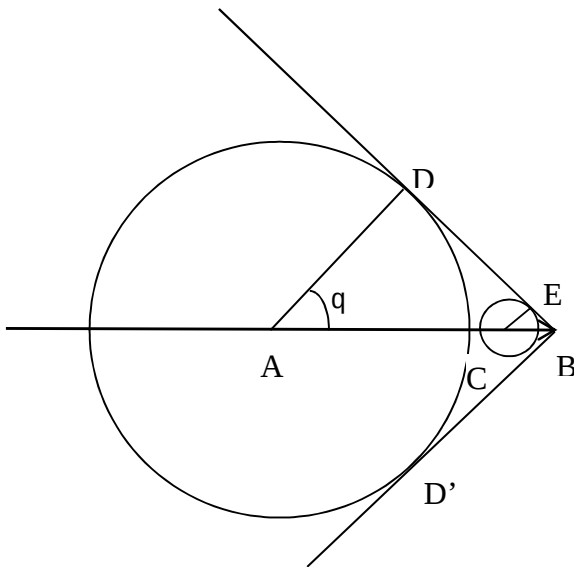


Řešení

1.



Obr. 1

Uvažujme rovinu obsahující trajektorii částice. V čase $t=0$ se částice nachází v bodě A, do bodu B částice doletí v čase $t=t_1$. Podle Huygensova principu, v čase $0 < t < t_1$ záření emitované v bodě A dosáhne sféry o poloměru AD a záření emitované v bodě C dosáhne sféry o poloměru CE. Poloměry obou sfér jsou přímo úměrné vzdálenostem středů sfér od bodu B.

$$\frac{\text{CE}}{\text{CB}} = \frac{c(t_1 - t)/n}{v(t_1 - t)} = \frac{1}{bn} = \text{const}$$

féry jsou tedy stejnohlé se středem B a jejich obálka tvoří kužel s vrcholem B, stěna kužele svírá s jeho osou úhel $j = \text{Arcsin} \frac{1}{b_n} = \frac{p}{2} - q$, kde q je úhel, který svírá světelný paprsek s trajektorií částice CE.

1.1. Průsečík čela vlny s rovinou obsahující trajektorii částice tvoří dvě úsečky, BD a BD'.

1.2. Úsečky svírají s trajektorií částice úhel $\varphi = \arcsin \frac{1}{n}$.

2. Konstrukci provedeme v rovině obsahující trajektorii částice a optickou osu zrcadla.

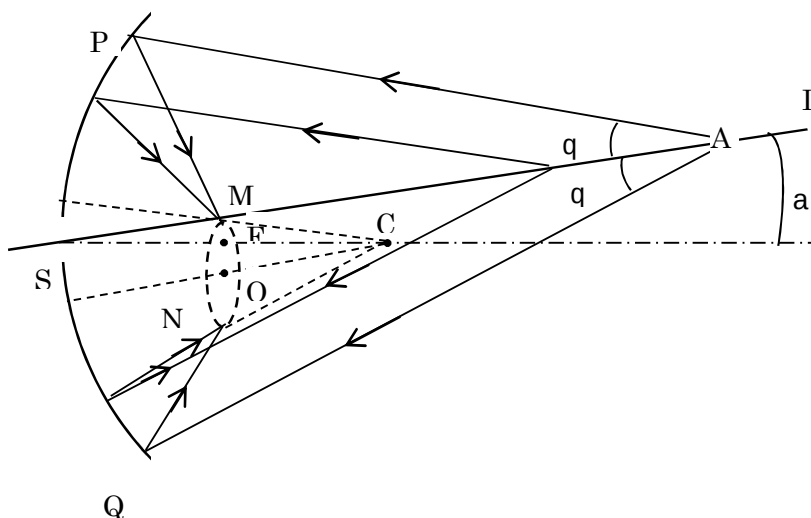
Označme:

S – bod, kde paprsek prochází sférickým zrcadlem

F – ohnisko sférického zrcadla

C – střed sférického zrcadla

IS – přímá trajektorie nabité částice svírající malý úhel a s optickou osou zrcadla.



Obr. 2

$$\text{CF} = \text{FS} = f$$

CO//IS

CM//AP

CN//AQ

$$\widehat{FCO} = \alpha \Rightarrow FO = f \cdot \alpha$$

$$\overline{MCO} = \overline{OCN} = \theta \Rightarrow MO = f \cdot \theta$$

Vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou IS procházející středem C. Tato přímka protíná ohniskovou rovinu v bodě O. Máme tedy $FO \approx f$ a .

Narýsujeme obě přímky procházející bodem C a svírající s přímkou CO úhel α . Tyto přímky protínají ohniskovou rovinu v bodech M a N. Všechny paprsky Čerenkovova záření v rovině nákresu odražené od zrcadla se protínají v bodech M nebo N, jelikož rovnoběžné paprsky se protínají v ohniskové rovině.

V třírozměrném případě je obrazem Čerenkovova záření kružnice v ohniskové rovině se středem O a s poloměrem $MO \approx f \cdot q$. Všechny paprsky na obr. 2 leží v rovině nákresu. Pouze kružnice je naznačena prostorově čárkovanou čarou.

3.

3.1. Aby nastal Čerenkovův jev, je nutné, aby platilo $n > \frac{c}{v}$, tedy $n_{\min} = \frac{c}{v}$.

Položme $\zeta = n - 1 = 2,7 \cdot 10^{-4} P$ a dostaneme

$$\zeta_{\min} = 2,7 \cdot 10^{-4} P_{\min} = \frac{c}{v} - 1 = \frac{1}{\beta} - 1. \quad (1)$$

Jelikož platí

$$\frac{Mc^2}{pc} = \frac{Mc}{p} = \frac{Mc}{\frac{Mv}{\sqrt{1-b^2}}} = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} = K, \quad (2)$$

máme $K = 0,094; 0,05; 0,014$ pro proton, kaon a pion.

Z rovnice (2) vyjádříme b pomocí K jako

$$b = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}}. \quad (3)$$

Vidíme, že $K^2 \ll 1$ pro všechny tři typy částice a můžeme zanedbat členy druhého řádu a vyššího v K . Dostáváme,

$$1-b = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \approx \frac{1}{2} K^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Mc}{p} \right)^2 \quad (3a)$$

$$\frac{1}{b} - 1 = \sqrt{1+K^2} - 1 \approx \frac{1}{2} K^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{Mc}{p} \right)^2. \quad (3b)$$

Dosazením (3b) do (1), dostaneme

$$P_{\min} = \frac{1}{2,7 \cdot 10^{-4}} \cdot \frac{1}{2} K^2. \quad (4)$$

Máme tedy tyto číselné hodnoty minimálního tlaku: $P_{\min} = 16 \text{ atm}$ pro protony, $P_{\min} = 4,6 \text{ atm}$ pro kaony, $P_{\min} = 0,36 \text{ atm}$ pro piony.

3.2. Pro $q_p = 2q_k$ pišme

$$\cos q_p = \cos 2q_k = 2 \cos^2 q_k - 1. \quad (5)$$

Označíme

$$e = 1 - b = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + K^2}} \approx \frac{1}{2} K^2. \quad (6)$$

Z rovnice (5) dostaneme

$$\frac{1}{b_p n} = \frac{2}{b_k^2 n^2} - 1. \quad (7)$$

Dosazením $\beta = 1 - \varepsilon$ a $n = 1 + \zeta$ do (7) dostaneme přibližně

$$\zeta_{\frac{1}{2}} = \frac{4\varepsilon_k - \varepsilon_\pi}{3} = \frac{1}{6}(4K_k^2 - K_\pi^2) = \frac{1}{6[4 \cdot 0,05^2 - 0,014^2]},$$

$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2,7 \cdot 10^{-4}} \cdot \zeta_{\frac{1}{2}} = 6 \text{ atm}.$$

Odpovídající hodnota indexu lomu je $n = 1,00162$. Máme tedy $q_k = 1,6^\circ$, $\theta_\pi = 2 \theta_k = 3,2^\circ$.

Nepozorujeme kroužkový obraz protonů, jelikož

$$P_{\frac{1}{2}} = 6 \text{ atm} < 16 \text{ atm} = P_{\min} \text{ pro protony.}$$

4.

4.1. Vypočtěme diferenciál logaritmů obou stran rovnice $\cos q = \frac{1}{b n}$,

$$\frac{\sin \theta \cdot \Delta \theta}{\cos \theta} = \frac{\Delta \beta}{\beta}. \quad (8)$$

Obdobně, vypočítáme diferenciály logaritmů obou stran rovnice (3a),

$$\frac{\Delta b}{1 - b} = 2 \frac{\Delta p}{p}. \quad (9)$$

Z rovností (8) a (9) a přihlédnutím k (3b) a aproximaci $\tan q = q$, odvodíme

$$\frac{\Delta q}{\Delta p} = \frac{2}{q} \frac{1-b}{pb} = \frac{K^2}{q p} \quad (10)$$

Číselně tedy máme

-pro kaony $K_K = 0,05$, $\theta_K = 1,6^\circ = 1,6\pi/180\text{rad}$ a tedy $\frac{\Delta\theta_K}{\Delta p} = 0,51 \frac{1^\circ}{\text{GeV}/c}$,

-pro piony $K_\pi = 0,014$, $\theta_\pi = 3,2^\circ$ a $\frac{\Delta\theta_\pi}{\Delta p} = 0,02 \frac{1^\circ}{\text{GeV}/c}$.

Sečteme-li obě hodnoty, máme

$$\frac{\Delta\theta_K + \Delta\theta_\pi}{\Delta p} = \frac{\Delta\theta}{\Delta p} = (0,51 + 0,02) \frac{1^\circ}{\text{GeV}/c} = 0,53 \frac{1^\circ}{\text{GeV}/c}.$$

4.2. Dle zadání je podmínka pro rozlišení dvou prstenců $\Delta\theta < 0,1$ ($\theta_\pi - \theta_K$) = 0.16° ..

Dosažením dostaneme $\Delta p < \frac{1}{10} \cdot \frac{1,6}{0,53} = 0,3 \text{ GeV}/c$.

5. Minimální hodnota parametru b postačující ke vzniku Čerenkovova jevu je

$$b = \frac{1}{n} = \frac{3}{4}. \quad (11)$$

Kinetická energie částice s klidovou hmotností M a energií E je dána výrazem

$$T = E - Mc^2 = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - Mc^2 = Mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right]. \quad (12)$$

Dosaďme minimální hodnotu (11) parametru b do rovnosti (12) a dostaneme minimální kinetickou energii částice nutnou k tomu, aby nastal Čerenkovův jev

$$T - Mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{16}}} - 1 \right] = 0,51 Mc^2. \quad (13)$$

Pro α částice $T = 0,51 \cdot 3,8 \text{ GeV} = 1,94 \text{ GeV}$, pro elektrony $T = 0,51 \cdot 0,51 \text{ MeV} = 0,26 \text{ MeV}$.

Jelikož kinetická energie částic vyzářených radioaktivním zdrojem nepřevyšuje několik MeV, byly to elektrony, které způsobily Čerenkovovo záření v uvažovaném experimentu.

6. Má-li svazek částic danou hybnost, je závislost úhlu q na indexu lomu n prostředí

dána výrazem

$$\cos q = \frac{1}{nb} . \quad (14)$$

6.1. Necht' dq je rozdíl úhlů θ mezi dvěma prstenci odpovídajícími dvěma vlnovým délkám vymezujícíím viditelnou oblast, tj. vlnovým délkám $0,4\mu\text{m}$ a $0,8\mu\text{m}$. Rozdíl indexů lomu pro tyto vlnové délky je $n_v - n_r = \delta n = 0,02 (n - 1)$.

Logaritmujme a diferencujme obě strany rovnice (14),

$$\frac{\sin \theta \cdot \delta \theta}{\cos \theta} = \frac{\delta n}{n} . \quad (15)$$

Tlaku zářiče $P = 6 \text{ atm}$ odpovídají, dle výsledku úlohy 4 b), hodnoty $q_\pi = 3,2^\circ$,

$$n = 1,00162.$$

Použijme aproximaci $\tan q = q$ a $n = 1$ a dostaneme $dq = \frac{dn}{q} = 0.033^\circ$.

6.2.

6.2.1. Rozšíření díky disperzi v závislosti na pološířce v polovině výšky je

$$\frac{1}{2} \delta \theta = 0,017^\circ.$$

6.2.2. Barva prstence se mění z červené k modré od vnitřního k vnějšímu okraji.