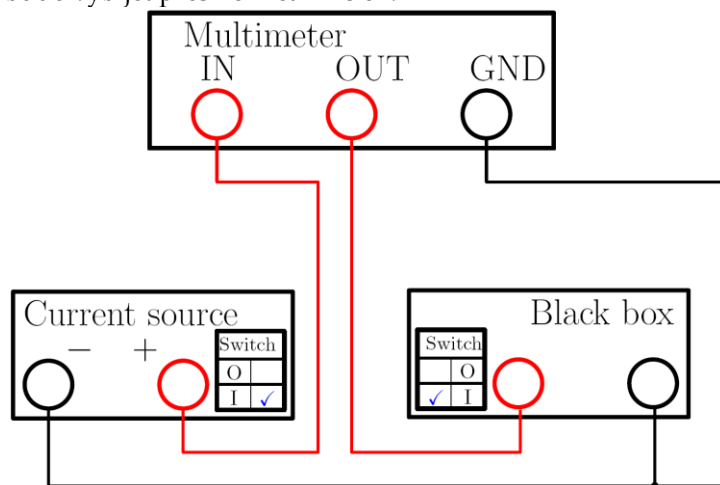
platí $B^2 \frac{1 - \mu}{2\mu_0} = -\rho gh$ a tedy $\mu - 1 = 2\mu_0 \rho gh / B^2$.

Numericky vyjde $\mu - 1 = -1,2 \cdot 10^{-5}$.



Úloha E2. Nelineární černá skříňka (10 bodů) Část A. Obvod bez indukčnosti (7 bodů)

Je možné provést všechna měření potřebná pro tento experiment v jediném zapojení, viz obr. Když je zdroj proudu zapnutý, nabíjíme kondenzátor v černé skříňce, dokud se proud $I(V_{max})$ nelineárním členem nerovná výstupnímu proudu I_0 zdroje proud. $V_{max} = (540 \pm 40)$ mV se mírně liší mezi jednotlivými experimentálními soustavami. Jakmile proudový zdroj vypneme nebo odpojíme, kondenzátor se bude vybíjet přes nelineární člen.



i. (1 b.) Během nabíjení kondenzátoru z $V = 0$ na $V = V_{max}$ je výstup z proudového zdroje konstantní ($I_0 = 6,0$ mA) vzhledem k přesnosti multimetru.

ii. (1,2 b.) Pomocí definice diferenciální kapacity můžeme vypočítat proud kondenzátorem v černé skříňce z časové derivace napětí na černé skříňce.

$$I_c = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dV} \frac{dV}{dt} = C(V) \dot{V}$$

Je několik možností, jak určit kapacitu v černé skříňce podle toho, jaké zvolíme napětí.

- Když je napětí na černé skříňce blízké nule, proud nelineárním členem je také blízko 0, protože $I(V = 0) = 0$. Po zapnutí proudového zdroje většina vstupního proudu I_0 nejprve prochází kondenzátorem.

$$C_0 = I_0 / \dot{V}_\uparrow(V = 0)$$

Toto lze měřit přesněji po prvním převrácení polarity proudového zdroje z nabíjení kondenzátoru zpětně, protože multimetr neměří derivace přesně, pokud v nich dochází k prudkým změnám (jako např. v prvních okamžicích po zapnutí zdroje.)

Příklad měření je uveden v tabulce

$V_\uparrow(0)/\text{mV s}^{-1}$	3,51	3,32	3,55
C_0/F	1,71	1,81	1,69

$$C_0 = 1,74 \text{ F.}$$

- Je-li napětí na černé skříňce V_{max} , je proud nelineárním členem konstantní a rovný I_0 . Při vypnutí proudového zdroje se bude kondenzátor vybíjet stejným proudem.

$$C_0 = -I_0 / \dot{V}_\downarrow(V = V_{max})$$

- Je také možné měřit kapacitu při jakémkoliv napětí v uvedeném rozsahu, viz úloha A-iv.

Ahoj

iii. (2,2 b.) Zanedbáme-li nelinearitu kondenzátoru, máme (minimálně) dvě možnosti, jak změřit volt-ampérovou charakteristiku nelineárního členu v černé skříňce.

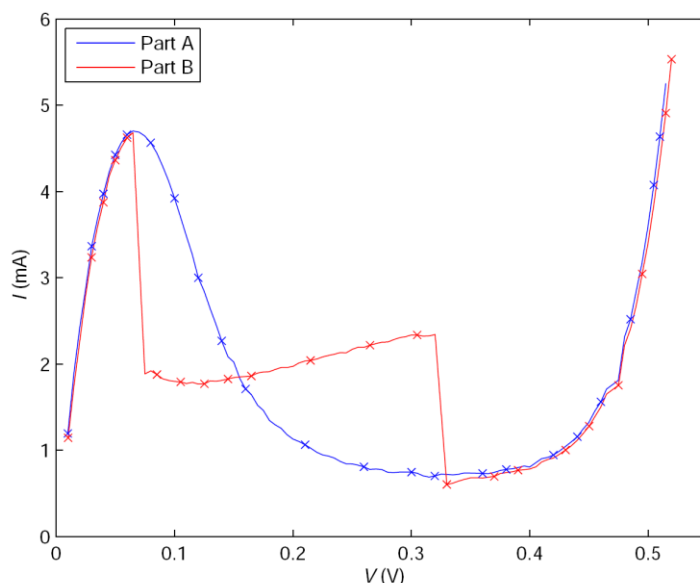
- Použitím prvního Kirchhoffova zákona na nabíjející se kondenzátor

$$I(V) = I_c - C_0 \dot{V}_\uparrow(V).$$

Voltampérová charakteristika nabíjeného kondenzátoru je na následujícím obrázku.

- Použitím prvního Kirchhoffova zákona na vybíjející se kondenzátor

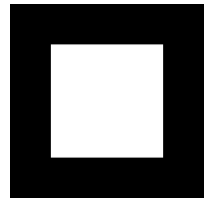
$$I(V) = -C_0 \dot{V}_\downarrow(V).$$



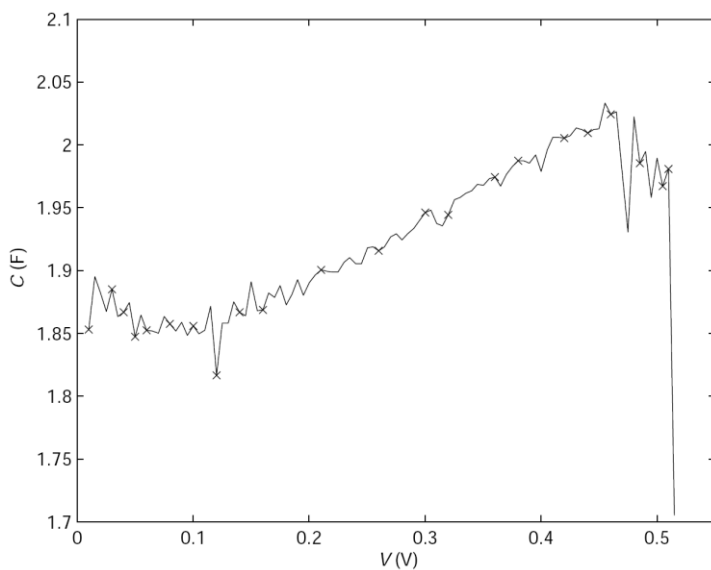
iv. (2,6 b.) Abychom získali diferenciální kapacitu, řešíme soustavu lineárních rovnic vyjádřením $I(V)$,

$$\begin{cases} I_0 = \dot{V}_\uparrow C(V) + I(V) \\ I(V) = -\dot{V}_\downarrow C(V) \end{cases} \Rightarrow C(V) = \frac{I_0}{\dot{V}_\uparrow - \dot{V}_\downarrow}.$$

Musíme tedy provést měření jak během nabíjení, tak i vybíjení kondenzátoru v černé skříňce za stejného napětí. Grafické zobrazení měření je na obrázku.



ÚLOHA E2

**Část B. Obvod s indukčností (3 body)**

Měřením a grafickým vynesním voltampérové charakteristiky nelineárního členu stejným způsobem jako v úloze A-iii dostaneme graf, který se liší jen v oblasti záporného diferenciálního odporu ($I'(V) < 0$), v našem případě v oblasti $70 \text{ mV} < V < 330 \text{ mV}$. V této oblasti se nelineární člen chová jako záporný Ohmický odpor. Po připojení cívky máme LC obvod, jehož kmity jsou zesilovány (místo, aby byly přirozeně tlumeny) záporným diferenciálním odporem. Protože je rezonanční frekvence $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC_P}} \sim 30 \text{ MHz}$ (kde C_P je kapacita nelineárního členu) vysoká, ve skutečnosti měříme průměrný proud nelineárním členem, zatímco ve skutečnosti tento proud osciluje v oblasti záporného diferenciálního odporu.