

3. Řešení

1. Pomocí Coulombova zákona je elektrické pole ve vzdálenosti r dáno

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r+a)^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{a}{r}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{a}{r}\right)^2} \right). \quad (1)$$

Rozvojem tohoto vztahu získáme pro malé a

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{2a}{r} - 1 + \frac{2a}{r} \right) = + \frac{qa}{\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (2)$$

2. Elektrické pole iontu z pohledu atomu je

$$\vec{E}_{ion} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0. \quad (3)$$

Indukovaný dipólový moment tedy snadno vypočteme dle definice v zadání

$$\vec{p} = a\vec{E}_{ion} = -\frac{aQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0. \quad (4)$$

Z rovnice (2) máme

$$\vec{E}_p = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r}^0.$$

Intenzita elektrického pole $\vec{E}_p$ v místě iontu je v tomto okamžiku tedy, použitím vztahu (4),

$$\vec{E}_p = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(-\frac{aQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}^0 \right) = -\frac{aQ}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \vec{r}^0$$

a síla působící na iont je tedy

$$\vec{f} = Q\vec{E}_p = -\frac{aQ^2}{8\pi^2 \epsilon_0^2 r^5} \vec{r}^0. \quad (5)$$

Znaménko minus znamená, že síla je přitažlivá a z Q^2 plyne, že tato síla je přitažlivá nezávisle na znaménku náboje.

3. Potenciální energie soustavy iont – atom lze vypočítat ze vztahu

$$U = \int_r^\infty \vec{f} \cdot d\vec{r} = -\frac{aQ^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}. \quad (6)$$

4. V poloze r_{min} můžeme psát zákon zachování momentu hybnosti

$$mv_{max}r_{min} = mv_0b \Rightarrow v_{max} = v_0 \frac{b}{r_{min}} \quad (7)$$

a zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{aQ^2}{32\pi^2 \epsilon_0^2 r_{min}^4} = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (8)$$

Dosazením rychlosti (7) do rovnice (8) dostaneme po úpravě

$$\left(\frac{r_{min}}{b}\right)^4 - \left(\frac{r_{min}}{b}\right)^2 + \frac{aQ^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 mv_0^2 b^4} = 0, \quad (9)$$

kořeny rovnice (9) jsou

$$r_{min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{aQ^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Všimněme si, že ze vztahu (10) vyplývá, že r_{min} nemůže být nulové, pokud není nulový parametr b . Výraz (10) musí platit také pro $Q = 0$, tedy

$$r_{min} = \frac{b}{\sqrt{2}} [1 \pm 1]^{\frac{1}{2}}$$

Musíme tedy zvolit znaménko „+“, aby v tomto případě platilo $r_{min}=b$. Dostáváme

$$r_{min} = \frac{b}{\sqrt{2}} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{aQ^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

5. Trajektorie ve tvaru spirály se objeví, pokud r_{min} ve vztahu (11) bude komplexní, tj. nebude existovat minimální hodnota vzdálenosti iontu od atomu. Vzdálenost r_{min} je reálná za podmínky

$$1 \geq \frac{aQ^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2 b^4} \Rightarrow b \geq b_0 = \left(\frac{aQ^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (12)$$

Pro $b < b_0 = \left(\frac{aQ^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{4}}$ iont narazí do atomového jádra. Tedy atom, z pohledu iontu, má příčný průřez

$$A = \pi b_0^2 = \pi \left(\frac{aQ^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m v_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$