

Teoretický problém č. 3
PROČ JSOU HVĚZDY TAK VELKÉ?
ŘEŠENÍ

1) První, klasický odhad teploty ve středu hvězd

1a	Ze zákona zachování energie plyne $2\frac{1}{2}m_p v_{rms}^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d_c}$. Jelikož také platí $\frac{3}{2}kT_c = \frac{1}{2}m_p v_{rms}^2$, dostaneme $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 d_c k} = 5,5 \cdot 10^9 \text{ K}$.	1,5
----	---	-----

2) Zjištění, že právě získaný odhad teploty je špatný

2a	Dosadíme do podmínky hydrostatické rovnováhy, všechny v zadání naznačené odhady $\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{GM_r \rho_r}{r^2}$ a dostaneme $P_c = \frac{GM \rho_c}{R}$. Pro ideální plyn ale platí $P_c = \frac{2\rho_c kT_c}{m_p}$. Číselný faktor 2 v předchozí rovnosti je nutný, jelikož na každou hmotnost protonu připadají dvě částice (proton a elektron), přičemž obě tyto částice stejně přispívají k tlaku plynu. Porovnáním obou rovnic snad získáme výsledek $T_c = \frac{GM m_p}{2kR}$.	0,5
----	--	-----

2b	Z předchozího výsledku máme $\frac{M}{R} = \frac{2kT_c}{Gm_p}.$	0,5
----	--	-----

2c	Dosazením dostaneme hodnotu $M/R = 1,4 \cdot 10^{24} \text{ kg / m}$.	0,5
----	--	-----

2d	Pro Slunce dostaneme $M(\text{Sun})/R(\text{Sun}) = 2,9 \cdot 10^{21} \text{ kg / m}$, tedy o tři řády menší hodnotu.	0,5
----	--	-----

3) Kvantově mechanický odhad teploty středu hvězd

3a	Pro de Broglieho vlnovou délku platí $\lambda_p = \frac{h}{m_p v_{rms}}.$ Z této rovnice můžeme dosadit do rovnice $T_c = \frac{q^2}{12\pi\epsilon_0 d_c k}$, jelikož dle zadání $d_c = \lambda_p 2^{-1/2}$. Za střední kvadratickou rychlost pak můžeme dosadit z $\frac{3}{2} k T_c = \frac{1}{2} m_p v_{rms}^2$. Po úpravě dostaneme $T_c = \frac{q^4 m_p}{24\pi^2 \epsilon_0^2 k h^2}.$	1,0
----	--	-----

3b	$T_c = 9,7 \cdot 10^6 \text{ K}$	0,5
----	----------------------------------	-----

3c	Dosazením nového odhadu teploty do výsledku úlohy 2b máme $M / R = 2,4 \cdot 10^{21} \text{ kg/m}$. Pro Slunce platí $M(\text{Sun}) / R(\text{Sun}) = 2,9 \cdot 10^{21} \text{ kg/m}$.	0,5
----	--	-----

4) Poměr hmotnost/poloměr hvězd

4a	Do výsledku úlohy 2b dosadíme dosadíme výsledek úlohy 3a, $\frac{M}{R} = \frac{q^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 G h^2}.$	0,5
----	--	-----

5) Hmotnost a poloměr nejmenší hvězdy

5a	$n_e = \frac{M}{4/3\pi R^3 m_p}$	0,5
----	----------------------------------	-----

5b	$d_e = n_e^{-1/3} = \left(\frac{M}{4/3\pi R^3 m_p} \right)^{-1/3}$	0,5
----	---	-----

5c	Dle zadání předpokládáme, že $d_e \geq \lambda_e 2^{-1/2}$. Pro elektron platí: $\lambda_e = \frac{h}{m_p v_{rms}(electron)}, \frac{3}{2} k T_c = \frac{1}{2} m_e v_{rms}^2(electron).$ Úpravou těchto rovnice společně s výsledky úloh 3a, 5a a 5b dostaneme odhad $R \geq \frac{\epsilon_0^{1/2} h^2}{4^{1/4} q m_e^{3/4} m_p^{5/4} G^{1/2}}.$	1,5
----	---	-----

5d	$R \geq 6,9 \cdot 10^7 \text{ m} = 0,10 R(\text{Sun}).$	0,5
----	---	-----

5e	Ze výsledku úlohy 4a a předchozích numerických výsledků dostaneme $M \geq 1,7 \cdot 10^{29} \text{ m} = 0,08 M(\text{Sun}).$	0,5
----	--	-----

6) Fúzující jádra helia ve starších hvězdách

6a	Pro helium píšeme $\frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 m_{He} v_{rms}^2(He)} = \frac{h}{2^{1/2} m_{He} v_{rms}(He)}.$ Odtud, $v_{rms}(He) = \frac{2^{1/2} q^2}{\pi\epsilon_0 h} = 2,0 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}.$ Dále, $T(He) = \frac{v_{rms}^2(He) m_{He}}{3k} = 6,5 \cdot 10^8 \text{ K}.$ Tento výsledek řádově odpovídá odhadům modelů hvězd.	0,5
----	---	-----