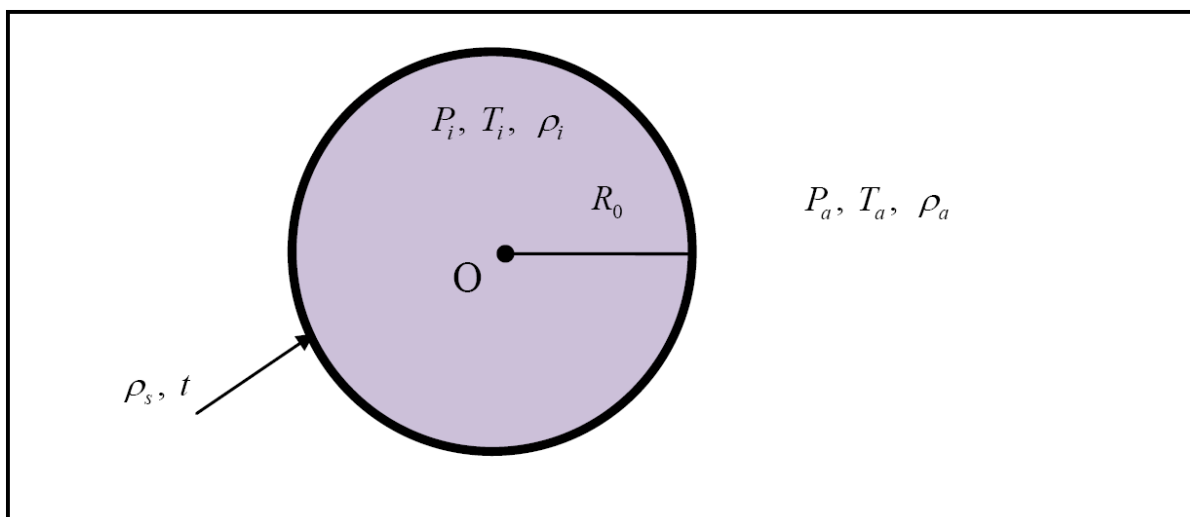


2. Řešení

2.1 Bublina je obklopena vzduchem.



Myšlenkově rozpůlíme bublinu a vyjádříme rovnováhu sil,

$$P_i \pi R_0^2 = P_a \pi R_0^2 + 2(2\pi R_0 \gamma), \quad (1)$$

$$P_i = P_a + \frac{4\gamma}{R_0}.$$

Vztah mezi tlakem a hustotou udává stavová rovnice ideálního plynu (M značí molární hmotnost vzduchu),

$$PV = nRT \text{ neboli } P = \frac{\rho RT}{M} \quad (2)$$

Použijeme rovnici ideálního plynu na vzduch uvnitř i vně bubliny,

$$\rho_i T_i = \frac{P_i M}{R}, \quad \rho_a T_a = \frac{P_a M}{R}.$$

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} = \frac{P_i}{P_a} = 1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \quad (3)$$

2.2 Číselně,

$$\frac{\rho_i T_i}{\rho_a T_a} - 1 = \frac{4\gamma}{R_0 P_a} = 0,0001. \quad (4)$$

Vliv povrchového napětí je tedy velmi malý.

2.3 Označme W celkovou tíhu bubliny a B vztlakovou sílu ve vzduchu

$$W = \left(4\pi R_0^2 \rho_s t + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_i \right) g = 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) g. \quad (5)$$

Vztlaková síla ve vzduchu obklopujícím bublinu je

$$B = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g. \quad (6)$$

Jestliže se bublina vznáší v klidném vzduchu, platí $B \geq W$,

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) g. \quad (7)$$

Vyjádříme teplotu T_i ,

$$T_i \geq \frac{R_0 \rho_a T_a}{R_0 \rho_a - 3 \rho_s t} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) = 307,1 \text{ K}. \quad (8)$$

Vzduch uvnitř bubliny musí být o $7,1^\circ\text{C}$ teplejší.

2.4. Zanedbáme změnu poloměru, poloměr tedy zůstane $R_0 = 1,0 \text{ cm}$. (Ve skutečnosti se poloměr zmenší o $0,8 \%$ při poklesu teploty z $307,1 \text{ K}$ na 300 K . Mýdlový film bude také nepatrně silnější.)

$$\text{Odporová síla je dána Stokesovým zákonem, } F = 6\pi\eta R_0 u. \quad (9)$$

Jestliže se bublina vznáší, platí $F \geq W - B$,

$$6\pi\eta R_0 u \geq \left(4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \frac{\rho_a T_a}{T_i} \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) \right) g - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g. \quad (10)$$

Je-li bublina v tepelné rovnováze $T_i = T_a$,

$$6\pi\eta R_0 u \geq \left(4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a \left(1 + \frac{4\gamma}{R_0 P_a} \right) \right) g - \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_a g.$$

Vyjádříme rychlost u ,

$$u \geq \frac{4R_0 \rho_s t g}{6\eta} + \frac{\frac{4}{3} R_0^2 \rho_a g \frac{4\gamma}{R_0 P_a}}{6\eta}. \quad (11)$$

2.5. Číselně, $u \geq 0,36 \text{ m/s}$.

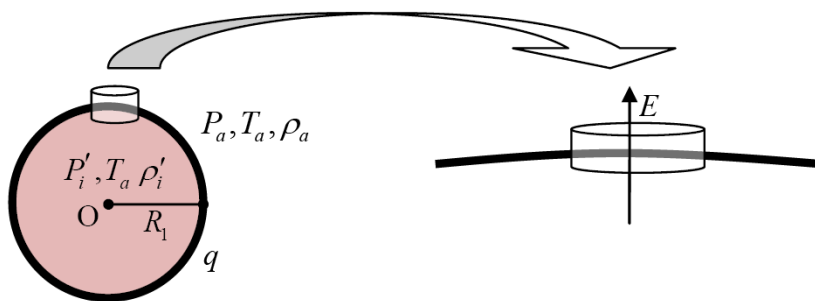
Druhý člen je o tři řády menší než člen první.

Odteď zanedbáváme člen obsahující povrchové napětí.

- 2.6. Jakmile je bublina nabitá, elektrická odpudivá síla způsobí zvětšování bubliny a povede tedy k nárůstu vztlakové síly. Uvedeme dva způsoby, jak vypočítat elektrické pole na povrchu mýdlového filmu.

A. Z Gaussova zákona

Uvažujme tenký nízký váleček na mýdlovém povrchu



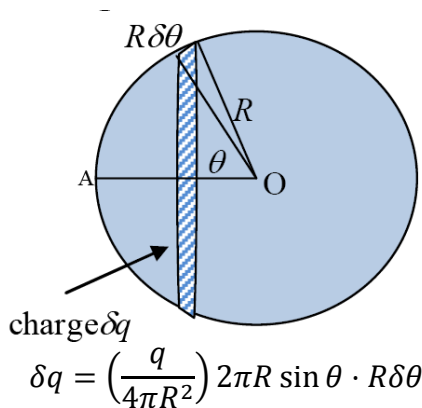
Elektrické pole E na povrchu mýdlového filmu je tvořeno všemi částmi mýdlového filmu kromě povrchu uzavřeného ve válečku.

Elektrické pole vně válečku, $E_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E + E_\sigma$, kde E_σ je elektrické pole povrchu uvnitř válečku.

Použitím Gaussova zákona na váleček dostaneme $E_q = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, jehož směr je kolmý na povrch mýdlového filmu v důsledku symetrie. Tedy,

$$E = E_q - E_\sigma = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q}{4\pi R_1^2}. \quad (12)$$

B. Přímoú integrací



Pole v bodě A ve směru vektoru $\vec{OA}$ je,

$$\delta E_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\frac{q}{4\pi R_1^2} 2\pi R_1^2 \sin\theta \delta\theta}{\left(2R_1 \sin\frac{\theta}{2}\right)^2} \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{q}{4\pi R_1^2}}{2\epsilon_0} \cos\frac{\theta}{2} \delta\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$E_A = \frac{\frac{q}{4\pi R_1^2}}{2\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} d\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{q}{4\pi R_1^2}. \quad (13)$$

Odpudivá síla na jednotkovou plochu na povrchu bubliny je

$$\frac{q}{4\pi R_1^2} E = \frac{\left(\frac{q}{4\pi R_1^2}\right)^2}{2\epsilon_0} \quad (14)$$

Označme P'_i a ρ'_i tlak a hustotu vzduchu uvnitř bubliny, když je bublina nabita. Elektrická odpudivá síla zvětší tlak plynu. Ze stavové rovnice ideálního plynu platí,

$$P'_i \frac{4}{3} \pi R_1^3 = P_i \frac{4}{3} \pi R_0^3,$$

$$P'_i = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 P_i = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 P_a. \quad (15)$$

Rovnováha sil dává,

$$P'_i + \frac{\left(\frac{q}{4\pi R_1^2}\right)^2}{2\epsilon_0} = P_a,$$

$$P_a \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3 + \frac{\left(\frac{q}{4\pi R_1^2}\right)^2}{2\epsilon_0} = P_a. \quad (16)$$

Odkud dostaneme

$$\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^4 - \left(\frac{R_1}{R_0}\right) + \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_0^4 P_a} = 0. \quad (17)$$

Povšimněme si, že pro $q = 0$, dává (17) $R_1 = R_0$, jak jsme očekávali.

2.7. Přibližné řešení rovnice (17) pro $\frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R_0^4 P_a} \ll 1$. Označme $R_1 = R_0 + \Delta R$, $\Delta R \ll R_0$. Tedy,

$$\frac{R_1}{R_0} = 1 + \frac{\Delta R}{R_0}, \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^4 \approx 1 + \frac{4\Delta R}{R_0}. \quad (18)$$

Z rovnice (17) pak dostaneme,

$$\Delta R \approx \frac{q^2}{96\pi^2\epsilon_0 R_0^3 P_a}, \quad (19)$$

$$R_1 \approx R_0 + \frac{q^2}{96\pi^2\epsilon_0 R_0^3 P_a} \approx R_0 \left(1 + \frac{q^2}{96\pi^2\epsilon_0 R_0^4 P_a}\right). \quad (20)$$

2.8. Bublina se bude vznášet, pokud $B \geq W$,

$$\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_i g. \quad (21)$$

Platí, $T_i = T_a \Rightarrow \rho_i = \rho_a$ pro $\gamma \rightarrow 0$ a $R_1 = R_0 + \Delta R$,

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^3 \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g + \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_a g$$

$$\frac{4}{3}\pi R_0^2 (3\Delta R) \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g \quad (22)$$

$$\frac{4}{3}\pi \frac{3q^2}{96\pi^2\epsilon_0 R_0 P_a} \rho_a g \geq 4\pi R_0^2 \rho_s t g$$

$$q^2 \geq \frac{96\pi^2\epsilon_0 R_0^3 P_a t \rho_s}{\rho_a}$$

$$q \approx 256 \cdot 10^{-9} \text{ C} \approx 256 \text{ nC}.$$

Kdybychom nezanedbali povrchové napětí, dostali bychom

$$R_1 \approx R_0 \left(1 + \frac{\frac{q^2}{96\pi^2\epsilon_0 R_0^4 P_a}}{1 + \frac{2}{3} \frac{4\gamma}{R_0 P_a}}\right).$$