

Řešení - zrcadlový obraz náboje

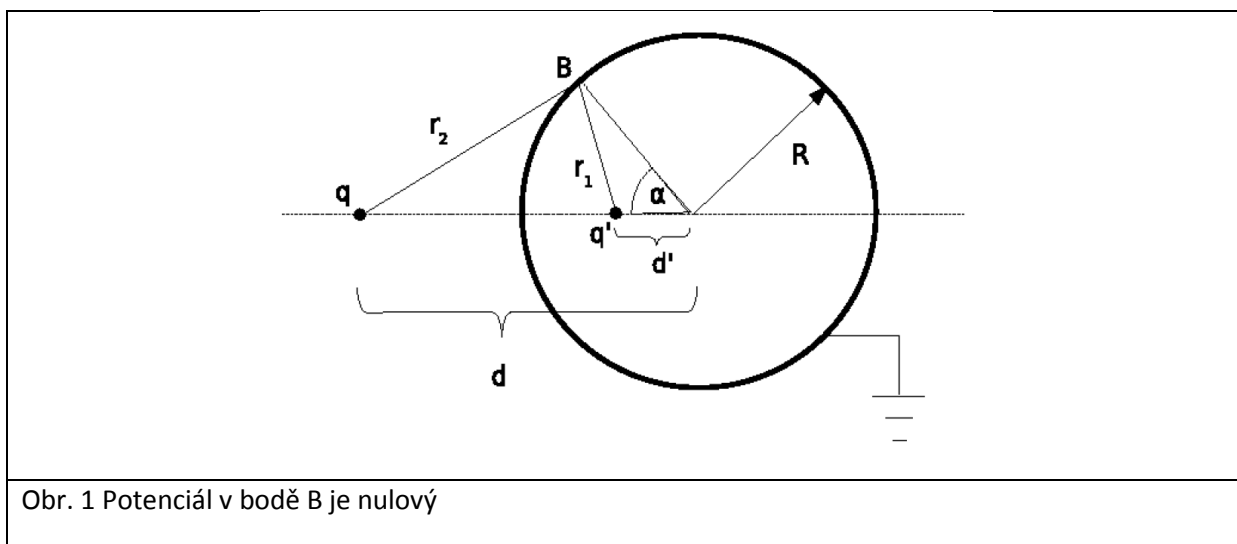
Řešení úlohy 1

Úloha 1a)

Jelikož je kovová kulová plocha uzemněná, její elektrický potenciál je nulový, $V = 0$.

Úloha 1b)

Uvažujme libovolný bod B na kulové ploše, viz obr. 1.



Vzdálenost bodu B od náboje q' je

$r_1 = \sqrt{R^2 + d'^2 - 2Rd' \cos \alpha},$	(1)
---	-----

zatímco vzdálenost bodu B od náboje q je dána výrazem

$r_2 = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha}.$	(2)
---	-----

Elektrický potenciál v bodě B lze vypočítat ze vztahu

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1} \right).$	(3)
---	-----

Jelikož potenciál musí být nulový,

$\left(\frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r_1} \right) = 0.$	(4)
--	-----

Z (1), (2) a (4) dostaneme

$R^2 + d^2 - 2Rd \cos \alpha = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 (R^2 + d'^2).$	(5)
---	-----

Jelikož kovová kulová plocha musí být ekvipotenciální, podmínka (5) bude splněná pro každý úhel α , což vede k následujícím rovnicím

$d^2 + R^2 = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 (R^2 + d'^2)$	(6)
--	-----

$Rd = \left(\frac{q}{q'}\right)^2 R d'.$	(7)
--	-----

Řešením rovnic (6) a (7) dostáváme výraz pro vzdálenost náboje q' od středu kulové plochy a velikost náboje q' ,

$d' = \frac{R^2}{d}$	(8)
----------------------	-----

$q' = -q \frac{R}{d}$	(9)
-----------------------	-----

Úloha 1c)

Velikost síly působící na náboj q je

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}.$	(10)
---	------

Síla je evidentně přitažlivá.

Řešení úlohy 2

Úloha 2a)

Elektrické pole v bodě A je

$\vec{E}_A = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \frac{R}{d}}{\left(r - d + \frac{R^2}{d}\right)^2} \right) \hat{r}$	(11)
---	------

Úloha 2b)

Pro velké vzdálenosti r použijeme odhad $(1 + a)^{-2} \approx 1 - 2a$ ve vztahu (11),

$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(1 - \frac{R}{d}\right) q}{r^2} \hat{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q \frac{R}{d} \left(d - \frac{R^2}{d}\right)}{r^3} \hat{r}$	(12)
--	------

Obecně nemůže uzemněná kovová kulová plocha zcela odstínit bodový náboj q ve vzdálenosti d (i kdyby elektrické pole klesalo se vzdáleností rychleji než $1/r^2$). Dominantní člen elektrického pole tedy závisí na vzdálenosti stejně jako ve standardním Coulombově zákoně.

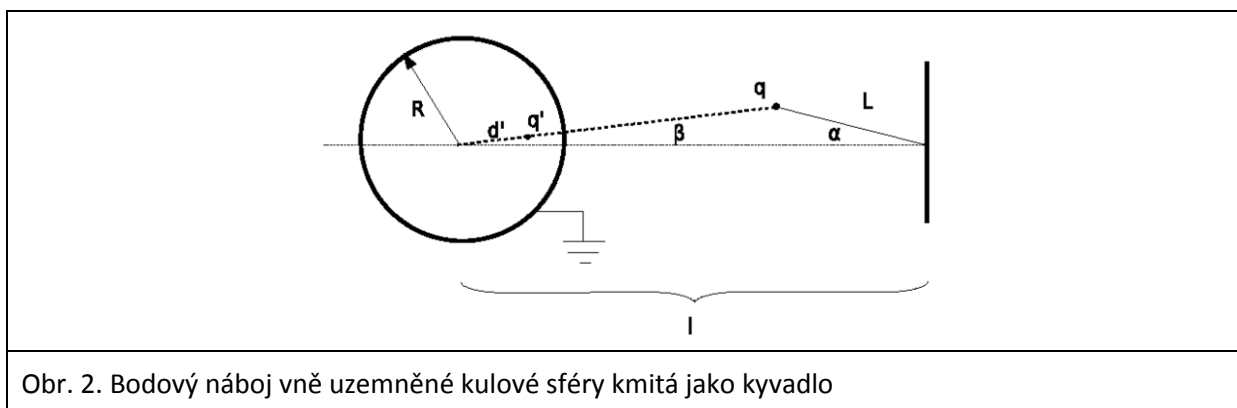
Úloha 2c)

V limitním případě $d \rightarrow R$ vymizí elektrické pole v bodě A a uzemněná kovová kulová plocha zcela odstíní bodový náboj.

Řešení úlohy 3

Úloha 3a)

Uvažujme situaci z obr. 2



Obr. 2. Bodový náboj vně uzemněné kulové sféry kmitá jako kyvadlo

Vzdálenost náboje q od středu kulové plochy je

$d = \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}$	(13)
--	------

Velikost elektrické síly působící na tento náboj q je

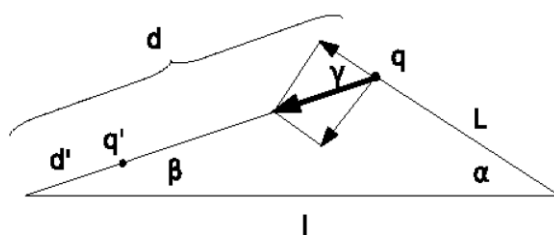
$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(d - d')^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2}$	(14)
--	------

Odtud

$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2}$	(15)
---	------

Úloha 3b)

Směr vektoru elektrické síly (15) je na obr. 3

Obr. 3. Směr síly F .

Vztah mezi úhly α a β je

$$L \sin \alpha = d \sin \beta \quad (16)$$

kde pro úhel γ platí $\gamma = \alpha + \beta$. Složka síly kolmá na vlákno je $F \sin \gamma$, tedy

$$F_{\perp} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R \sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}}{(l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha - R^2)^2} \sin(\alpha + \beta),$$

kde

$$\beta = \arcsin\left(\frac{L}{\sqrt{l^2 + L^2 - 2lL \cos \alpha}} \sin \alpha\right). \quad (17)$$

Úloha 3c)

Pohybová rovnice matematického kyvadla je

$$mL\ddot{\alpha} = -F_{\perp} \quad (18)$$

Jelikož nás zajímají malé kmity, úhel α je malý, tj. jeho hodnota v radiánech je mnohem menší než 1. Můžeme použít aproximace $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Tedy pro malé kmity kyvadla máme $\beta \approx \alpha L(l - L)$ a $\gamma \approx \alpha/(l - L)$.

S použitím těchto vztahů a rovnosti (13) dostaneme

$$mL \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(d^2 - R^2)^2} \left(1 + \frac{L}{d}\right) \alpha = 0 \quad (19)$$

Jelikož $d = l - L$,

$$\omega = \frac{q}{d^2 - R^2} \sqrt{\frac{R d}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mL} \left(1 + \frac{L}{d}\right)} = \frac{q}{(l - L)^2 - R^2} \sqrt{\frac{R l}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{mL}} \quad (20)$$

Řešení úlohy 4

Představíme nejprve řešení založené na definici elektrostatické energie soustavy nábojů

Úloha 4a)

Celkovou energii soustavy rozdělíme na elektrostatickou energii interakce vnějšího náboje s indukovaným nábojem na kulové ploše $E_{el,1}$ a elektrostatickou energii vzájemné interakce nábojů na sféře $E_{el,2}$, tj.

$E_{el} = E_{el,1} + E_{el,2}$	(21)
--------------------------------	------

Uvažujme N nábojů indukovaných na kulové ploše. Tyto náboje q_j jsou umístěny v bodech $\vec{r}_j$, $j = 1, \dots, N$ na kulové ploše. Použijeme definici zrcadlového náboje, tj. potenciál na kulové ploše pocházející od zrcadlového náboje, který je totožný s potenciálem indukovaných nábojů:

$\frac{q'}{ \vec{r} - \vec{d}' } = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{ \vec{r}_j - \vec{r} }$	(22)
--	------

kde $\vec{r}$ je polohový vektor bodu na kulové ploše a $\vec{d}'$ udává polohu zrcadlového náboje. Pokud je $\vec{r}$ totožné s nějakým $\vec{r}_i$, pak

$\frac{q'}{ \vec{r}_i - \vec{d}' } = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{ \vec{r}_j - \vec{r}_i }$	(23)
---	------

Jelikož potenciál na kulové ploše musí být nulový, máme

$\frac{q'}{ \vec{r} - \vec{d}' } + \frac{q}{ \vec{r} - \vec{d} } = 0$	(24)
---	------

kde $\vec{d}$ značí polohu náboje q .

Interakční energie vnějšího náboje s indukovanými náboji je

$E_{el,1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{ \vec{r}_i - \vec{d} } = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{ \vec{d}' - \vec{d} } = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$	(25)
--	------

Zde první rovnost vyplývá z definice této energie jako součtu interakcí náboje q s každým z indukovaných nábojů na povrchu kulové plochy. Druhá rovnost vyplývá z rovnosti (23).

Interakční energie $E_{el,1}$ vlastně přímo vyplývá z definice zrcadlového náboje.

Úloha 4b)

Energie vzájemného působení indukovaných nábojů na povrchu kulové plochy je dána

$E_{el,2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j } = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q'}{ \vec{r}_i - \vec{d}' } = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i q}{ \vec{r}_i - \vec{d} } =$	(26)
---	------

$= -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{ \vec{d}' - \vec{d} } = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$	
--	--

Zde druhá rovnost vyplývá z (24), třetí z (25) a čtvrtá opět z (24).

Úloha 4c)

Z výsledků (25) a (26) dostaneme vztah pro celkovou energii elektrostatické interakce

$E_{el} = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$	(27)
--	------

Alternativní řešení vychází z definice mechanické práce, známe-li integrál

$\int_d^\infty \frac{x dx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$	(28)
--	------

Celkovou energii systému dostaneme výpočtem práce potřebné k přenesení náboje q z nekonečna do vzdálenosti d od středu kulové plochy.

$E_{el,1} = - \int_\infty^d F(\vec{x}) d\vec{x} = \int_d^\infty F(\vec{x}) d\vec{x} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_d^\infty \frac{q^2 R x}{(x^2 - R^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$	(29)
---	------

Máme tedy řešení úlohy 4c).

Elektrostatická energie náboje q a kulovou plochou musí být rovna energii dvojice nábojů q a q' podle definice zrcadlového náboje.

$E_{el,1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d - d'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$	(30)
--	------

Máme tedy i výsledek úlohy 4a) a tedy i výsledek úlohy 4b

$E_{el,2} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R}{d^2 - R^2}$	(31)
---	------