

Řešení

1. Změnu atmosférického tlaku se změnou výšky dz udává rovnice

$$dp = -r g dz \quad (1)$$

kde g je tíhové zrychlení, které považujeme za konstantní, r je hustota vzduchu, který pokládáme za ideální plyn,

$$r = \frac{m}{V} = \frac{pm}{RT}.$$

Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{RT} dz.$$

1.1. Jestliže je teplota vzduchu konstantní a rovná T_0 , platí

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{RT_0} dz.$$

Integrací máme

$$p(z) = p(0) e^{-\frac{mg}{RT_0} z} \quad (2)$$

1.2. Platí-li

$$T(z) = T(0) - \Lambda z, \quad (3)$$

pak

$$\frac{dp}{p} = -\frac{mg}{R[T(0) - \Lambda z]} dz. \quad (4)$$

1.2.1. Jelikož víme, že

$$\int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda} \int \frac{d[T(0) - \Lambda z]}{T(0) - \Lambda z} = -\frac{1}{\Lambda} \ln(T(0) - \Lambda z),$$

integrací obou stran rovnice (4), dostaneme

$$\ln \frac{p(z)}{p(0)} = \frac{mg}{R\Lambda} \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} = \frac{mg}{R\Lambda} \ln \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right),$$

$$p(z) = p(0) \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right)^{\frac{mg}{R\Lambda}}. \quad (5)$$

1.2.2. Volná konvekce nastane, jestliže platí

$$\frac{r(z)}{r(0)} > 1.$$

Poměr hustot lze vyjádřit následujícím způsobem

$$\frac{r(z)}{r(0)} = \frac{p(z) T(0)}{p(0) T(z)} = \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right)^{\frac{mg}{R\Lambda} - 1}.$$

Poslední člen je větší než jedna, je-li exponent záporný,

$$\frac{mg}{R\Lambda} - 1 < 0.$$

Tedy,

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = \frac{0,029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{8,31 \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}} = 0,035 \frac{\text{K}}{\text{m}}.$$

2. Při svislém pohybu se tlak uvnitř balíku neustále vyrovnává s tlakem okolního vzduchu, který závisí na nadmořské výšce. Teplota balíku závisí na tlaku.

2.1. Můžeme psát

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = \frac{dT_{\text{parcel}}}{dp} \frac{dp}{dz},$$

kde p značí tlak okolního vzduchu i balíku.

Výraz pro $\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp}$

Použitím zákona pro adiabatický děj $pV^g = \text{const}$ a stavové rovnice odvodíme rovnici vyjadřující vztah mezi změnou tlaku a teploty při kvazi-rovnovážném adiabatickém ději ve vzduchovém balíku,

$$T_{\text{parcel}} p^{\frac{1-g}{g}} = \text{const}, \quad (6)$$

kde $g = \frac{c_p}{c_v}$ je poměr mezi tepelnými kapacitami vzduchu při konstantním tlaku a

konstantním objemu. Logaritmujeme a diferencujeme rovnost (6) a dostaneme

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} + \frac{1-g}{g} \frac{dp}{p} = 0.$$

Neboli

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dp} = \frac{T_{\text{parcel}}}{p} \frac{g-1}{g}. \quad (7)$$

Pozn.: Použitím prvního termodynamického zákona můžeme vypočítat teplo, které je dodáno vzduchovému balíku, $dQ = \frac{m}{m} c_V dT_{\text{parcel}} + p dV$. Toto teplo je ale nulové v adiabatickém ději. Použijeme-li dále stavovou rovnici $pV = \frac{m}{m} RT_{\text{parcel}}$, můžeme odvodit zákon (6).

Výraz pro $\frac{dp}{dz}$

Ze vztahu (1) máme

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p g m}{RT},$$

kde T je teplota okolního vzduchu.

Nyní snadno odvodíme výraz pro dT_{parcel}/dz ,

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{dz} = -\frac{g-1}{g} \frac{m g}{R} \frac{T_{\text{parcel}}}{T} = -G. \quad (8)$$

Obecně nemusí být G konstantní.

2.2.

2.2.1. Platí-li v libovolné nadmořské výšce, $T = T_{\text{parcel}}$, dostáváme pro G místo vztahu (8),

$$\Gamma = \frac{g-1}{g} \frac{m g}{R} = \text{const}, \quad (9)$$

neboli

$$\Gamma = \frac{g}{c_p}. \quad (9')$$

2.2.2. Číselně

$$\Gamma = \frac{1,4 - 1}{1,4} \cdot \frac{0,029 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{8,31 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}} = 0,00997 \frac{\text{K}}{\text{m}} \approx 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{m}}.$$

2.2.3. Tedy, závislost teploty na nadmořské výšce z v tzv. adiabatickém modelu atmosféry je,

$$T(z) = T(0) - \Gamma z. \quad (10)$$

2.3. Výraz pro $T_{\text{parcel}}(z)$

Dosadíme za T do vztahu (7) z výrazu (3) a dostaneme

$$\frac{dT_{\text{parcel}}}{T_{\text{parcel}}} = -\frac{g - 1}{g} \frac{mg}{R} \frac{dz}{T(0) - \Lambda z}.$$

Přímou integrací,

$$\ln \frac{T_{\text{parcel}}(z)}{T_{\text{parcel}}(0)} = -\frac{g - 1}{g} \frac{mg}{R} \left(-\frac{1}{\Lambda} \right) \ln \frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)}.$$

Dostali jsme tedy,

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0) \left(\frac{T(0) - \Lambda z}{T(0)} \right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}. \quad (11)$$

2.4.

Ze vztahu (11) dostaneme,

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

Je-li $\Lambda z \ll T(0)$, pak při označení $x = \frac{T(0)}{\Lambda z}$ máme

$$\begin{aligned} T_{\text{parcel}}(z) &= T_{\text{parcel}}(0) \left(\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right)^{\frac{\Gamma z}{T(0)}}, \\ &\approx T_{\text{parcel}}(0) e^{-\frac{\Gamma z}{T(0)}} \approx T_{\text{parcel}}(0) \left(1 - \frac{\Gamma z}{T(0)} \right) \approx T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z \end{aligned}$$

tedy

$$T_{\text{parcel}}(z) \approx T_{\text{parcel}}(0) - \Gamma z. \quad (12)$$

3. Stabilita atmosféry

Abychom vyšetřili stabilitu atmosféry, budeme studovat stabilitu rovnováhy vzduchového balíku v atmosféře.

V nadmořské výšce z_0 , ve které platí $T_{\text{parcel}}(z_0) = T(z_0)$, je vzduchový balík v rovnováze. Skutečně se zde rovná i hustota ρ vzduchu v balíku hustotě ρ' okolního vzduchu. Proto vztlková síla působící na balík je rovná síle tíhové a výsledná síla působící na balík je tedy nulová.

Teplota vzduchu v balíku $T_{\text{parcel}}(z)$ je dána vztahem (7), ve kterém můžeme přibližně uvažovat, že $G = \Gamma$ v nadmořských výškách z blízkých $z = z_0$.

Zkoumejme nyní stabilitu rovnováhy vzduchového balíku.

Uvažujme, že byl vzduchový balík posunut výše do nadmořské výšky $z_0 + d$ (kde $d > 0$), $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) = T_{\text{parcel}}(z_0) - \Gamma d$ a $T(z_0 + d) = T(z_0) - \Lambda d$.

- V případě, že má míra poklesu teploty atmosféry $\Lambda > \Gamma$, máme $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) > T(z_0 + d)$, tedy $\rho < \rho'$. Vztlková síla je tedy větší než je tíha balíku, výslednice je orientovaná nahoru a tlačí vzduchový balík dál od rovnovážné polohy.

Naopak, posuneme-li vzduchový balík níže do nadmořské výšky $z_0 - d$ ($d > 0$), $T_{\text{parcel}}(z_0 - d) < T(z_0 - d)$ a tedy $\rho > \rho'$.

Vztlková síla je tedy menší než tíha vzduchového balíku, výslednice míří dolů a tlačí balík dále od rovnovážné polohy, viz obr. 1.

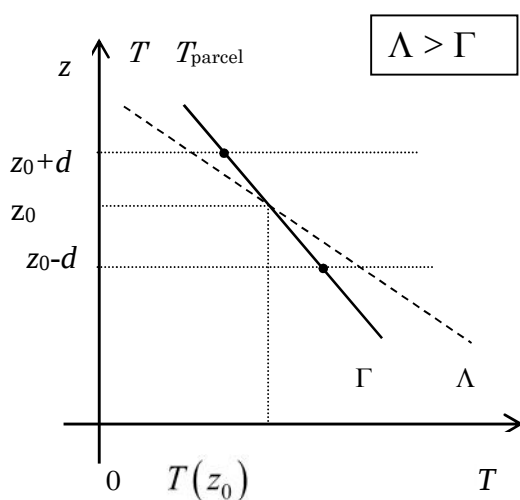
Tedy, rovnováha balíku je labilní a uděláme závěr: *atmosféra s mírou poklesu teploty $\Lambda > \Gamma$ je labilní.*

- Studujme nyní atmosféru s mírou poklesu teploty $\Lambda < \Gamma$. Je-li vzduchový balík posunut do vyšší polohy s nadmořskou výškou $z_0 + d$ (s $d > 0$), $T_{\text{parcel}}(z_0 + d) < T(z_0 + d)$, tedy $\rho > \rho'$. Vztlková síla je tedy menší než tíha vzduchového balíku, jejich výslednice míří dolů a navrací vzduchový balík do rovnovážné polohy.

Naopak, je-li vzduchový balík posunut dolů do nadmořské výšky $z_0 - d$ ($d > 0$),

$T_{\text{parcel}}(z_0 - d) > T(z_0 - d)$ a tedy $r < r'$. Vztlková síla je pak větší než tíha balíku, výslednice mří nahoru a tedy opět vrací vzduchový balík do rovnovážné polohy, viz obr. 2.

Tedy rovnováha vzduchového balíku je stabilní a řekneme, že: *Atmosféra s mírou poklesu teploty $\Lambda < \Gamma$ je stabilní.*

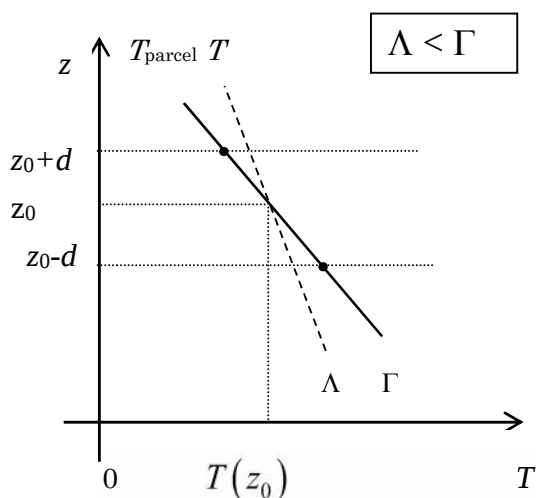


Obr. 1

$$T_{\text{parcel}} > T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho \quad \text{nahoru} \uparrow$$

$$T_{\text{parcel}} < T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} > \rho \quad \text{dolů} \downarrow$$

Labilní



Obr. 2

$$T_{\text{parcel}} < T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} > \rho \quad \text{dolů} \downarrow$$

$$T_{\text{parcel}} > T \Rightarrow \rho_{\text{parcel}} < \rho \quad \text{nahoru} \uparrow$$

Stabilní

• Zůstává případ atmosféry s mírou poklesu teploty $\Lambda = \Gamma$. Posuneme-li vzduchový balík z rovnovážné polohy do libovolné polohy, balík zůstane v nové poloze, jedná se o volnou rovnováhu. *Atmosféra s mírou poklesu teploty $\Lambda = \Gamma$ je neutrální.*

3.2. Ve stabilní atmosféře s $\Lambda < \Gamma$, může vzduchový balík mající teplotu při zemi $T_{\text{parcel}}(0) > T(0)$ a tlak $p(0)$ rovný tlaku okolní atmosféry vystoupat do maximální výšky h , kde $T_{\text{parcel}}(h) = T(h)$.

Při svislém pohybu od země do výšky h , probíhá ve vzduchovém balíku adiabatický kvazi-rovnovážný děj, při kterém se mění teplota od $T_{\text{parcel}}(0)$ až po $T_{\text{parcel}}(h) = T(h)$.

Použitím rovnosti (11) můžeme psát,

$$\left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{-\frac{\Gamma}{\Lambda}} = \frac{T_{\text{parcel}}(0)}{T(h)} = \frac{T_{\text{parcel}}(0)}{T(0) \left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)}$$

$$\left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)}\right)^{1 - \frac{\Gamma}{\Lambda}} = T_{\text{parcel}}(0) \times T^{-1}(0)$$

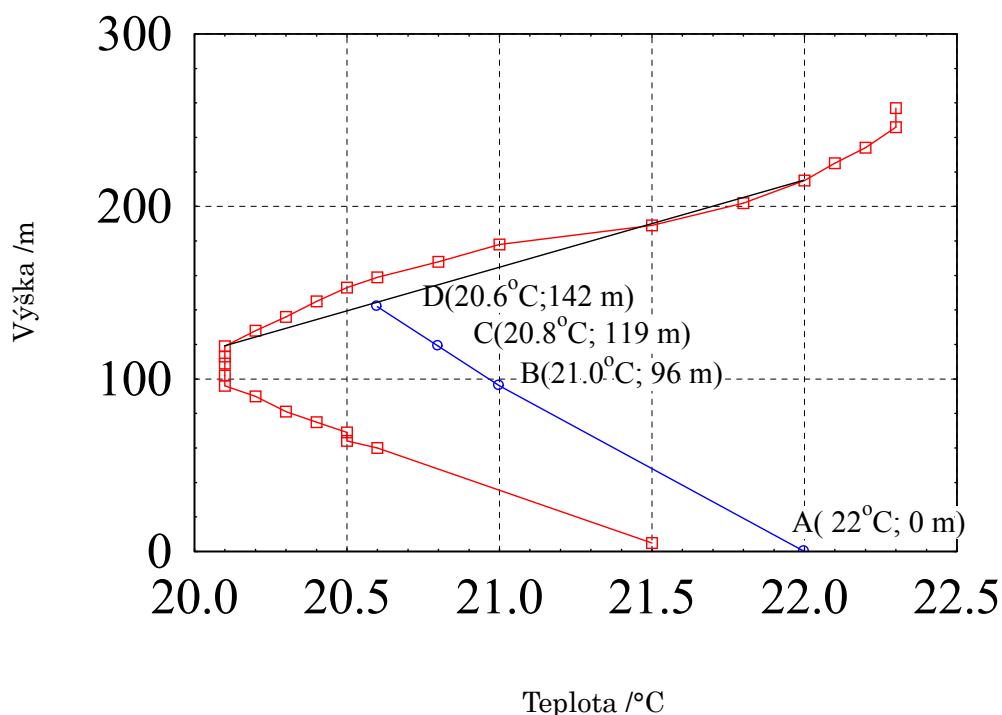
$$1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} = T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}}(0) \times T^{-\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}}(0)$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{\Lambda} T(0) \left[1 - T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}}(0) \times T^{-\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}}(0) \right] \\ &= \frac{1}{\Lambda} \left[T(0) - T_{\text{parcel}}^{\frac{\Lambda}{\Lambda - \Gamma}}(0) T^{\frac{\Gamma}{\Gamma - \Lambda}}(0) \right] \end{aligned}$$

Tedy, maximální pro maximální výšku h máme,

$$h = \frac{1}{\Lambda} \left[T(0) - \left(\frac{(T(0))^{\Gamma}}{(T_{\text{parcel}}(0))^{\Lambda}} \right)^{\frac{1}{\Gamma - \Lambda}} \right]. \quad (13)$$

4. Vyneseme data z tabulky do grafu závislosti výšky z na teplotě T , viz obr. 3.



Obr. 3

4.1. Rozdělíme atmosféru do výšky 200m do tří vrstev podle následujících výšek:

- (1) $0 < z < 96 \text{ m}$, $\Lambda = \frac{21,5-20,1}{91} \frac{\text{K}}{\text{m}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$.
- (2) $96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$, $\Lambda = 0$, izotermická vrstva.
- (3) $119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$, $\Lambda = \frac{22-20,1}{215-119} \frac{\text{K}}{\text{m}} = -0,02 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$.

Ve vrstvě (1) můžeme vypočítat teplotu balíku ze vzstahu (11)

$$T_{\text{parcel}}(96 \text{ m}) = 294.04 \text{ K} \approx 294.0 \text{ K} \text{ tedy } 21,0^\circ\text{C}.$$

Ve vrstvě (2) vypočteme teplotu balíku z výrazu pro teplotu izotermické atmosféry

$$T_{\text{parcel}}(z) = T_{\text{parcel}}(0) \exp \left[-\frac{\Gamma z}{T(0)} \right].$$

Výšku 96 m použijeme jako počátek, tedy jako nadmořskou výšku 0 m. výška 119m tak odpovídá to 23m. Pro teplotu balíku dostaneme následující hodnotu,

$$T_{\text{parcel}}(119 \text{ m}) = 293.81 \text{ K} \quad \text{that is } 20.8^\circ\text{C}$$

4.2. Ve vrstvě (3), začínající od 119 m, použitím (13) najdeme maximální výšku $h = 23 \text{ m}$, a odpovídající teplotu 293.6 K (or 20.6°C).

Tedy, směšovací výška je

$$H = 119 \text{ m} + 23 \text{ m} = 142 \text{ m}.$$

A

$$T_{\text{parcel}}(142 \text{ m}) = 293.6 \text{ K} \quad \text{tj. } 20.6^\circ\text{C}$$

Odtud nalezneme $T_{\text{parcel}}(119 \text{ m}) \approx 293.82 \text{ K}$ a $h = 23 \text{ m}$.

Pozn.: Použitím přibližného vztahu (12) snadno nalezneme $T_{\text{parcel}}(z) = 294 \text{ K}$, resp. 293.8 K ve výškách 96 m, resp. 119 m. Ve výšce 119 m je rozdíl mezi teplotou balíku a okolního vzduchu 0.7 K , tedy maximální svislá vzdálenost, kterou projde vzduchový balík ve vrstvě (3) je $0.7 \text{ K} / (\Gamma - \Lambda_3) = 23 \text{ m}$.

5. Předpokládejme, že objem atmosféry týkající se Hanojské centrální oblasti je rovnoběžnostěn o výšce H , jehož základnou je obdélník o stranách L a W . Rychlost vzniku emisí CO motorkami od 7:00 do 8:00 je $M = 800\,000 \cdot 5 \text{ km} \cdot 12 \text{ g/km} / 3600 \text{ s} = 13\,300 \text{ g/s}$.

Koncentrace CO ve vzduchu je konstantní ve všech bodech rovnoběžnostěnu a označme ji $C(t)$.

5.1. Za infinitezimální časový interval dt naroste díky emisím motorek hmotnost plynného CO v uvažovaném objemu o Mdt . Vítr fouká rovnoběžně s kratší stranou W , a odnáší tak CO o hmotnosti $LHC(t)u dt$. V celém sledovaném objemu tak dojde k nárůstu koncentrace CO o dC . Proto,

$$Mdt - LHC(t)u dt = LWHdC,$$

odkud plyne

$$\frac{dC}{dt} + \frac{u}{W}C(t) = \frac{M}{LWH}. \quad (14)$$

5.2. Obecné řešení rovnice (14) je

$$C(t) = K \exp\left(-\frac{ut}{W}\right) + \frac{M}{LHu}. \quad (15)$$

Z počáteční podmínky $C(0) = 0$ dostaneme

$$C(t) = \frac{M}{LHu} \left[1 - \exp\left(-\frac{ut}{W}\right) \right]. \quad (16)$$

5.3. Vezmeme-li za počáteční čas 7:00, pak 8:00 odpovídá $t = 3600$ s. Dosadíme do (15) a máme $C(3600\text{s}) = 6,35 \cdot (1 - 0,64) \text{ mg/m}^3 = 2,3 \text{ mg/m}^3$.