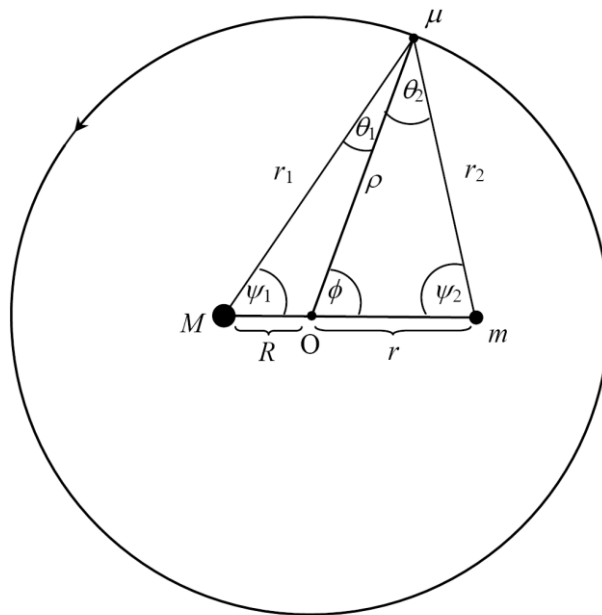


1. Řešení



1.1 Označme O hmotný střed. Tedy,

$$MR - mr = 0 \quad (1)$$

$$m\omega_0^2 r = \frac{GMm}{(R+r)^2} \quad (2)$$

$$M\omega_0^2 R = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

Z (2),

$$\omega_0^2 = \frac{G(M+m)}{(R+r)^3} = \frac{GM}{r(R+r)^2} = \frac{Gm}{R(R+r)^2}. \quad (3)$$

1.2 Protože hmotnost μ je zanedbatelná, nebude mít žádný gravitační vliv na pohyb těles o hmotnostech m a M . Aby těleso o hmotnosti μ byla stacionární vzhledem k oběma dalším tělesům, musí platit

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2} \cos \theta_2 = \mu\omega_0^2 \rho = \frac{G(M+m)\mu}{(R+r)^3} \rho \quad (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \sin \theta_1 = \frac{GM\mu}{r_2^2} \sin \theta_1 \quad (5)$$

Dosadíme za $\frac{GM}{r_1^2}$ z rovnice (5) do (4) a použitím rovnosti $\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ dostaneme,

$$m \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{r_2^2} = \frac{M + m}{(R + r)^3} \rho \sin \theta_1 \quad (6)$$

Vzdálenosti r_2 a ρ a úhly θ_1 a θ_2 splňují sinovou větu,

$$\frac{\sin \psi_1}{\rho} = \frac{\sin \theta_1}{R} \quad (7)$$

$$\frac{\sin \psi_1}{r_2} = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_2)}{R + r}$$

Dosazením (7) do (6)

$$\frac{1}{r_2^3} = \frac{R}{(R + r)^4} \frac{M + m}{m} \quad (10)$$

Protože platí $\frac{m}{m+M} = \frac{R}{R+r}$, z rovnosti (10) plyne,

$$r_2 = R + r \quad (11)$$

Dosadíme za $\frac{GM}{r_2^2}$ z rovnice (5) do (4) a dostaneme analogickým postupem

$$r_1 = R + r \quad (12)$$

Alternativně,

$$\frac{r_1}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{R}{\sin \theta_1} \quad a \quad \frac{r_2}{\sin \phi} = \frac{r}{\sin \theta_2}$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{R}{r} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M} \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

Společně se vztahem (5) máme $r_1 = r_2$.

Tedy tělesa leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka,

$$\psi_1 = \psi_2 = 60^\circ \quad (13)$$

Vzdálenost ρ dostaneme z kosinové věty,

$$\rho^2 = r^2 + (R + r)^2 - 2r(R + r) \cos 60^\circ \quad (14)$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + (R + r)^2 + rR}.$$

Alternativní řešení úlohy 1.2

Protože hmotnost μ je zanedbatelná, nebude mít žádný gravitační vliv na pohyb těles o hmotnostech m a M . Aby těleso o hmotnosti μ byla stacionární vzhledem k oběma dalším tělesům, musí platit

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{Gm\mu}{r_2^2} \cos \theta_2 = \mu \omega_0^2 \rho = \frac{G(M + m)\mu}{(R + r)^3} \rho \quad (4)$$

$$\frac{GM\mu}{r_1^2} \sin \theta_1 = \frac{GM\mu}{r_2^2} \sin \theta_1 \quad (5)$$

Z obrázku platí:

$$\frac{r_1}{\sin(180^\circ - \phi)} = \frac{R}{\sin \theta_1} \quad a \quad \frac{r_2}{\sin \phi} = \frac{r}{\sin \theta_2}$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{R}{r} \cdot \frac{r_2}{r_1} = \frac{m}{M} \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad (6)$$

Z rovnic (5) a (6):

$$r_1 = r_2 \quad (7)$$

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{m}{M} \quad (8)$$

$$\psi_1 = \psi_2 \quad (9)$$

Tedy rovnice (4) přejde na

$$M \cos \theta_1 + m \cos \theta_2 = \frac{(M + m)}{(R + r)^3} r_1^3 \rho \quad (10)$$

Z rovnic (8) a (10),

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M + m}{M} \frac{r_1^2 \rho}{(R + r)^3} \sin \theta_2 \quad (11)$$

Z obr,

$$\frac{\rho}{\sin \psi_1} = \frac{r}{\sin \theta_2} \quad (12)$$

Dosadíme (12) do (11)

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \frac{M + m}{M} \frac{r_1^2 r}{(R + r)^3} \sin \psi_1 \quad (13)$$

Z obrázku je zřejmé,

$$(R + r)^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + r_1^2 = 2r_1^2 [1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)] \quad (14)$$

Rovnosti (13) a (14) dávají,

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \frac{\sin \psi_2}{2[1 - \cos(\theta_1 + \theta_2)]} \\ \theta_1 + \theta_2 &= 180^\circ - \psi_1 - \psi_2 = 180^\circ - 2\psi_2 \\ \therefore \cos \psi_2 &= \frac{1}{2}, \quad \psi_2 = 60^\circ, \quad \psi_1 = 60^\circ \end{aligned} \quad (15)$$

Tedy tělesa leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka o délce strany $R + r$. Vzdálenost bodu o hmotnosti μ od bodu O je

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{R + r}{2} - R\right)^2 + \left((R + r)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 + Rr + r^2}$$

1.3 Energie tělesa hmotnosti μ je dána

$$E = -\frac{GM\mu}{r_1} - \frac{Gm\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\omega^2\right) \quad (15)$$

Jelikož k vychýlení došlo v radiálním směru, moment hybnosti se zachová (ozn. $r_1 = r_2 = \mathfrak{R}$, $m = M$),

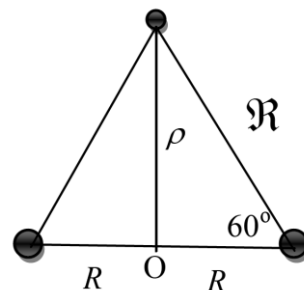
$$E = -\frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}} + \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho_0^2\omega_0^2\right) \quad (16)$$

Protože se energie zachovává, $\frac{dE}{dt} = 0$,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}^2} \frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \mu \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \frac{\rho}{\mathfrak{R}} \quad (18)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2GM\mu}{\mathfrak{R}^3} \rho \frac{d\rho}{dt} + \mu \frac{d\rho}{dt} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \mu \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (19)$$



Protože $\frac{d\rho}{dt} \neq 0$, můžeme psát

$$\frac{2GM}{\mathfrak{R}^3} \rho + \frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3} = 0,$$

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}^3} \rho + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho^3}. \quad (20)$$

Vychýlení z $\mathfrak{R}_0$ a ρ_0 lze popsat rovnostmi

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 \left(1 + \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right) \quad \text{a} \quad \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right).$$

Tedy,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\rho_0 + \Delta\rho) = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3 \left(1 + \frac{\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right)^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) + \frac{\rho_0^4\omega_0^2}{\rho_0^3 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^3} \quad (21)$$

Použijeme aproximaci $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right) \left(1 - \frac{3\Delta\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_0}\right) + \rho_0\omega_0^2 \left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right) \quad (22)$$

Dosadíme $\Delta\rho = \frac{\mathfrak{R}}{\rho} \Delta\mathfrak{R}$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3}\rho_0\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0\Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) + \rho_0\omega_0^2\left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right). \quad (23)$$

Jelikož $\omega_0^2 = \frac{2GM}{\mathfrak{R}_0^3}$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\rho_0\left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0\Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) + \omega_0^2\rho_0\left(1 - \frac{3\Delta\rho}{\rho_0}\right). \quad (24)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\rho_0\left(\frac{4\Delta\rho}{\rho_0} - \frac{3\rho_0\Delta\rho}{\mathfrak{R}_0^2}\right) \quad (25)$$

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\Delta\rho\left(4 - \frac{3\rho_0^2}{\mathfrak{R}_0^2}\right) \quad (26)$$

Z obr., $\rho_0 = \mathfrak{R}_0 \cos 30^\circ$,

$$\frac{d^2\Delta\rho}{dt^2} = -\omega_0^2\Delta\rho\left(4 - \frac{9}{4}\right) = -\frac{7}{4}\omega_0^2\Delta\rho. \quad (27)$$

Úhlová frekvence je tedy $\frac{\sqrt{7}}{2}\omega_0$.

Alternativní řešení:

$M = m$ dává $R = r$ a

$$\omega_0^2 = \frac{2GM}{8R^3} = \frac{GM}{4R^3}.$$

Nevychýlená vzdálenost tělesa o hmotnosti μ je $\sqrt{3}R$, tedy vychýlenou polohu mohu popsat jako $\sqrt{3}R + \zeta$, kde $\zeta \ll \sqrt{3}R$.

Použijeme druhý Newtonův pohybový zákon,

$$-\frac{2GM}{\left(R^2 + (\sqrt{3}R + \zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{3}R + \zeta) = \mu\frac{d^2}{dt^2}(\sqrt{3}R + \zeta) - \mu\omega_0^2(\sqrt{3}R + \zeta)$$

A zákon zachování momentu hybnosti $\mu\omega_0(\sqrt{3}R)^2 = \mu\omega(\sqrt{3}R + \zeta)^2$.

Z těchto dvou rovnic dostaneme (použitím aproximací pro $\zeta \ll R$,

$$\begin{aligned} -\frac{2GM}{\left(R^2 + (\sqrt{3}R + \zeta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{3}R + \zeta) &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3} \\ -\frac{2GM}{(4R^2 + 2\sqrt{3}\zeta R)^{\frac{3}{2}}}(\sqrt{3}R + \zeta) &\approx \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{(1 + \zeta/\sqrt{3}R)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{GM}{4R^3}\sqrt{3}R\frac{1+\frac{\zeta}{\sqrt{3}R}}{\left(1+\frac{\sqrt{3}\zeta}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{\omega_0^2\sqrt{3}R}{\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{3}R}\right)^3} \\
 -\omega_0^2\sqrt{3}R\left(1-\frac{3\sqrt{3}\zeta}{4R}\right)\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{3}R}\right) &\approx \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \omega_0^2\sqrt{3}R\left(1-\frac{3\zeta}{\sqrt{3}R}\right) \\
 \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -\left(\frac{7}{4}\omega_0^2\right)\zeta
 \end{aligned}$$

1.4 Relativní rychlost

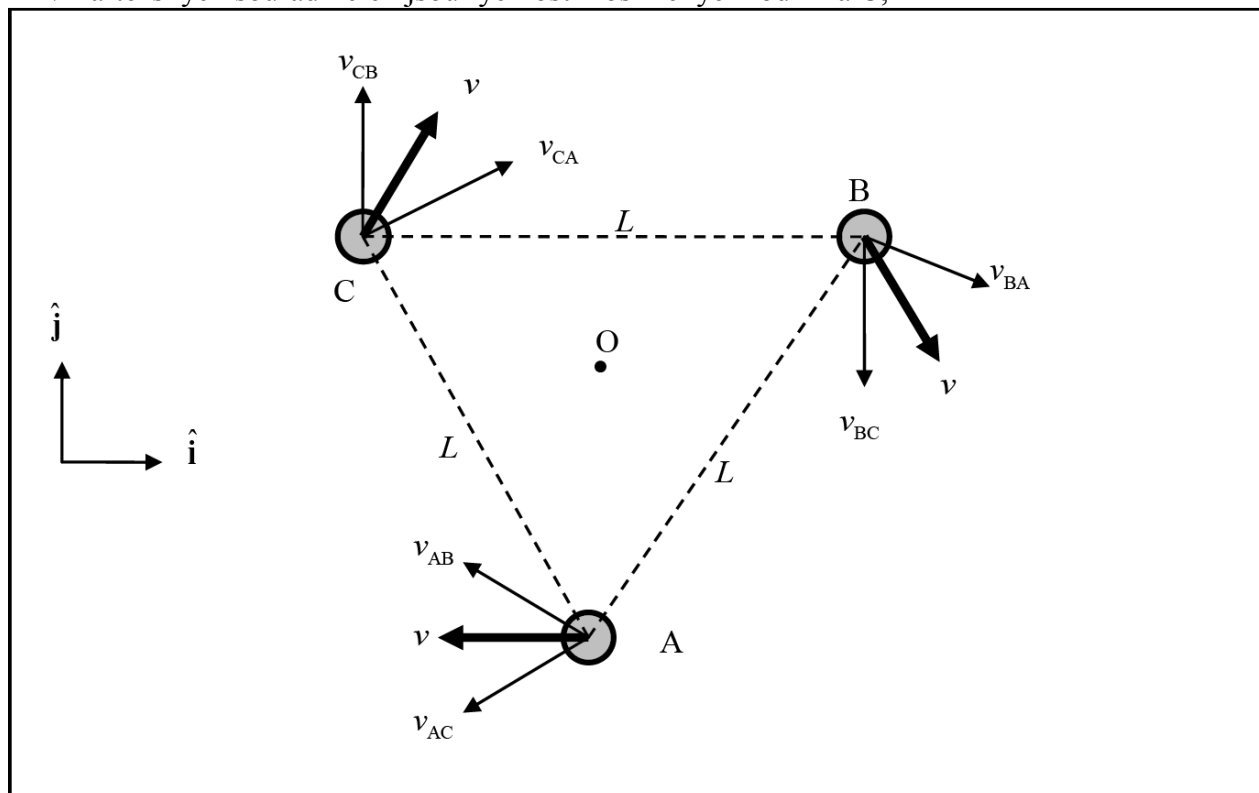
Nechť v značí rychlost každé kosmické lodi na kruhové dráze okolo středu O . Relativní rychlosti označíme dolními indexy A, B a C . Např. v_{BA} značí relativní rychlost kosmické lodi B pozorovanou z kosmické lodi A

Perioda oběžného pohybu je 1 rok, $T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s (28)

Rychlost $v = \omega \frac{L}{2 \cos 30^\circ} = 575$ m/s (29)

Rychlost je mnohem menší než je rychlost světla a použijeme tedy nerelativistickou transformaci.

V kartézských souřadnicích jsou rychlosti kosmických lodí B a C ,



Pro B, $\vec{v}_B = v \cos 60^\circ \hat{i} - v \sin 60^\circ \hat{j}$

Pro C, $\vec{v}_C = v \cos 60^\circ \hat{i} + v \sin 60^\circ \hat{j}$

Tedy $\vec{v}_{BC} = -2v \sin 60^\circ \hat{j} = -\sqrt{3}v \hat{j}$.

Rychlost kosmické lodi B pozorovaná z kosmické lodi C je $\sqrt{3}v \approx 996 \text{ m/s}$. (30)

Relativní rychlosti v každé dvojici kosmických lodí jsou opačné.

Alternativní řešení úlohy 1.4

Je možné dostat v_{BC} uvažováním rotace okolo osy umístěné do jedné z kosmických lodí.

$$v_{BC} = \omega L = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} 5 \cdot 10^6 \text{ km} \approx 996 \text{ m/s}$$