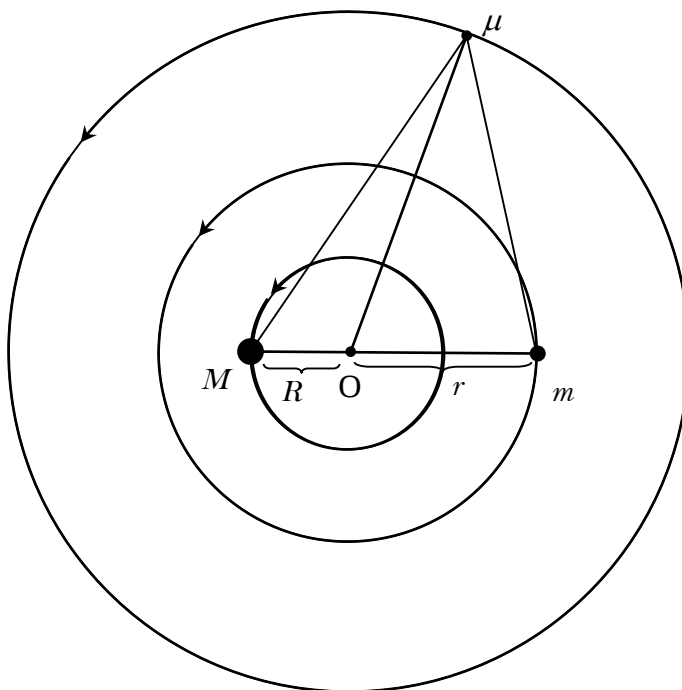


1. Problém tří těles a LISA



Obr. 1: Trajektorie tří těles ležící v jedné rovině

1.1 Dvě tělesa o gravitačních hmotnostech M a m se pohybují po kruhových orbitách o poloměrech R a r okolo jejich společného hmotného středu. Určete úhlovou rychlost ω_0 úsečky spojující středy těles o hmotnostech M a m v závislosti na R, r, M, m a gravitační konstantě G .

[1,5 bodu]

1.2 Třetí těleso o nekonečně malé hmotnosti μ se pohybuje po kruhové orbitě ve stejné rovině jako tělesa o hmotnostech M a m okolo hmotného středu těchto dvou těles, jak je znázorněno na obr. 1. Předpokládejte, že vzdálenost tělesa o hmotnosti μ se od obou těles o hmotnostech M a m nemění. Uvažujte obecný případ, kdy všechna tělesa neleží na jedné přímce. Vypočítejte následující parametry v závislosti na R a r :

[3,5 bodu]

- 1.2.1 vzdálenost tělesa o hmotnosti μ od tělesa o hmotnosti M ,
- 1.2.2 vzdálenost tělesa o hmotnosti μ od tělesa o hmotnosti m ,
- 1.2.3 vzdálenost tělesa o hmotnosti μ od hmotného středu O .

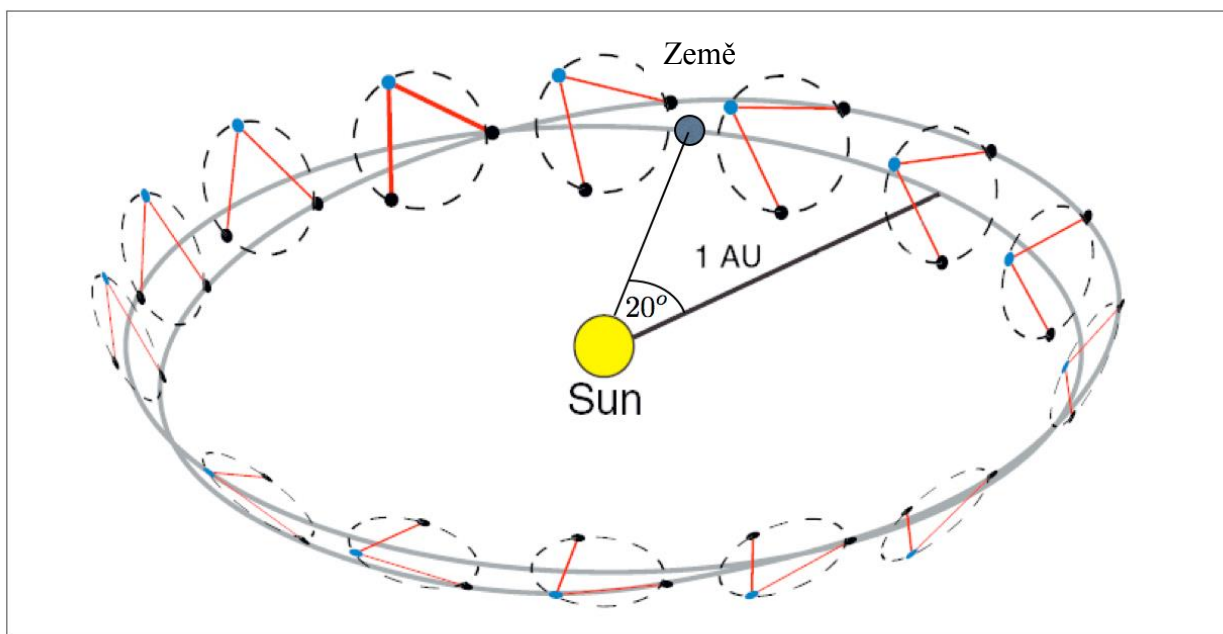
1.3 Uvažujte případ $M = m$. Pokud nyní těleso o hmotnosti μ mírně radiálně vychýlíme (podél přímky spojující hmotný střed O s tělesem o hmotnosti μ), vypočítejte, jaká bude úhlová frekvence kmitů tělesa o hmotnosti μ okolo polohy před vychýlením v závislosti na ω_0 ?

Uvažujte, že moment hybnosti tělesa o hmotnosti μ se zachovává.

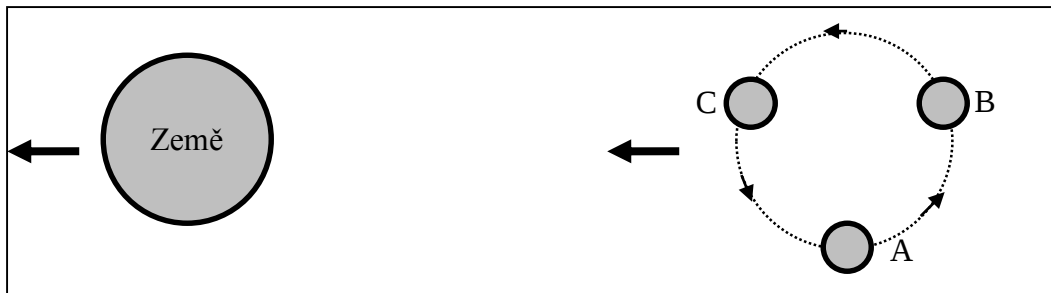
[3,2 bodu]

Laserová interferometrická vesmírná anténa (LISA z angl. **L**aser **I**nterferometry **S**pace **A**ntenna) je skupina tří stejných kosmických lodí, která je určena k detekci nízkofrekvenčních gravitačních vln. Kosmické lodě leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku - viz obr. 2 a obr. 3. Strany (ramena) trojúhelníku jsou dlouhé, přibližně 5,0 milionů kilometrů. Celý systém LISA se pohybuje po stejné orbitě okolo Slunce jako Země a úhlově zaostává za Zemí o 20° (obr. 2). Každá z kosmických lodí se pohybuje po mírně odkloněné vlastní orbitě okolo Slunce. Efektivně se všechny tři kosmické lodě otáčejí okolo jejich společného hmotného středu s jedním oběhem za rok.

Neustále si mezi sebou vysílají a přijímají laserové signály. Detekují gravitační vlny tím, že měří malinké změny délek ramen pomocí interferometrie. Srážka masivních objektů, jako jsou např. černé díry, v blízkých galaxiích je příkladem zdroje gravitačních vln.



Obr. 2 – Náčrt orbity systému LISA. Tři kosmické lodě rotují okolo jejich hmotného středu s periodou 1 rok. Na začátku je systém LISA v úhlové vzdálenosti 20° za úhlovou polohou Země. (Obrázek převzat z D.A. Shaddock, “An Overview of the Laser Interferometer Space Antenna”, Publications of the Astronomical Society of Australia, 2009, 26, pp.128-132.)



Obr. 3: Zvětšený pohled na tři kosmické lodě a Zemi. A, B a C jsou tři kosmické lodě ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku

1.4 V rovině obsahující všechny tři kosmické lodi vypočtete velikost relativní rychlosti jedné kosmické lodi vůči druhé.

[1,8 bodu]