

Teoretická úloha č. 2

ŘEŠENÍ

DOPPLEROVSKÉ LASEROVÉ CHLAZENÍ A OPTICKÁ MELASA

Klíž k této úloze spočívá v Dopplerově jevu (přesněji v podélném Dopplerově jevu). Frekvence monochromatického světelného paprsku z pohledu pozorovatele závisí na jeho relativním pohybu ke zdroji světla. Pozorovatel zaznamená frekvenci

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 \pm v/c}{1 \mp v/c}} \approx \omega \left(1 \pm \frac{v}{c}\right),$$

kde v je velikost relativní rychlosti zdroje světla a pozorovatele a ω frekvence zdroje. Horní nebo dolní znaménko odpovídá případům, kdy se zdroj a pozorovatel pohybují směrem k sobě nebo od sebe. Druhá rovnost platí v limitě malých rychlostí (nerelativistická limita).

Frekvence laseru v laboratorní soustavě je ω_L ; ω_0 je přechodová frekvence atomu. Atom se pohybuje rychlostí o velikosti v směrem proti dopadajícímu laserovému paprsku.

Je důležité zdůraznit, že výsledek musí být uveden v prvním platném řádu v/c nebo $\hbar q/mv$.

ČÁST I: ZÁKLADY LASEROVÉHO CHLAZENÍ

1. Absorpce

1a	$\omega_0 \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right)$	0,2
----	---	-----

1b	$p_{at} = p - \hbar q \approx mv - \frac{\hbar \omega_L}{c}$	0,2
----	--	-----

1c	$\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} + \hbar \omega_0 \approx \frac{mv^2}{2} + \hbar \omega_L$	0,2
----	---	-----

2. Spontánní emise fotonu ve směru $-x$

Nejprve vypočítáme energii emitovaného fotonu v laboratorní soustavě. Je třeba dbát na to, abychom počítali ve správném řádu. Rychlost atomu se po absorpci změní, avšak tato změna je způsobí opravu druhého řádu ve frekvenci emitovaného fotonu.

$$\omega_{ph} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v'}{c}\right), \text{ kde } v' \approx v - \frac{\hbar q}{m}. \text{ Tedy, } \omega_{ph} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\hbar q}{mc}\right)$$

$$\approx \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c} + \frac{\hbar q}{mc}\right) \approx \omega_L \left(1 + \frac{\hbar q}{mc}\right) \approx \omega_L \left(1 + \frac{\hbar q}{mv} \frac{v}{c}\right) \approx \omega_L.$$

2a	$\varepsilon_{ph} \approx \hbar \omega_L$	0,2
----	---	-----

2b	$p_{ph} \approx -\frac{\hbar \omega_L}{c}$	0,2
----	--	-----

Ze zákona zachování hybnosti (viz 1b)

$$p_{at} + p_{ph} \approx p - \hbar q.$$

2c	$p_{at} \approx p = mv$	0,2
----	-------------------------	-----

2d	$\varepsilon_{at} \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}.$	0,2
----	---	-----

3. Spontánní emise fotonu ve směru $+x$

Analogicky předchozí části úlohy.

3a	$\varepsilon_{ph} \approx \hbar \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \hbar \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \hbar \omega_L \left(1 + 2\frac{v}{c}\right)$	0,2
----	--	-----

3b	$p_{ph} \approx \frac{\hbar \omega_L}{c} \left(1 + 2\frac{v}{c}\right)$	0,2
----	---	-----

3c	$p_{at} = p - \hbar q - p_{ph} \approx p - \hbar q - \frac{\hbar \omega_L}{c} \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) \approx mv - 2\frac{\hbar \omega_L}{c}$	0,2
----	---	-----

3d	$\varepsilon_{at} = \frac{p_{at}^2}{2m} \approx \frac{mv^2}{2} \left(1 - 2\frac{\hbar q}{mv}\right)$	0,2
----	--	-----

4. Průměrná emise po absorpci

Spontánní emise nastává oběma směry se stejnou pravděpodobností

4a	$\overline{\varepsilon_{ph}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ph}^+ + \frac{1}{2} \varepsilon_{ph}^- \approx \hbar \omega_L \left(1 + \frac{v}{c}\right)$	0,2
----	---	-----

4b	$\overline{p_{ph}} = \frac{1}{2}p_{ph}^+ + \frac{1}{2}p_{ph}^- \approx \frac{\hbar\omega_L}{c} \frac{v}{c} = mv \left(\frac{\hbar q}{mv} \frac{v}{c} \right) \approx 0$	0,2
----	--	-----

4c	$\overline{\varepsilon_{at}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{at}^+ + \frac{1}{2}\varepsilon_{at}^- \approx \frac{mv^2}{2} \left(1 - \frac{\hbar q}{mv} \right)$	0,2
----	--	-----

4d	$\overline{p_{at}} = \frac{1}{2}p_{at}^+ + \frac{1}{2}p_{at}^- \approx p - \frac{\hbar\omega_L}{c}$	0,2
----	---	-----

5. Přenos energie a hybnosti

Uvažujme celkový jednofotonový proces absorpce-emise. Podle výsledků výše dochází k přenosu hybnosti a energie mezi laserem a atomem.

5a	$\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{at}^{after} - \varepsilon_{at}^{before} \approx -\frac{1}{2}\hbar qv = -\frac{1}{2}\hbar\omega'_L \frac{v}{c}$	0,2
----	--	-----

5b	$\Delta p = \bar{p}_{at}^{after} - p_{at}^{before} \approx -\hbar q = -\frac{\hbar\omega'_L}{c}$	0,2
----	--	-----

6. Přenos energie a hybnosti laserovým paprskem ve směru $+x$

6a	$\Delta\varepsilon = \bar{\varepsilon}_{at}^{after} - \varepsilon_{at}^{before} \approx \frac{1}{2}\hbar qv = \frac{1}{2}\hbar\omega'_L \frac{v}{c}$	0,3
----	--	-----

6b	$\Delta p = \bar{p}_{at}^{after} - p_{at}^{before} \approx \hbar q = \frac{\hbar\omega'_L}{c}$	0,3
----	--	-----

ČÁST II: DISIPACE A PRINCIP OPTICKÉ MELASY

Dva vstříčné laserové paprsky se stejnou, avšak libovolnou, frekvencí ω_L dopadají na svazek N atomů pohybující se ve směru $+x$ s (průměrnou) rychlostí v .

7. Síla, kterou působí laser na paprsek atomů

Průměrný počet atomů nacházejících se v excitovaném stavu je dán

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2},$$

kde ω_0 je rezonanční frekvence atomového přechodu a Ω_R je tzv. Rabiho frekvence; Ω_R^2 je úměrná *intenzitě* laserového paprsku. Střední doba života atomu v excitovaném stavu je Γ^{-1} .

Síla je vypočtena jako počet cyklů absorpce-emise, vynásobená změnou hybnosti při každém jevu, dělená dobou každé události. Je třeba uvažovat Dopplerovský posun obou laserů.

7a	$F = N\Delta p^- P_{exc}^- \Gamma + N\Delta p^+ P_{exc}^+ \Gamma =$ $\left(\frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L + \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} - \frac{\Omega_R^2}{\left(\omega_0 - \omega_L - \omega_L \frac{v}{c}\right)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} \right) N\Gamma\hbar q$	1,5
----	---	-----

8. Limita malých rychlostí

Předpokládejme nyní, že je rychlost dostatečně malá, abychom mohli sílu odhadnout jen pomocí prvního řádu v.

8a	$F \approx - \frac{4N\hbar q^2 \Omega_R^2 \Gamma}{(\omega_0 - \omega_L)^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\Omega_R^2} (\omega_0 - \omega_L) v$	1,5
----	--	-----

8b	$\omega_0 < \omega_L$	0,25
----	-----------------------	------

8c	$\omega_0 = \omega_L$	0,25
----	-----------------------	------

8d	$\omega_0 > \omega_L$. Toto je slavné pravidlo: „ladit pod rezonanční frekvencí pro chlazení“.	0,25
----	---	------

8e	$\omega_0 > \omega_L$, tj. nezávisle na směru pohybu atomů	0,25
----	---	------

9. Optická melasa

9a	$F = -\beta v \Rightarrow m \frac{dv}{dt} \approx -\beta v \Rightarrow v = v_0 e^{-\frac{\beta t}{m}}$ β známe z řešení úlohy 8a.	1,5
----	--	-----

9b	Připomeňme, že pro jednorozměrný problém platí $\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} kT$. Považujeme-li rychlost v za průměrnou tepelnou rychlost v úloze 9a, můžeme psát $T = T_0 e^{-\frac{2\beta t}{m}}.$	0,5
----	---	-----