

Theoretical Problem No. 1
VÝVOJ SOUSTAVY ZEMĚ-MĚSÍC
Řešení

1. Zachování momentu hybnosti

1a	$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1}$	0,2
----	--	-----

1b	$L_2 = I_E \omega_2 + I_{M2} \omega_2$	0,2
----	--	-----

1c	$I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = I_{M2} \omega_2 = L_1$	0,3
----	--	-----

2. Konečná vzdálenost a konečná úhlová rychlost soustavy Země – Měsíc

2a	$\omega_2^2 D_2^3 = G M_E$	0,2
----	----------------------------	-----

2b	$D_2 = \frac{L_1^2}{G M_E M_M^2}$	0,5
----	-----------------------------------	-----

2c	$\omega_2 = \frac{G^2 M_E^2 M_M^3}{L_1^3}$	0,5
----	--	-----

2d	Moment setrvačnosti Země bude součtem momentů setrvačnosti koule o poloměru r_o a hustotě ρ_o a koule o poloměru r_i a hustotě $\rho_i - \rho_o$, $I_E = \frac{2}{5} \frac{4\pi}{3} [r_o^5 \rho_o + r_i^5 (\rho_i - \rho_o)]$	0,5
----	--	-----

2e	$I_E = 8,0 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$	0,2
----	--	-----

2f	$L_1 = I_E \omega_{E1} + I_{M1} \omega_{M1} = 3,4 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$	0,2
----	--	-----

2g	$D_2 = 5,4 \cdot 10^8 \text{ m} = 1,4 D_1$	0,3
----	--	-----

2h	$\omega_2 = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, tedy perioda je 46 dní.	0,3
----	---	-----

2i	Jelikož $I_E \omega_2 = 1,3 \cdot 10^{32} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ a $I_{M2} \omega_2 = 3,4 \cdot 10^{34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, zanedbání bylo oprávněné, jelikož konečný moment hybnosti Země činí 1/260 konečného momentu hybnosti Měsíce.	0,2
----	---	-----

3. O kolik se každý rok Měsíc vzdaluje?

3a	Použitím kosinové věty, velikost gravitační síly, kterou působí Měsíc na bližší hmotný bod, bude, $F_c = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta}.$	0,4
----	---	-----

3b	Stejným způsobem jako v předešlé úloze, $F_f = \frac{GmM_M}{D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta}.$	0,4
----	---	-----

3c	Použitím sinové věty, pro moment síly platí $\tau_c = F_c \frac{\sin \theta r_o D_1}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta)^{1/2}} = \frac{GmM_M \sin \theta r_o D_1}{(D_1^2 + r_o^2 - 2D_1r_o \cos \theta)^{3/2}}$	0,4
----	---	-----

3d	Stejným způsobem jako v předešlé úloze, $\tau_f = F_f \frac{\sin \theta r_o D_1}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta)^{1/2}} = \frac{GmM_M \sin \theta r_o D_1}{(D_1^2 + r_o^2 + 2D_1r_o \cos \theta)^{3/2}}$	0,4
----	---	-----

3e	$\begin{aligned} \tau_c - \tau_f &= \\ &= GmM_M \sin \theta r_o D_1^{-2} \left(1 - \frac{3r_o^2}{2D_1^2} + \frac{3r_o \cos \theta}{D_1} - 1 + \frac{3r_o^2}{2D_1^2} + \frac{3r_o \cos \theta}{D_1} \right) = \\ &= \frac{6GmM_M r_o^2 \sin \theta \cos \theta}{D_1^3}. \end{aligned}$	1,0
----	--	-----

3f	$\tau = \tau_c - \tau_f = 4,1 \cdot 10^{16} \text{ N m}$	0,5
----	--	-----

3g	Jelikož $\omega_{M1}^2 D_1^3 = G M_E$, můžeme pro moment hybnosti Měsíce psát $I_{M1} \omega_{M1} = M_M D_1^2 \left[\frac{G M_E}{D_1^3} \right]^{1/2} = M_M [D_1 G M_E]^{1/2}.$ Moment síly je $\tau = \frac{M_M [G M_E]^{1/2} \Delta(D_1^{1/2})}{\Delta t} = \frac{M_M [G M_E]^{1/2} \Delta D_1}{2 D_1^{1/2} \Delta t}.$ Máme tedy $\Delta D_1 = \frac{2 \tau \Delta t}{M_M} \sqrt{\frac{D_1}{G M_E}}.$ Což pro $\Delta t = 3,1 \cdot 10^7 \text{ s} = 1 \text{ rok}$ dává $\Delta D_1 = 0,034 \text{ m}$.	1,0
----	---	-----

3h	Použijeme nyní druhou impulsovou větu $\tau = - \frac{I_E \Delta \omega_{E1}}{\Delta t},$ ze které dostaneme $\Delta \omega_{E1} = - \frac{\tau \Delta t}{I_E},$ což pro $\Delta t = 3,1 \cdot 10^7 \text{ s} = 1 \text{ rok}$ dává $\Delta \omega_{E1} = -1,6 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1}$. Označíme-li uvažovanou časovou periodu P_E, píšeme $\frac{\Delta P_E}{P_E} = - \frac{\Delta \omega_{E1}}{\omega_E}.$ Jelikož $P_E = 1 \text{ den} = 8,64 \cdot 10^4 \text{ s}$, dostáváme $\Delta P_E = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Toto je doba, o kterou se prodlužuje ročně den.	1,0
----	---	-----

4. Kam se ztrácí energie?

4a	Současná celková (rotační a gravitační) energie systému je $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 + \frac{1}{2} I_M \omega_{M1}^2 - \frac{G M_E M_M}{D_1}.$ Užitím rovnosti $\omega_{M1}^2 D_1^3 = G M_E$ dostáváme $E = \frac{1}{2} I_E \omega_{E1}^2 - \frac{1}{2} \frac{G M_E M_M}{D_1}.$	0,4
----	---	-----

4b	$\Delta E = I_E \omega_{E1} \Delta \omega_{E1} + \frac{1}{2} \frac{G M_E M_M}{D_1^2} \Delta D_1 = 9,0 \cdot 10^{19} \text{J}.$	0,4
----	--	-----

4c	$M_{water} = 4\pi r_o^2 h \rho_{water} = 2.6 \cdot 10^{17} \text{ kg}.$	0,2
----	---	-----

4d	$\Delta E_{water} = -g M_{water} \cdot 0,5 \text{ m} \cdot 2 \text{ den}^{-1} \cdot 365 \text{ dní} = -9,3 \cdot 10^{19} \text{ J}.$ Obě energie jsou tedy srovnatelné.	0,3
----	---	-----