

Řešení – Fyzika komínu

Tato úloha byla inspirována a postavena na následujících referencích

- W. W. Christie, *Chimney design and theory*, D. Van Nostrand Company, New York, 1902.
- J. Schlaich, R. Bergemann, W. Schiel, G. Weinrebe, *Design of Commercial Solar Updraft Tower Systems — Utilization of Solar Induced Convective Flows for Power Generation*, Journal of Solar Energy Engineering 127, 117 (2005).

Řešení úlohy 1

- a) Jaká je minimální výška komínu nutná k tomu, aby komín fungoval účinně, tedy aby odváděl veškeré vzniklé plynné zplodiny do atmosféry?

Označme $p(z)$ tlak vzduchu ve výšce z . Pak podle jednoho z předpokladů platí $p(z) = p(0) - \rho_{Air}gz$, kde $p(0)$ je atmosférický tlak v nulové výšce.

Uvnitř komína platí Bernoulliho rovnice, lze tedy psát

$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(z)^2 + \rho_{Smoke}gz + p_{Smoke}(z) = const.,$	(1)
---	-----

kde $p_{Smoke}(z)$ je tlak kouře ve výšce z , ρ_{Smoke} je jeho hustota a $v(z)$ značí rychlost kouře. Použili jsme zde předpoklad, že se hustota kouře nemění uvnitř komínu. Dosadíme nyní do rovnice dvě místa, (i) ohniště, tj. $z = -\varepsilon$, kde ε je zanedbatelně malé kladné číslo, a (ii) vrchol komína, kde $z = h$ a obdržíme

$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p_{Smoke}(h) = p_{Smoke}(-\varepsilon).$	(2)
--	-----

Na pravé straně jsme použili předpoklad, že rychlost plynů v ohništi je zanedbatelná, stejně jako člen $-\rho_{Smoke}g\varepsilon$.

Zajímá nás minimální výška, při které bude komín fungovat. Tlak plynu na vršku komínu musí být větší nebo rovný tlaku vzduchu ve výšce h , pro minimální výšku komínu máme tedy $p_{Smoke}(h) \approx p(h)$. V ohništi zase můžeme použít $p_{Smoke}(-\varepsilon) \approx p(0)$. Dosadíme toto do Bernoulliho rovnice (2),

$\frac{1}{2}\rho_{Smoke}v(h)^2 + \rho_{Smoke}gh + p(h) \approx p(0).$	(3)
---	-----

Odtud dostaneme výsledek

$v(h) = \sqrt{2gh\left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1\right)}.$	(4)
--	-----

Komín bude efektivní, jestliže všechny zplodiny budou odvedeny do atmosféry, tj.

$v(h) \geq \frac{B}{A},$	(5)
--------------------------	-----

odkud máme

$h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{1}{\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1}.$	(6)
--	-----

Kouř v ohništi můžeme považovat za ideální plyn (za atmosférického tlaku $p(0)$ a teploty T_{Smoke}). Kdyby měl vzduch tutéž teplotu a tlak, měl by také stejnou hustotu, dle našich předpokladů. Využijeme toho k určení vztahu mezi ρ_{Air}/ρ_{Smoke} a T_{Smoke}/T_{Air} , tedy

$\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} = \frac{T_{Smoke}}{T_{Air}}$	(7)
---	-----

$h \geq \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{Air}}{T_{Smoke} - T_{Air}} = \frac{B^2}{A^2} \frac{1}{2g} \frac{T_{Air}}{\Delta T}.$	(8)
--	-----

Pro minimální výšku komínu platí znaménko rovnosti

b) Jak vysoký musí být komín v teplé oblasti?

$\frac{h(30)}{h(-30)} = \frac{\frac{T(30)}{T_{Smoke} - T(30)}}{\frac{T(-30)}{T_{Smoke} - T(-30)}} \Rightarrow h(30) = 145 \text{ m}.$	(9)
---	-----

c) Jak se mění rychlost plynů s výškou komínu?

Rychlost je konstantní.

$v = \sqrt{2gh \left(\frac{\rho_{Air}}{\rho_{Smoke}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \left(\frac{T_{Smoke}}{T_{Air}} - 1 \right)} = \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}}.$	(10)
--	------

Toto je vidět z rovnice kontinuity $Av = \text{const.}$ (ρ_{Smoke} je konstantní). Vykazuje skokový nárůst z téměř nulové rychlosti na svoji konstantní hodnotu, když kouř vstupuje z ohniště do komína. Jelikož komín pracuje na své minimální výšce, konstanta je rovna B/A , tj. $v = B/A$.

d) V jisté výšce z dostáváme z Bernoulliho rovnice

$p_{Smoke}(z) = p(0) - (\rho_{Air} - \rho_{Smoke})gh - \rho_{Smoke}gz.$	(11)
---	------

Tedy, tlak kouře se prudce mění, když kouř vstoupí do komínu z ohniště a získá skokově rychlost.

Řešení úlohy 2

a) Kinetická energie horkého vzduchu uvolněného za časový interval Δt je

$E_{kin} = \frac{1}{2} (Av\Delta t \rho_{Hot}) v^2 = Av\Delta t \rho_{Hot} gh \frac{\Delta T}{T_{Air}},$	(12)
--	------

kde index „Hot“ označuje horký vzduch ohřátý Sluncem. Označíme-li hmotnost vzduchu opouštějícího komín za jednotku času $w = Av\rho_{Hot}$, pak výkon odpovídající kinetické energii výše je

$$P_{kin} = wgh \frac{\Delta T}{T_{Air}}. \quad (13)$$

Toto je maximální výkon, který lze z kinetické energie plynu získat.

Výkon Slunce potřebný pro ohřátí vzduchu je

$$P_{Sun} = GS = wc\Delta T. \quad (14)$$

Účinnost je zřejmě

$$\eta = \frac{P_{kin}}{P_{Sun}} = \frac{gh}{cT_{Air}}. \quad (15)$$

b) Změna je zřejmě lineární.

Řešení úlohy 3

a) Účinnost je

$$\eta = \frac{gh}{cT_{Air}} = 0,0064 = 0,64 \%. \quad (16)$$

b) Výkon je

$$P = GS\eta = G \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \eta = 45 \text{ kW} \quad (17)$$

c) Při osmi hodinách slunečního svitu za den získáme 360 kWh.

Řešení úlohy 4

Řešení lze získat vyjádřením hmotnostního toku vzduchu w jako

$$w = Av\rho_{Hot} = A \sqrt{2gh \frac{\Delta T}{T_{Air}}} \rho_{Hot} \quad (18)$$

$$w = \frac{GS}{c\Delta T} \quad (19)$$

Z čehož plyne

$$\Delta T = \left(\frac{G^2 S^2 T_{Air}}{A^2 c^2 \rho_{Hot}^2 gh} \right)^{1/3} \approx 9,1 \text{ K}. \quad (20)$$

Z toho dostaneme

$$w = 760 \text{ kg/s}. \quad (21)$$

