

TEORETICKÁ ÚLOHA č. 1

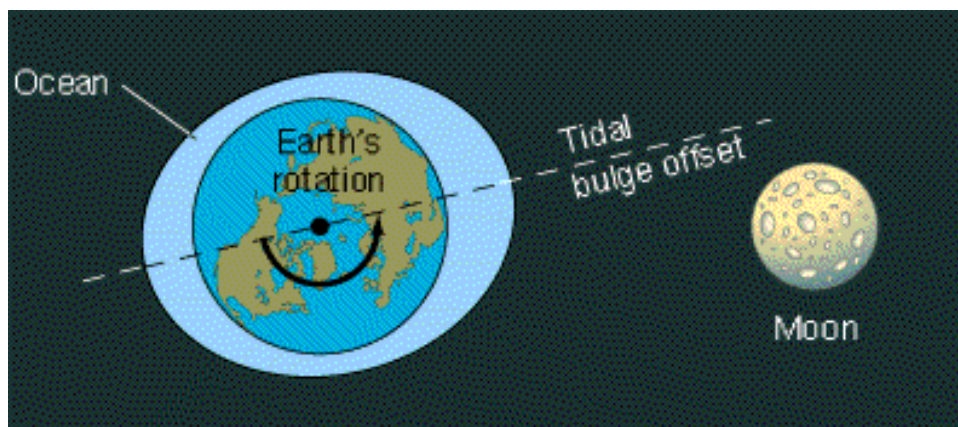
VÝVOJ SOUSTAVY ZEMĚ-MĚSÍC

Vědci jsou schopni určit vzdálenost Země – Měsíc s velkou přesností. Dosáhnou toho pomocí odrazu laserového paprsku na speciálních zrcadlech, které na Měsíc umístili astronauti v roce 1969. Měří se čas, za který dopadne odražené světlo zpět na Zemi (viz obr. 1).



Obr.1: Laserový paprsek vyslaný z observatoře se používá k přesnému měření vzdálenosti Měsíce od Země

Pomocí těchto pozorování bylo přímo změřeno, že se Měsíc pomalu od Země vzdaluje. Tedy vzdálenost Země – Měsíc roste s časem. Toto je způsobeno tím, že slapový moment síly přenáší moment hybnosti Měsíci, viz obr. 2. V této úloze odvodíte základní parametry tohoto jevu.



Obr. 2: Gravitace Měsíce způsobuje slapové deformace, jakési „vyboulení“ Země. Vzhledem k rotaci Země, přímka charakterizující směr vyboulení není totožná se spojnici Země a Měsíce. Odchýlení těchto přímek způsobuje moment síly, který přenáší moment hybnosti zemské rotace na translační pohyb Měsíce okolo Země. Obrázek není v měřítku

1. Zachování momentu hybnosti

Nechť L_1 značí současný celkový moment hybnosti soustavy Země – Měsíc, resp. jeho velikost. Předpokládejme, že: i) L_1 je součet pouze rotace Země okolo své osy a translačního pohybu Měsíce na jeho orbitě okolo Země. ii) Trajektorie Měsíce je kružnice a Měsíc považujeme za hmotný bod. iii) Osa zemské rotace a osa oběhu Měsíce jsou rovnoběžné. iv) Pro jednodušší výpočet uvažujete pohyb okolo středu Země a ne okolo hmotného středu soustavy. Během celé úlohy, všechny momenty setrvačnosti, momenty sil a momenty hybnosti jsou definovány vzhledem k zemské ose. v) Neuvažujte vliv Slunce.

1a	Napište rovnici pro současný celkový moment hybnosti soustavy Země – Měsíc. Vyjádřete tento moment hybnosti pomocí momentu setrvačnosti Země I_E , současné úhlové rychlosti zemské rotace ω_{E1} , současného momentu setrvačnosti Měsíce vzhledem k zemské ose I_{M1} a současné úhlové rychlosti oběhu Měsíce ω_{M1} .	0,2
----	---	-----

Zmíněný přenos momentu hybnosti skončí, až bude stejná doba rotace Země a oběžná doba Měsíce. V tomto okamžiku budou slapová vyboulení způsobená Měsícem na Zemi ve směru spojnice Země – Měsíc a výše zmíněný moment síly vymizí.

1b	Napište rovnici pro konečný celkový moment hybnosti soustavy Země – Měsíc L_2 za stejných předpokladů jako v otázce 1a. Vyjádřete tento moment hybnosti pomocí momentu setrvačnosti Země I_E , konečné úhlové rychlosti zemské rotace a oběhu Měsíce ω_2 a konečného momentu setrvačnosti Měsíce vzhledem k zemské ose I_{M2} .	0,2
----	--	-----

1c	Zanedbejte příspěvek rotace Země ke konečnému celkovému momentu hybnosti a napište rovnici vyjadřující zákon zachování momentu hybnosti pro tento problém.	0,3
----	--	-----

2. Konečná vzdálenost a konečná úhlová rychlost soustavy Země – Měsíc

Předpokládejte, že pro kruhovou trajektorii (Měsíce okolo Země) vždy platí gravitační zákon. Zanedbávejte příspěvek zemské rotace k celkovému momentu hybnosti.

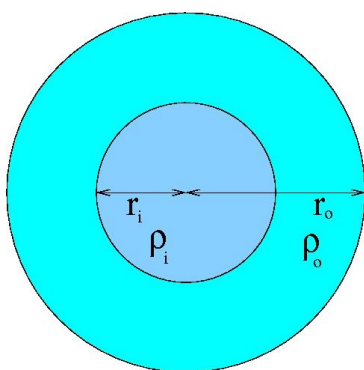
2a	Napište rovnici popisující kruhový pohyb Měsíce okolo Země, způsobený gravitační silou, v konečném stavu pomocí známých veličin M_E , ω_2 , G a konečné vzdálenosti D_2 středu Země a Měsíce. M_E je hmotnost Země a G je gravitační konstanta.	0,2
----	--	-----

2b	Napište rovnici pro konečnou vzdálenost D_2 mezi středem Země a Měsícem pomocí známých veličin – celkového momentu hybnosti soustavy L_1 , hmotnosti M_E Země a M_M Měsíce a G .	0,5
----	--	-----

2c	Napište rovnici pro konečnou úhlovou rychlost ω_2 soustavy Země – Měsíc pomocí známých veličin L_1 , M_E , M_M a G .	0,5
----	---	-----

Níže budete počítat číselné hodnoty D_2 a ω_2 . Potřebujete proto znát moment setrvačnosti Země.

2d	Napište rovnici pro moment setrvačnosti Země I_E za předpokladu, že je to koule s vnitřní hustotou ρ_i od středu do poloměru r_i a s vnější hustotou ρ_o od poloměru r_i až k povrchu o poloměru r_o (viz obr. 3).	0,5
----	--	-----



Obr. 3: Země jako koule se dvěma hustotami ρ_i a ρ_o

Číselné hodnoty požadované v této úloze uvádějte vždy na *dvě platné cifry*.

2e	Určete hodnotu momentu setrvačnosti Země I_E . Použijte hodnoty $\rho_i = 1,3 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-3}$, $r_i = 3,5 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\rho_o = 4,0 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ a $r_o = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$.	0,2
----	---	-----

Hmotnosti Země a Měsíce jsou $M_E = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg a $M_M = 7,3 \cdot 10^{22}$ kg. Současná vzdálenost Měsíce od středu Země je $D_1 = 3,8 \cdot 10^8$ m. Současná hodnota úhlové rychlosti rotace Země kolem své osy $\omega_{E1} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Současná úhlová rychlost oběhu Měsíce okolo Země je $\omega_{M1} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, a gravitační konstanta $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

2f	Číselně určete velikost celkového momentu hybnosti soustavy L_1 .	0,2
----	---	-----

2g	Vypočtete konečnou vzdálenost D_2 v metrech a v jednotkách současné vzdálenosti D_1 .	0,3
----	---	-----

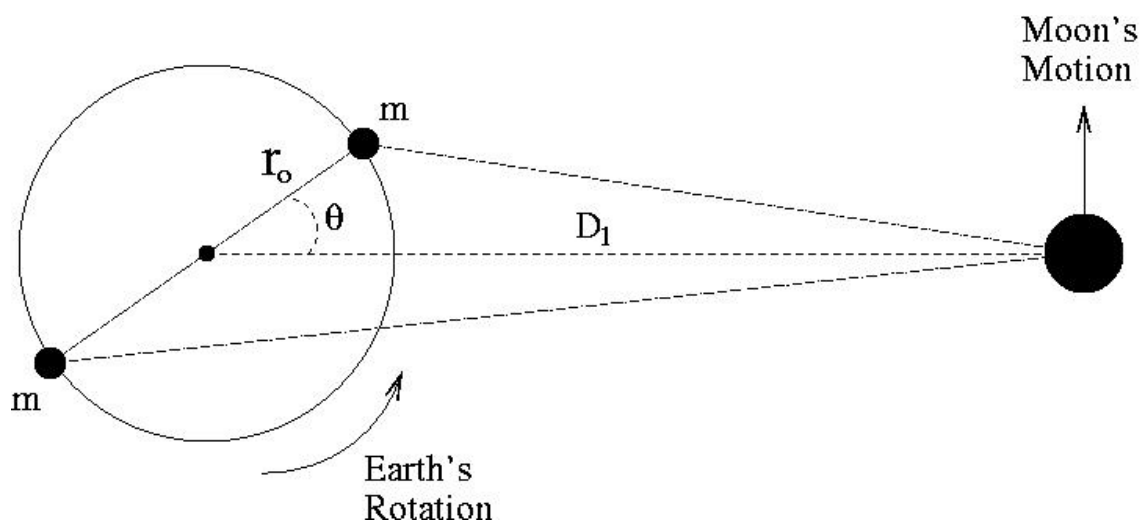
2h	Vypočtete konečnou úhlovou rychlost ω_2 v s^{-1} a konečnou dobu trvání dne v jednotkách současných dní.	0,3
----	--	-----

Ověřte, že zanedbání příspěvku zemské rotace ke konečnému celkovému momentu hybnosti bylo opodstatněné. Vypočtete poměr konečného momentu hybnosti Země a Měsíce. Tento poměr by měl mít malou hodnotu.

2i	Vypočtete poměr konečného momentu hybnosti Země a Měsíce.	0,2
----	---	-----

3. O kolik se každý rok Měsíc vzdaluje?

V této části úlohy zjistíte, o kolik se každý rok Měsíc vzdaluje od Země. Potřebujete k tomu znát rovnici pro moment síly působící v současnosti na Měsíc. Předpokládejte, že slapové vyboulení lze aproximovat dvěma hmotnými body, každý o hmotnosti m , umístěnými na povrchu Země, viz obr. 4. Označme θ úhel mezi přímkou spojující obě vyboulení a spojnicí středů Země a Měsíce.



Obr. 4: Schematický obrázek k určení momentu síly, kterým vyboulení Země působí na Měsíc. Náčrtek není v měřítku

3a	Vypočtete F_c , velikost síly, kterou působí na Měsíc bližší hmotný bod.	0,4
----	--	-----

3b	Vypočtete F_f , velikost síly, kterou působí na Měsíc vzdálenější hmotný bod.	0,4
----	---	-----

Nyní můžete vypočítat momenty sil způsobené hmotnostmi hmotných bodů.

3c	Vypočtete velikost τ_c , momentu síly způsobeného hmotností bližšího hmotného bodu.	0,4
----	--	-----

3d	Vypočtete velikost τ_f , momentu síly způsobeného hmotností vzdálenějšího hmotného bodu.	0,4
----	---	-----

3e	Vypočtete velikost celkového momentu síly τ způsobeného hmotnostmi obou hmotných bodů. Jelikož $r_o \ll D_1$, uveďte váš výsledek v prvním platném řádu r_o / D_1 . Použijte aproximaci $(1+x)^a \approx 1+ax$ pro $x \ll 1$.	1,0
----	--	-----

3f	Číselně vypočtete hodnotu celkového momentu síly τ . Uvažujte $\theta = 3^\circ$ a $m = 3,6 \cdot 10^{16}$ kg. (Všimněte si, že tato hmotnost je řádu 10^{-8} krát hmotnost Země.)	0.5
----	---	-----

Jelikož je moment síly roven rychlosti změny momentu hybnosti v čase, vypočtete současný nárůst vzdálenosti Země Měsíc za rok. Pro tento krok vyjádřete moment hybnosti Měsíce pouze pomocí M_E , M_M , D_1 a G .

3g	Vypočtete současný roční nárůst vzdálenosti Země – Měsíc.	1,0
----	---	-----

Na závěr odhadněte, o kolik za rok se v současnosti prodlužuje délka dne.

3h	Vypočtete úbytek ω_{E1} za rok a o kolik se v současnosti prodlužuje den za rok.	1,0
----	---	-----

4. Kam se ztrácí energie?

Na rozdíl od momentu hybnosti, který se zachovává, celková (rotační a gravitační) mechanická energie systému se nezachovává. Podíváme se na to v této poslední části úlohy.

4a	Napište rovnici pro celkovou (rotační a gravitační) mechanickou energii E soustavy Země – Měsíc v současnosti. Vyjádřete tuto energii pomocí pouze I_E , ω_{E1} , M_M , M_E , D_1 a G .	0,4
----	--	-----

4b	Napište rovnici pro změnu ΔE energie E jako funkci změny D_1 a změny ω_{E1} . Číselně vypočtete hodnotu ΔE za rok použitím hodnot změny D_1 a změny ω_{E1} vypočtených v otázkách 3g a 3h.	0,4
----	--	-----

Ověřte, že ztráta mechanické energie souhlasí s odhadem energie přeměněné v teplo při slapových jevech způsobených Měsícem na Zemi. Uvažujte následující velmi jednoduchý model. Předpokládejte, že při slapových jevech se celá vrstva vody hluboká $h = 0,5$ m, která pokrývá celý povrch Země, zvedne o 0,5 m. Toto se děje dvakrát denně. Dále předpokládejte, že 10% tíhové energie vrstvy vody se přemění v teplo v důsledku vnitřního tření při pohybu vody. Počítejte s hustotou vody $\rho_{\text{water}} = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$, a tíhovým zrychlením na povrchu Země $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

4c	Jaká je hmotnost zmíněné vrstvy vody na povrchu Země?	0,2
----	---	-----

4d	Kolik energie se přemění na teplo za rok? Porovnejte tuto energetickou ztrátu se současnou ztrátou mechanické energie za rok soustavy Země – Měsíc.	0,3
----	---	-----