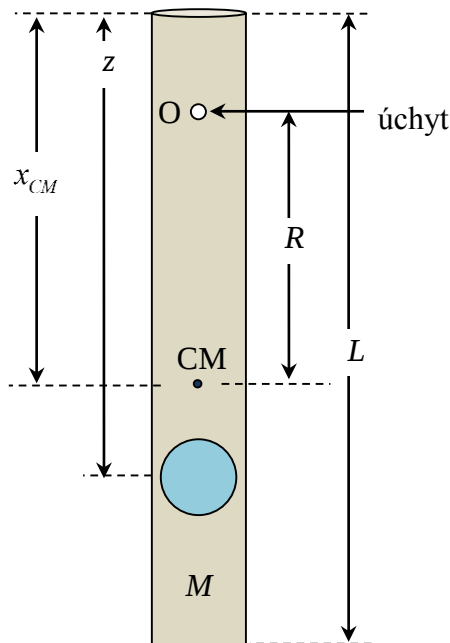


Řešení: 2. Mechanická černá skříňka: válec s kuličkou uvnitř



Abychom mohli spočítat hodnoty vyžadované v bodech i, ii a iii, potřebujeme znát:

- polohu hmotného středu soustavy závislou na z , m , M .
- moment setrvačnosti soustavy.

Poloha hmotného středu CM může být určena pomocí mechanické rovnováhy. Moment setrvačnosti I_{CM} je možné pak vypočítat z periody kmitů soustavy.

Analytické kroky pro vhodnou volnu parametrů k vynášení do grafů

I.

$$x_{CM} = \frac{mz + M\frac{L}{2}}{m + M}, \quad (1)$$

kde délku L změříme pravítkem.

II. Pro malé kmity okolo bodu O dostaneme periodu T z rovnice

$$((M + m)R^2 + I_{CM})\ddot{\theta} = -g(M + m)R \sin \theta \approx -g(M + m)R\theta, \quad (2)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(M + m)R^2 + I_{CM}}{g(M + m)R}}, \quad (3)$$

kde

$$I_{CM} = \frac{1}{3}M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(x_{CM} - \frac{L}{2}\right)^2 + m(z - x_{CM})^2 = \frac{1}{3}ML^2 + Mx_{CM}^2 - MLx_{CM} + m(z - x_{CM})^2. \quad (4)$$

Poznamenejme, že

$$T^2 \frac{g(M+m)}{4\pi^2} = \frac{I_{CM}}{R} + (M+m)R. \quad (5)$$

Metoda a) (metoda lineárního grafu)

Rovnici (5) upravíme

$$T^2 R = \left(\frac{4\pi^2}{g} \right) R + \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g}. \quad (6)$$

Tedy závislost $T^2 R$ na R^2 je teoreticky lineární s následujícími parametry:

$$\text{směrnice } \alpha = \frac{4\pi^2}{g} \quad (7)$$

$$\text{absolutní člen } \beta = \frac{4\pi^2 I_{CM}}{(M+m)g}. \quad (8)$$

$$\text{Tedy, } I_{CM} = (M+m) \frac{\beta}{\alpha}. \quad (9)$$

$$\text{Hodnota } g \text{ z rovnice (7): } g = \frac{4\pi^2}{\alpha}. \quad (10)$$

Metoda b) (metoda minima křivky)

Z rovnice (5) plyne, že T má minimum v

$$R = R_{min} \equiv \sqrt{\frac{I_{CM}}{M+m}}. \quad (11)$$

Tedy R_{min} lze získat ze závislosti T na R . Tedy,

$$I_{CM} = (M+m)R_{min}^2. \quad (12)$$

Rovnost (12) společně s rovností (1) nám umožní vypočítat požadované hodnoty z M/m .

V bodě $R = R_{min}$ rovnice (5) přechází na

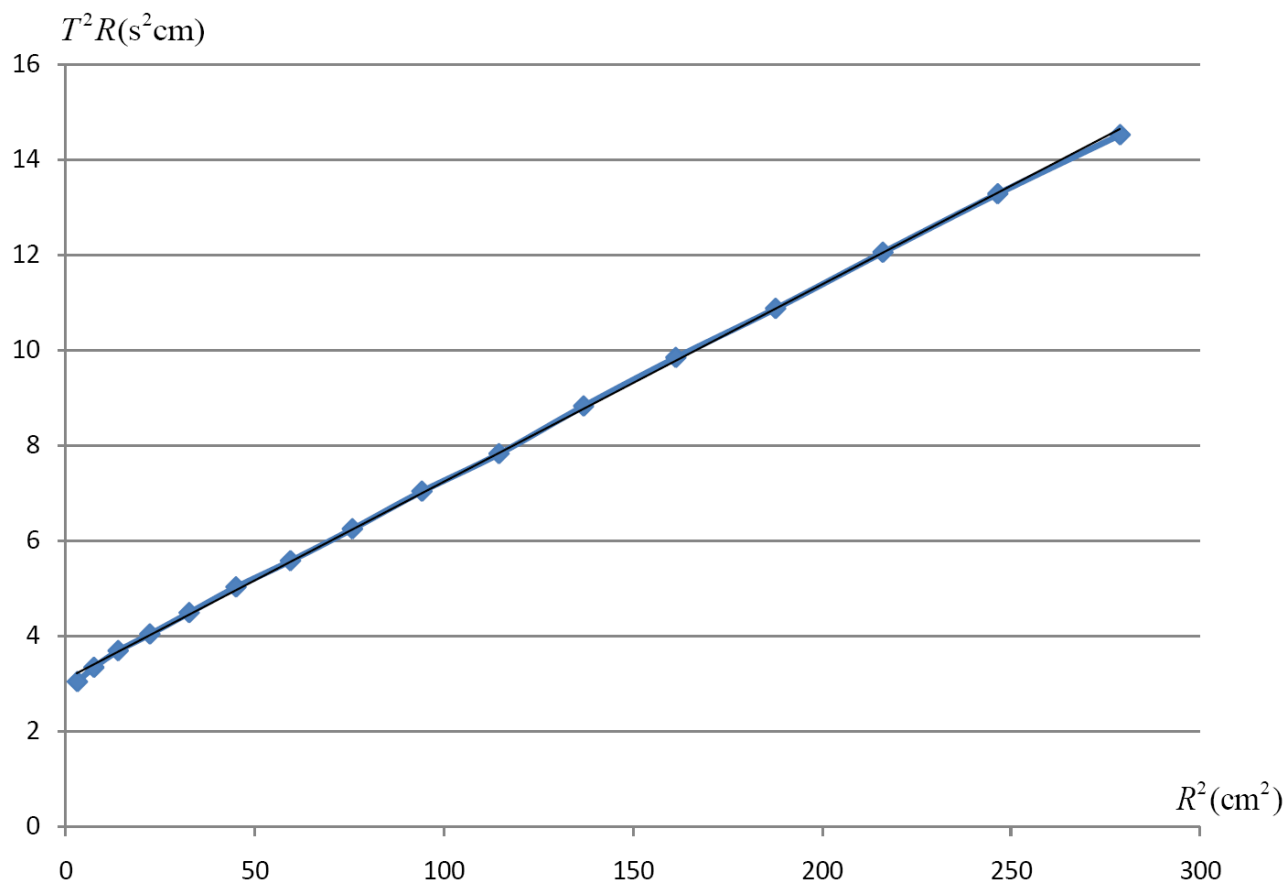
$$\begin{aligned} T_{min}^2 \frac{g(M+m)}{4\pi^2} &= (M+m)R_{min} + (M+m)R_{min}, \\ g &= \frac{2R_{min}}{T_{min}} \cdot 4\pi^2 = \frac{8\pi^2 R_{min}}{T_{min}}, \end{aligned} \quad (13)$$

odkud vypočítáme g .

Výsledky: $L = (30,0 \pm 0,1) \text{ cm}$, $x_{CM} = (17,8 \pm 0,1) \text{ cm}$ (od vršku).

$x_{CM} - R / \text{cm}$	$20T / \text{s}$			T / s	R / cm	R^2 / cm^2	$T^2 R / \text{s}^2 \text{cm}$
1,1	18,59	18,78	18,59	0,933	16,7	278,9	14,53
2,1	18,44	18,25	18,53	0,920	15,7	246,5	13,29
3,1	18,10	18,09	18,15	0,906	14,7	216,1	12,06
4,1	17,88	17,78	17,81	0,891	13,7	187,7	10,88
5,1	17,69	17,50	17,65	0,881	12,7	161,3	9,85
6,1	17,47	17,38	17,28	0,869	11,7	136,9	8,83
7,1	17,06	17,06	17,22	0,856	10,7	114,5	7,83
8,1	17,06	17,00	17,06	0,852	9,7	94,1	7,04
9,1	16,97	16,91	16,96	0,847	8,7	75,7	6,25
10,1	17,00	17,03	17,06	0,852	7,7	59,3	5,58
11,1	17,22	17,37	17,38	0,866	6,7	44,9	5,03
12,1	17,78	17,72	17,75	0,888	5,7	32,5	4,49
13,1	18,57	18,59	18,47	0,927	4,7	22,1	4,04
14,1	19,78	19,90	19,75	0,991	3,7	13,7	3,69
15,1	11,16	11,13	11,13	1,114	2,7	7,3	3,34
16,1	13,25	13,40	13,50	1,338	1,7	2,9	3,04

Metoda a)



Z grafu, směrnice $\alpha = (0,04108 \pm 0,00007) \text{ s}^2/\text{cm}$, absolutní člen $\beta = (3,10 \pm 0,05) \text{ s}^2\text{cm}$.

$$g = (961 \pm 20) \text{ cm/s}^2$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = (75,46 \pm 2,5) \text{ cm}^2$$

$$I_{CM} = 75,46 \text{ cm}^2 (M + m).$$

Z rovnice (4) tedy číselně plyne

$$\begin{aligned} 75,46 (M + m) &= 75,0 M + 7,84 M + m (z - 17,8)^2 \\ -7,38 \frac{M}{m} + 75,46 &= (z - 17,8)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Z polohy hmotného středu plyne,

$$\begin{aligned} 17,8 (M + m) &= 15,0 M + mz \\ \frac{M}{m} \frac{z - 17,8}{2,8} &. \end{aligned} \quad (15)$$

Řešením soustavy rovnic (14) a (15) dostaneme $z = (25,3 \pm 0,1) \text{ cm}$ a $\frac{M}{m} = 2,7$.

Odhad chyb

Chyba měření g :

$$Z(10) \Delta g = \frac{\Delta \alpha}{\alpha} g = 16,3 \text{ cm s}^{-2} \approx 20 \text{ cm s}^{-2}.$$

i) Chyba měření z

Nejprve nalezneme chybu měření $r = \frac{\beta}{\alpha} = 75,46 \text{ cm}^2$.

$$\Delta r = \left(\frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta \beta}{\beta} \right) r = 2,5 \text{ cm}^2.$$

Protože měření r je zatíženo největší relativní chybou ($\frac{\Delta r}{r} \sim 0,03$, zatímco $\frac{\Delta L}{L}, \frac{\Delta x_{CM}}{x_{CM}} \sim 0,005$), odhadneme chybu pouze pomocí chyby r jen dosazením maximální a minimální hodnoty do rovnice (4), abychom zjednodušili analýzu.

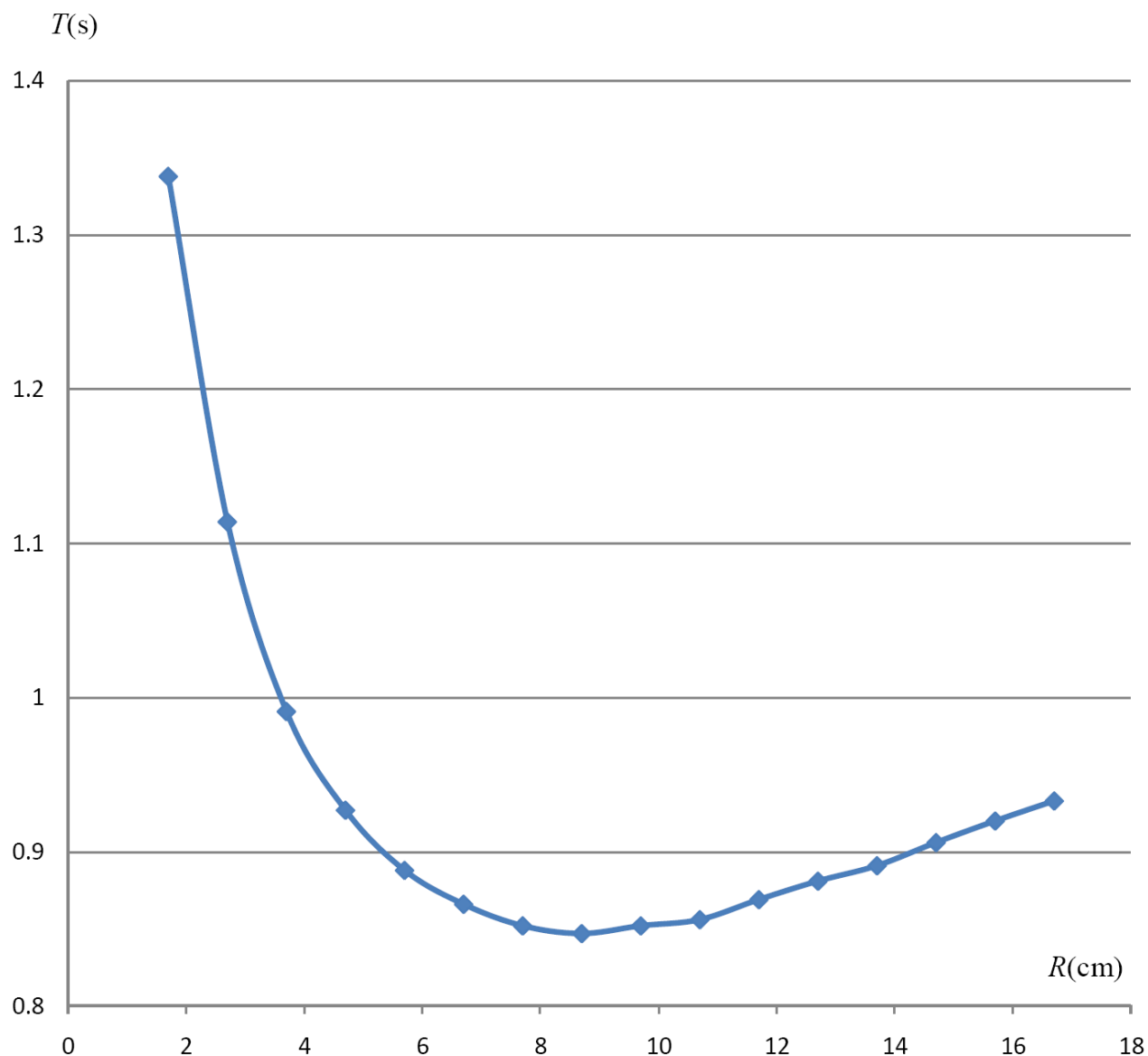
Použijeme (aniž bychom psali jednotky) $r_{max} = r + \Delta r = 75,46 + 2,5 = 77,96$. Řešením příslušné kvadratické rovnice (14) dostaneme $(z - 17,8)_{max} = 7,55 \text{ cm}$. Obdobně získáme $(z - 17,8)_{min} = 76,96 \text{ cm}$. Tedy $\Delta(z - 17,8) = \frac{7,55 - 6,96}{2} = 0,3 \text{ cm}$. Poznamenejme, že $\frac{\Delta(z - 17,8)}{z - 17,8} = 0,04$, což je stále o řád více, než jsou chyby $\Delta L, \Delta x_{CM}$. Tedy $\Delta z \approx 0,3 \text{ cm}$.

ii) Chyba měření poměru M/m :

$$\Delta \left(\frac{M}{m} \right) = \frac{\Delta(z - 17,8)}{2,8} = 0,11.$$

Metoda b)

Výpočet z grafu závislosti T na R .



Z grafu $R_{min} = (8,9 \pm 0,2)$ cm a $T = (0.846 \pm 0,005)$ s

$$\therefore g = (982 \pm 40) \text{ cm s}^{-2}.$$

$$I_{CM} = (M + m) 8,9^2 = 79.21 (M + m) \quad (16)$$

Z rovnic (14), (15) a (16)

$$79,21 (M + m) = 75,0 M + 7,84 M + m (z - 17,8)^2$$

$$-3,63 M + 79,21 m = m (z - 17,8)^2$$

$$(z - 17,8)^2 + \frac{3,63}{2,8} (z - 17,8) - 79,21 = 0$$

$$z - 17,8 = 8,28$$

$$z = (26,08 \pm 0,7) \text{ cm}$$

$$\frac{M}{m} = (3,0 \pm 0,3)$$

Odhad chyb

- i) Chyba měření g

$$\Delta g = \left(\frac{\Delta R_{min}}{R_{min}} + 2 \frac{\Delta T_{min}}{T_{min}} \right) g = 34 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \approx 30 \text{ cm/s}^2.$$

- ii) Chyba měření z

Nejprve najdeme chybu $r = R_{min}^2 = 79,21 \text{ cm}^2$.

$$\Delta r = 2 R_{min} \Delta R_{min} = 3,56 \text{ cm}^2.$$

Tato veličina je ekvivalentní veličině r z metody a. Můžeme tedy zopakovat stejný postup, tentokrát s výsledkem $\Delta z = 0,8 \text{ cm}$.

- iii) Chyba měření poměru M/m :

Stejným postupem jako v metodě a) dostaneme $\Delta \left(\frac{M}{m} \right) = 0,15$.

Pozn. Přesnější metoda je metoda a).