

Řešení – Model atomového jádra

Řešení úlohy 1

- a) V SC soustavě je v každém z osmi vrcholů dané krychle právě jedna jednotka (atom, nukleon, atd.), ale každá jednotka náleží současně osmi sousedícím krychlím – tedy na jednu krychli připadá jeden nukleon. Pokud se nukleony dotýkají, jak předpokládáme v našem zjednodušeném modelu, pak strana krychle je $a = 2r_N$. Objem jednoho nukleonu je?

$$V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{4a^3}{24}\pi = \frac{\pi}{6}a^3. \quad (1)$$

Tedy,

$$f = \frac{V_N}{a^3} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52. \quad (2)$$

- b) Hustota jádra je

$$\rho_m = f \frac{m_N}{V_N} \approx 3,40 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^3. \quad (3)$$

Užijeme předpoklad, že počet protonů a neutronů je stejný a pro hustotu náboje dostaneme

$$\rho_c = \frac{f}{2} \frac{e}{V_N} \approx 1,63 \cdot 10^{25} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (4)$$

Počet nukleonů v jádře je dán nukleonovým číslem A . Celkový objem, který jádro zaujímá je

$$V = \frac{AV_N}{f}, \quad (5)$$

z čehož vyplývá následující vztah mezi poloměrem jádra a počtem nukleonů

$$R = r_N \left(\frac{A}{f}\right)^{\frac{1}{3}} = 1,06 \text{ fm } A^{1/3}. \quad (6)$$

Číselnou konstantu 1,06 fm ve výsledku budeme nadále označovat r_0 .

Řešení úlohy 2

Nejprve musíme odhadnout počet povrchových nukleonů. Povrchové nukleony jsou ve vrstvě o tloušťce $2r_N$ na povrchu jádra. Objem vrstvy je

$$V_{\text{surface}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R - 2r_N)^3 = 8\pi \left(R^2 r_N - 2R r_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3\right), \quad (7)$$

z čehož plyne pro počet povrchových nukleonů

$A_{\text{surface}} = f \frac{V_{\text{surface}}}{V_N} = f \frac{8\pi \left(R^2 r_N - 2Rr_N^2 + \frac{4}{3}r_N^3 \right)}{\frac{4}{3}\pi r_N^3} = 6f \left(\left(\frac{R}{r_N} \right)^2 - 2 \left(\frac{R}{r_N} \right) + \frac{4}{3} \right)$ $= 6f \left(\left(\frac{A}{f} \right)^{\frac{2}{3}} - 2 \left(\frac{A}{f} \right)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3} \right) = 6f^{\frac{1}{3}} A^{\frac{2}{3}} - 12f^{\frac{2}{3}} A^{\frac{1}{3}} + 8f$ $\approx 4,84A^{\frac{2}{3}} - 7,80A^{\frac{1}{3}} + 4,19.$	(8)
---	-----

Vazebnou energii tedy můžeme psát

$E_b = (A - A_{\text{surface}})a_V + A_{\text{surface}}a_V/2 = Aa_V - 3f^{\frac{1}{3}}A^{\frac{2}{3}}a_V + 6f^{\frac{2}{3}}A^{\frac{1}{3}}a_V - 4fa_V$ $E_b = (15,8A - 38,20A^{\frac{2}{3}} + 61,58A^{\frac{1}{3}} - 33,09) \text{ MeV}.$	(9)
---	-----

Řešení úlohy 3

a) Dosadíme-li do vzorce v zadání za $Q_0 Ze$, dostaneme elektrostatickou energii jádra

$U_c = \frac{3(Ze)^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$	(10)
--	------

Vezmeme ještě v úvahu, že každý proton neinteraguje sám se sebou tak, že Z^2 nahradíme $Z(Z-1)$, dostaneme

$U_c = \frac{3Z(Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R}.$	(11)
---	------

b) Ve vztahu pro elektrostatickou energii nahradíme poloměr R výrazem $r_N f^{1/3} A^{1/3}$ a dostaneme

$\Delta E_b = -\frac{3e^2 f^{\frac{1}{3}}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} = -\frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} 1,31 \cdot 10^{-13} \text{ J} = -\frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} 0,815 \text{ MeV}$ $\approx -0,204A^{5/3} \text{ MeV} + 0,409A^{2/3} \text{ MeV},$	(12)
---	------

kde bylo použito, že $Z \approx A/2$. Coulombovské odpuzování snižuje vazebnou energii, proto má první člen záporné znaménko. Celkový vztah pro vazebnou energii má tedy formu

$E_b = Aa_v - 3f^{1/3}A^{2/3}a_v + 6f^{2/3}A^{1/3}a_v - 4fa_v - \frac{3e^2 f^{1/3}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{5/3}}{4} - \frac{A^{2/3}}{2} \right).$	(13)
---	------

Řešení úlohy 4

a) Kinetická energie je rovna rozdílu vazebných energií dvou malých jader a původního velkého jádra a Coulombovské energie dvou menších jader (každé z nich má $Z/2 = A/4$ protonů)

$E_{kin}(d) = 2E_b\left(\frac{A}{2}\right) - E_b(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2 e^2}{4 \cdot 4 \cdot d} =$ $= -3f^{\frac{1}{3}} A^{\frac{2}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right) a_v + 6f^{\frac{2}{3}} A^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right) a_v - 4f a_v$ $- \frac{3e^2 f^{\frac{1}{3}}}{20\pi\epsilon_0 r_N} \left(\frac{A^{\frac{5}{3}}}{4} (2^{-\frac{2}{3}} - 1) - \frac{A^{2/3}}{2} (2^{\frac{1}{3}} - 1) \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2 e^2}{16d}.$	(14)
--	------

b) Kinetická energie pro $d = 2RA/2$ je tedy

$E_{kin}(d) = 2E_b\left(\frac{A}{2}\right) - E_b(A) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{A^2 e^2}{16 \cdot 2r_N A^{\frac{1}{3}} f^{-\frac{1}{3}}} =$ $= -3f^{\frac{1}{3}} A^{\frac{2}{3}} \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right) a_v + 6f^{\frac{2}{3}} A^{\frac{1}{3}} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1\right) a_v - 4f a_v$ $- \frac{e^2 f^{\frac{1}{3}}}{\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{3}{80} \left(2^{-\frac{2}{3}} - 1\right) + \frac{1}{128} \right] A^{\frac{5}{3}} - \frac{e^2 f^{\frac{1}{3}}}{\pi\epsilon_0 r_N} \left[\frac{3}{40} \left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right) \right] A^{\frac{2}{3}} =$ $= \left(0,02203A^{\frac{5}{3}} - 10,0365A^{\frac{2}{3}} + 36,175A^{\frac{1}{3}} - 33,091\right) \text{ MeV}.$	(15)
--	------

Číselně dostáváme

$$A = 100 \dots E_{kin} = -33,95 \text{ MeV},$$

$$A = 150 \dots E_{kin} = -30,93 \text{ MeV},$$

$$A = 200 \dots E_{kin} = -14,10 \text{ MeV},$$

$$A = 250 \dots E_{kin} = +15,06 \text{ MeV}.$$

V našem modelu je štěpení možné, pokud $E_{kin} \geq 0$. Z číselných výsledků výše hrubě odhadneme, že kladná kinetická energie je pro počet nukleonů větší než 225. Počítáme-li přesně z rovnice

$E_{kin} = 0,02203A^{\frac{5}{3}} - 10,0365A^{\frac{2}{3}} + 36,175A^{\frac{1}{3}} - 33,091 \text{ MeV} \geq 0$	(16)
---	------

zjistíme, že štěpení je možné pro $A \geq 227$.

Řešení úlohy 5

a) Tato část může být řešena relativisticky nebo nerelativisticky.

Nerelativistické řešení

Nejprve je třeba určit hmotnost, které se při reakci přemění na energii (neboli energetický ekvivalent, tzv. hodnota Q)

$\Delta m = (\text{celková hmotnost})_{\text{po reakci}} - (\text{celková hmotnost})_{\text{před reakcí}} =$ $= (57,93535 + 12,00000) \text{ a. m. u.} - (53,93962 + 15,99491) \text{ a. m. u.} =$ $= 0,00082 \text{ a. m. u.} = 1,3616 \cdot 10^{-30} \text{ kg}.$	(17)
---	------

Použitím Einsteinova vzorce dostaneme

$Q = (\text{celková kin. energie})_{\text{po reakci}} - (\text{celková kin. energie})_{\text{před reakci}} = -\Delta mc^2$ $Q = -1,2237 \cdot 10^{-27} \text{ J.}$	(18)
--	------

Převědeme-li tuto energii na MeV, máme

$Q = -0,761 \text{ MeV.}$	(19)
---------------------------	------

Úlohu budeme dále řešit pomocí zákonů zachování energie a hybnosti. Druhý zákon nám dává (zajímá nás pouze případ, kdy ^{12}C a ^{16}O mají stejný směr, proto nebudeme používat vektory)

$m(^{16}\text{O})v(^{16}\text{O}) = m(^{12}\text{C})v(^{12}\text{C}) + m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})$	(20)
--	------

a zákon zachování energie

$E_k(^{16}\text{O}) + Q = E_k(^{12}\text{C}) + E_k(^{58}\text{Ni}) + E_x(^{58}\text{Ni}),$	(21)
--	------

kde $E_x(^{58}\text{Ni})$ je excitační energie ^{58}Ni a energetický ekvivalent Q byl vypočten v první části úlohy. Jelikož ^{12}C a ^{16}O mají stejnou rychlost, zákon zachování hybnosti se redukuje na

$[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})]v(^{16}\text{O}) = m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni}).$	(22)
---	------

Nyní můžeme snadno nalézt kinetickou energii ^{58}Ni :

$E_k(^{58}\text{Ni}) = \frac{m(^{58}\text{Ni})v^2(^{58}\text{Ni})}{2} = \frac{[m(^{58}\text{Ni})v(^{58}\text{Ni})]^2}{2m(^{58}\text{Ni})}$ $= \frac{[(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C}))v(^{16}\text{O})]^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = E_k(^{16}\text{O}) \frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C}))^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})}$	(23)
--	------

a excitační energie ^{58}Ni je tedy

$E_x(^{58}\text{Ni}) = E_k(^{16}\text{O}) + Q - E_k(^{12}\text{C}) - E_k(^{58}\text{Ni}) =$ $= E_k(^{16}\text{O}) + Q - \frac{m(^{12}\text{C})v^2(^{16}\text{O})}{2} - E_k(^{16}\text{O}) \frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C}))^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} =$ $= Q + E_k(^{16}\text{O}) \left[1 - \frac{m(^{12}\text{C})}{m(^{16}\text{O})} - \frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C}))^2}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})} \right] =$ $= Q + E_k(^{16}\text{O}) \frac{[m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})][m(^{58}\text{Ni}) - m(^{16}\text{O}) + m(^{12}\text{C})]}{m(^{58}\text{Ni})m(^{16}\text{O})}.$	(24)
---	------

První závorka v čitateli je přibližně rovna hmotnosti jádra ^4He , zatímco druhá závorka je přibližně rovna hmotnosti terčového jádra ^{54}Fe . Dosazením numerických hodnot dostáváme

$E_x(^{58}\text{Ni}) = 10,866 \text{ MeV.}$	(25)
---	------

Relativistické řešení

V relativistickém výpočtu vyjdeme se zákona zachování energie a zákona zachování hybnosti,

$m(^{54}\text{Fe}) \cdot c^2 + \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}} = \frac{m(^{12}\text{C}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2(^{12}\text{C})/c^2}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2(^{58}\text{Ni})/c^2}}$ $\frac{m(^{16}\text{O}) \cdot v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}} = \frac{m(^{12}\text{C}) \cdot v(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - v^2(^{12}\text{C})/c^2}} + \frac{m^*(^{58}\text{Ni}) \cdot v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - v^2(^{58}\text{Ni})/c^2}}$	(26)
---	------

Všechny hmotnosti v rovnicích jsou klidové hmotnosti; ^{58}Ni není v základním stavu, ale v jednom ze stavů excitovaných (hmotnost je označena m^*). Jelikož ^{12}C a ^{16}O mají stejné rychlosti, soustava rovnic se zjednoduší

$m(^{54}\text{Fe}) + \frac{m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})}{\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}} = \frac{m^*(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - v^2(^{58}\text{Ni})/c^2}}$ $\frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) \cdot v(^{16}\text{O})}{\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}} = \frac{m^*(^{58}\text{Ni}) \cdot v(^{58}\text{Ni})}{\sqrt{1 - v^2(^{58}\text{Ni})/c^2}}$	(27)
--	------

Vydělíme druhou rovnici první

$v(^{58}\text{Ni}) = \frac{(m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) \cdot v(^{16}\text{O})}{m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C}) + m(^{54}\text{Fe}) \sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}}$	(28)
--	------

Rychlost projektilu vypočteme z jeho energie

$E_{kin} = \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}} - m(^{16}\text{O}) \cdot c^2$ $\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2} = \frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{E_{kin} + m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}$ $v(^{16}\text{O}) = \sqrt{1 - \left(\frac{m(^{16}\text{O}) \cdot c^2}{E_{kin} + m(^{16}\text{O}) \cdot c^2} \right)^2}$	(29)
--	------

Pro dané číselné hodnoty

$v(^{16}\text{O}) = 2,4498 \cdot 10^7 \text{ km/s.}$	(30)
--	------

Nyní vypočteme číselně

$v(^{58}\text{Ni}) = 1,6946 \cdot 10^6 \text{ km/s.}$	(31)
---	------

Hmotnost ^{58}Ni v excitovaném stavu je tedy

$m^*(^{58}\text{Ni}) = (m(^{16}\text{O}) - m(^{12}\text{C})) \frac{\sqrt{1 - v^2(^{58}\text{Ni})/c^2}}{\sqrt{1 - v^2(^{16}\text{O})/c^2}} \cdot \frac{v(^{16}\text{O})}{v(^{58}\text{Ni})} = 57,9470 \text{ a. m. u.}$	(32)
--	------

Excitační energie ^{58}Ni tedy je

$E_x = [m^*(^{58}\text{Ni}) - m(^{58}\text{Ni})] \cdot c^2 = 10,8636 \text{ MeV}$	(33)
---	------

Relativistický a nerelativistický výsledek se liší jen o 2keV, tedy oba lze považovat za správné. Tedy při daných energiích nejsou relativistické efekty podstatné.

b) Zákony zachování energie a hybnosti pro emisi fotonu z nehybného jádra dávají

$E_x(^{58}\text{Ni}) = E_\gamma + E_{zpětná}$ $p_\gamma = p_{zpětná}.$	(34)
--	------

Foton a jádro po emisi se pohybují samozřejmě opačnými směry. Hybnost fotonu je svázána s energií vztahem $E_\gamma = p_\gamma c$.

$E_\gamma = p_\gamma c.$	(35)
--------------------------	------

Jelikož pohyb nukleonu je v této oblasti energií nerelativistický, můžeme psát

$E_{zpětná} = \frac{p_{zpětná}^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{p_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni})} = \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni})c^2}.$	(36)
--	------

Po dosazení do zákona zachování energie, dostaneme

$E_x(^{58}\text{Ni}) = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2m(^{58}\text{Ni})c^2}.$	(37)
--	------

Tato kvadratická rovnice má řešení

$E_\gamma = -m(^{58}\text{Ni})c^2 + \sqrt{(m(^{58}\text{Ni})c^2)^2 + 2m(^{58}\text{Ni})c^2 E_x(^{58}\text{Ni})}.$	(38)
---	------

Číselně,

$E_\gamma = 10,8633 \text{ MeV}.$	(39)
-----------------------------------	------

A tedy

$E_{zpětná} = E_x(^{58}\text{Ni}) - E_\gamma = 1,1 \text{ keV}.$	(40)
--	------

Jelikož se jádro emitující foton pohybuje vysokou rychlostí, naměřená energie fotonu bude ovlivněna Dopplerovým efektem. Relativistický Dopplerův efekt (pro zdroj pohybující se k detektoru) je dán rovnicí

$f_{detektor} = f_{\gamma, emitované} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$	(41)
---	------

a jelikož energie a frekvence fotonu jsou svázány jednoduchým vztahem ($E = hf$) můžeme podobnou rovnici napsat i pro energii

$E_{detektor} = E_{\gamma, emitované} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$	(42)
---	------

kde $\beta = v/c$ a v je rychlost emitujícího jádra. Rychlosti jádra ^{58}Ni vypočteme z jeho kinetické energie a dostaneme

$E_{detektor} = 10,925 \text{ MeV.}$	(43)
--------------------------------------	------