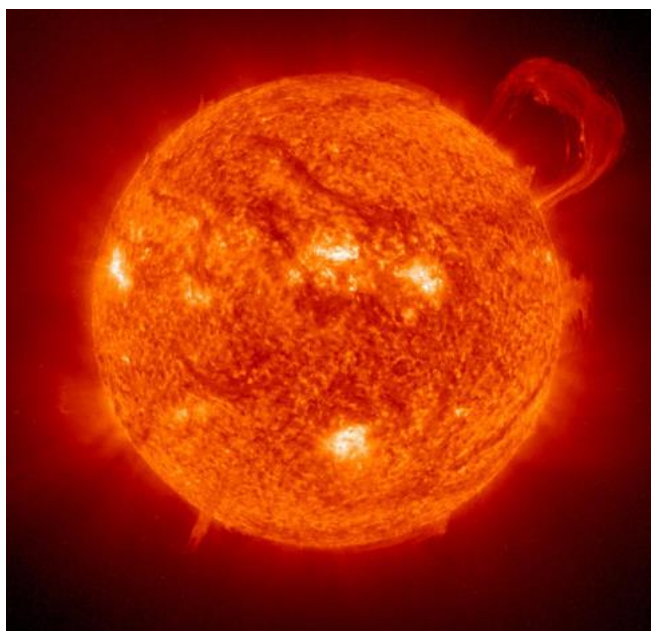


TEORETICKÝ PROBLÉM Č. 3

PROČ JSOU HVĚZDY TAK VELKÉ?

Hvězdy jsou koule horkých plynů. Většina z nich září, protože v jejich vnitřku probíhá fúze vodíku na helium (tj. termojaderná syntéza). V této úloze použijeme přístup klasický i kvantově mechanický společně s elektrostatikou a termodynamikou, abychom porozuměli tomu, proč musí být hvězdy dostatečně velké, aby v nich mohl probíhat proces fúze. Odvodíme, jaká musí být hmotnost a poloměr nejmenší hvězdy, ve které může vodík fúzovat.



Obr. 1. Naše Slunce, stejně jako většina hvězd, svítí v důsledku termojaderné fúze vodíku na helium ve vnitřní části

UŽITEČNÉ KONSTANTY

Gravitační konstanta	$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^2$
Boltzmannova konstanta	$k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Planckova konstanta	$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-1}$
Hmotnost protonu	$m_p = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Hmotnost elektronu	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Jednotkový elektrický náboj	$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Permitivita vakua	$\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Poloměr Slunce	$R_S = 7,0 \cdot 10^8 \text{ m}$
Hmotnost Slunce	$M_S = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

1. Klasický odhad teploty ve středu hvězd

Předpokládejte, že plyn, ze kterého se hvězda skládá, je čistý ionizovaný vodík (tj. elektrony a protony ve stejném množství) a že se chová jako ideální plyn. Aby dva protony fúzovaly, musí se (z klasického pohledu) k sobě přiblížit na vzdálenost 10^{-15} m. V této vzdálenosti krátkodosahová silná jaderná síla, která je přitažlivá, překoná odpudivou Coulombovu sílu. Nicméně, aby se takto k sobě přiblížily, musí nejprve odpudivou sílu překonat. Předpokládejme klasicky, že se dva protony (které považujeme za bodové náboje) při jednorozměrné čelní srážce pohybují proti sobě každý střední kvadratickou rychlostí v_{rms} (z angl. root-mean-square velocity).

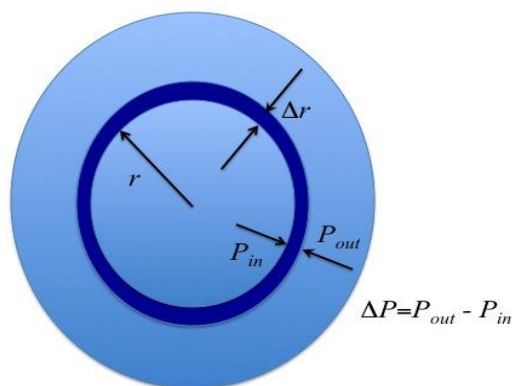
1a	Jaká musí být teplota plynu T_c , aby se k sobě protony přiblížily na vzdálenost d_c rovnou 10^{-15} m? Uveďte výsledek a také všechny další číselné hodnoty v této úloze na <i>dvě platné cifry</i> .	1,5
----	--	-----

2. Zjištění, že právě získaný odhad teploty je špatný

Abychom zkontrolovali, zda je předchozí odhad teploty rozumný, potřebujeme nezávislý způsob, jak zjistit vnitřní teplotu hvězdy. Struktura hvězdy je velice komplikovaná, ale je možné mnohé pochopit za určitých předpokladů. Hvězdy jsou v rovnováze, tedy nerozpínají se ani nesmršťují se, protože dovnitř působící gravitační sílu vyrovnává ven působící síla tlaková (viz obr. 2). Pro element plynu v dané vzdálenosti r od středu hvězdy můžeme psát rovnici hydrostatické rovnováhy

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = - \frac{G M_r \rho_r}{r^2},$$

kde P je tlak plynu, G gravitační konstanta, M_r hmotnost hvězdy uvnitř koule o poloměru r a ρ_r je hustota plynu v daném místě.



Obr. 2. Hvězdy jsou v hydrostatické rovnováze, přičemž rozdíl tlaků je vyrovnáván gravitací

Řádový odhad velikosti středové teploty hvězdy lze získat z hodnot parametrů ve středu a na povrchu hvězdy užitím následujících aproximací:

$$\Delta P \approx P_o - P_c,$$

kde P_c a P_o jsou tlaky ve středu a na povrchu hvězdy. Protože je $P_c \gg P_o$, lze předpokládat, že

$$\Delta P \approx -P_c.$$

Ve stejné aproximaci můžeme psát

$$\Delta r \approx R,$$

kde R je celkový poloměr hvězdy a

$$M_r \approx M_R = M,$$

kde M je celková hmotnost hvězdy.

Hustotu můžeme odhadnout její hodnotou ve středu, tedy

$$\rho_r \approx \rho_c.$$

Můžete předpokládat, že tlak je dán vztahem pro ideální plyn.

2a	Nalezněte závislost teploty ve středu hvězdy T_c pouze na poloměru a hmotnosti hvězdy a fyzikálních konstantách.	0,5
----	--	-----

Jako kritérium platnosti tohoto modelu použijeme jeho následující důsledky:

2b	Užitím rovnice odvozené v části (2a) napište předpokládaný poměr M / R pro hvězdu v závislosti pouze na fyzikálních konstantách a T_c .	0,5
----	---	-----

2c	Pomocí hodnoty T_c odvozené v části (1a) číselně vypočtete hodnotu očekávaného poměru M / R pro hvězdu.	0,5
----	---	-----

2d	Vypočtete nyní poměr $M(\text{Sun}) / R(\text{Sun})$ a ověřte, že tato hodnota je mnohem menší než hodnota vypočtená v části (2c).	0,5
----	--	-----

3. Kvantově mechanický odhad teploty středu hvězd

Velký rozpor nalezený v části (2d) naznačuje, že klasický odhad T_c získaný v části (1a) není správný. Uvažujeme-li kvantově mechanické efekty, dostaneme lepší výsledek. Předpokládejme, že se protony chovají jako vlny a jediný proton je „rozmažán“ na úsečce velikosti řádu λ_p de Broglieho vlnové délky. Z toho vyplývá, že délka d_c , na kterou se musí protony k sobě přiblížit, je řádu λ_p . Při takovémto přiblížení se v kvantově mechanickém smyslu protony překryjí a mohou fúzovat.

3a	Předpokládejte, že $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ je podmínka nutná pro fúzi. Pro proton o rychlosti v_{rms} nalezněte závislost T_c pouze na fyzikálních konstantách.	1,0
----	---	-----

3b	Číselně vypočtete teplotu T_c získanou v části (3a).	0,5
----	--	-----

3c	Hodnotu T_c z části (3b) dosadíte do rovnice odvozené v části (2b) a číselně vypočtete hodnotu předpokládaného poměru M / R pro hvězdu. Ověřte, že tato hodnota je docela blízká pozorovanému poměru $M(\text{Sun}) / R(\text{Sun})$.	0,5
----	--	-----

Skutečně, hvězdy na tzv. *hlavní posloupnosti* (tj. fúzující vodík) přibližně splňují toto kritérium, dané poměrem M / R , pro velký rozsah hmotností.

4. Poměr hmotnost/poloměr hvězd

Předchozí shoda naznačuje, že kvantově mechanický přístup pro odhad teploty ve středu Slunce je správný.

4a	Použijte předchozí výsledek a ukažte, že pro jakoukoli hvězdu fúzující vodík je poměr hmotnosti M ku poloměru R stejný a závisí jen na fyzikálních konstantách. Odvoďte závislost poměru M / R pro hvězdy fúzující vodík.	0,5
----	---	-----

5. Hmotnost a poloměr nejmenší hvězdy

Výsledek získaný v části (4a) napovídá, že by hvězdy mohly mít libovolnou hmotnost, pokud bude splněna výše uvedená podmínka. To ovšem není pravda.

O plynu uvnitř normálních hvězd fúzujících vodík je známo, že se přibližně chová jako ideální plyn. To znamená, že typická vzdálenost mezi elektrony d_e je v průměru větší než λ_e , tj. jejich typická de Broglieho vlnová délka. Jsou-li blíže, nacházejí se elektrony v tzv. degenerovaném stavu a hvězdy se pak chovají odlišně. Povšimněte si rozdílů ve způsobu, jak popisujeme protony a elektrony uvnitř hvězdy. De Broglieho vlny protonů se musí překrývat, aby docházelo k jejich srážkám a mohly fúzovat, kdežto de Broglieho vlny elektronů se nesmí překrývat, aby se chovaly jako ideální plyn.

Hustota hvězd roste směrem ke středu hvězd. Nicméně, pro tento řádový odhad velikosti uvažujte, že je hustota všude stejná. Dále užitě fakt, že $m_p \gg m_e$.

5a	Nalezněte vztah pro n_e , průměrnou hustotu počtu elektronů uvnitř hvězdy.	0,5
----	--	-----

5b	Nalezněte vztah pro d_e , typickou vzdálenost mezi elektrony uvnitř hvězdy.	0,5
----	---	-----

5c	Užijte podmínku $d_e \geq \frac{\lambda_e}{2^{1/2}}$ a napište rovnici pro poloměr nejmenší možné hvězdy. Uvažujte teplotu ve středu hvězdy, typickou pro celý vnitřek hvězdy.	1,5
----	--	-----

5d	Číselně vypočtete hodnotu poloměru nejmenší možné normální hvězdy v metrech a v jednotkách poloměru Slunce.	0,5
----	---	-----

5e	Číselně vypočtete hodnotu hmotnosti nejmenší možné normální hvězdy v kg a v jednotkách hmotnosti Slunce.	0,5
----	--	-----

6. Fúzující jádra helia ve starších hvězdách

Jak hvězdy stárnou, přemění fúzí většinu vodíku ve svých jádrech na helium (He), takže jsou nuceny začít fúzovat helium na těžší prvky, aby mohly dále svítit. Jádro helia má

dva protony a dva neutrony, takže má dvojnásobný náboj a přibližně čtyřnásobnou hmotnost protonu. Viděli jsme, že $d_c = \frac{\lambda_p}{2^{1/2}}$ je podmínka, aby protony mohly fúzovat.

6a	Stanovte ekvivalentní podmínku pro helium a nalezněte $v_{rms}(He)$, střední kvadratickou rychlost jader helia a $T(He)$, teplotu nutnou k fúzi helia.	0,5
----	--	-----