

Řešení

1.1 Výpočet vzdálenosti TG

Objem vody v prohlubni $V = 1000 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$. Délka dna prohlubně je

$$d = L - a \tan 60^\circ = (0,74 - 0,12 \tan 60^\circ) \text{ m} = 0,5322 \text{ m}.$$

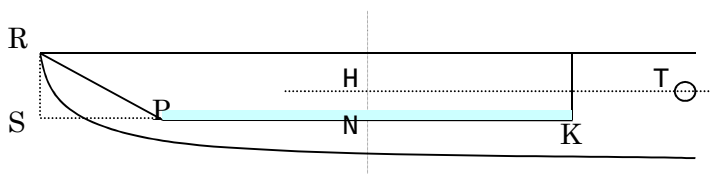
(jelikož zadané číselné hodnoty jsou na dvě platné číslice, budeme všude v konečných odpovědích používat také dvě platné číslice, ale v mezivýpočtech budeme psát cifry více.)

Výška c vrstvy vody v prohlubni se vypočte ze vztahu

$$V = bcd + b \frac{c}{2} c \tan 60^\circ \Rightarrow c = \frac{(d^2 + 2\sqrt{3}V/b)^{1/2} - d}{\sqrt{3}}$$

Číselně dostaneme $c = 0,01228 \text{ m}$.

Pokud je páka ve vodorovné poloze, vzdálenost (ve vodorovném směru) mezi osou rotace a těžištěm vody N je $TH = a + d/2 + c/4 \tan 60^\circ = 0,4714 \text{ m}$ a $TG = (m/M) TN = 0,01571 \text{ m}$ (viz obr. níže).



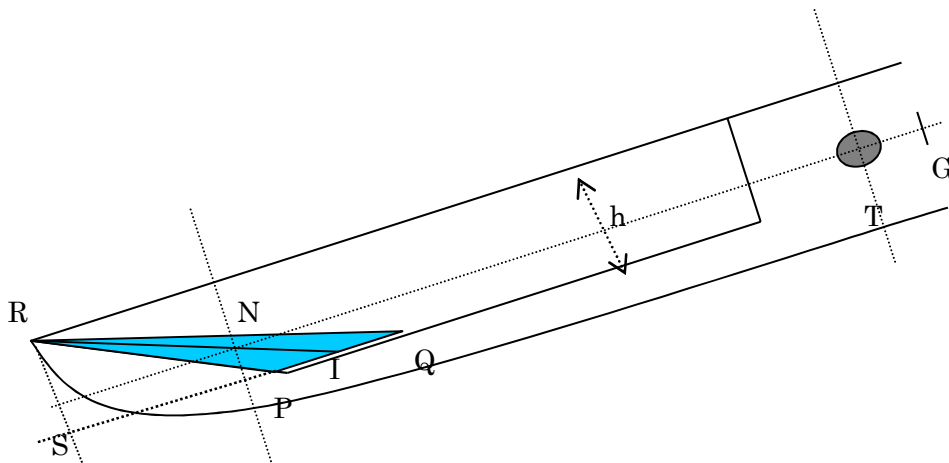
Odpověď: $TG = 0,016 \text{ m}$.

1.2. Výpočet hodnot α_1 a α_2 .

Když se páka nakloní o úhel α_1 , vodní hladina dosáhne okraje prohlubně. V tuto chvíli je objem vody 10^{-3} m^3 . Předpokládejme $PQ < d$. Z geometrie $V = hb \cdot PQ/2$, odkud $PQ = 0,1111 \text{ m}$. Předpoklad $PQ < d$ je očividně splněn ($d = 0,5322 \text{ m}$).

Vypočteme úhel α_1 , $\tan \alpha_1 = h/QS = h/(PQ + \sqrt{3}h)$. Odtud $\alpha_1 = 20,6^\circ$.

Je-li náklon 30° , prohlubeň je prázdná: $\alpha_2 = 30^\circ$.



1.3. Určení úhlu náklonu β páky a hmotnosti vody m v prohlubni, když je celkový moment M působící na páku nulový

Označme $PQ = x$ (m). Hmotnost vody v prohlubni je $m = \rho_{\text{water}} \frac{xhb}{2} = 9x$ (kg).

Točivý moment $M = 0$, pokud moment způsobený tíhou vody v prohlubni vyrovná moment způsobený závažím páky. Průřez vodou v prohlubni je trojúhelník PQR na obrázku. Těžiště N vody leží ve $2/3$ těžnici RI, proto body NTG leží na jedné přímce. Pak $mg \cdot TN = Mg \cdot TG$, tedy

$$m \cdot TN = M \cdot TG = 30 \cdot 0,01571 \text{ kg} \cdot \text{m} = 0,4714 \text{ kg} \cdot \text{m} \quad (1)$$

Vypočteme TN z x a dosadíme do (1)

$$TN = L + a - \frac{2}{3} \left(h\sqrt{3} + \frac{x}{2} \right) = (0,94 - 0,08\sqrt{3})m - \frac{x}{3} = 0,8014m - \frac{x}{3},$$

Z čehož plyne

$$m \cdot TN = 9 \text{ kg/m} \cdot x (0,8014m - x/3) = -3 \text{ kg/m} \cdot x^2 + 7,213 \text{ kg/m} \cdot x. \quad (2)$$

Našli jsme tedy rovnici pro x ,

$$-3 \text{ kg/m} \cdot x^2 + 7,213 \text{ kg} \cdot x = 0,4714 \text{ kg} \cdot \text{m}. \quad (3)$$

Řešení rovnice (3) jsou $x = 2,337\text{m}$ a $x = 0,06723\text{m}$. Protože x musí být menší než $0,5322\text{m}$, musíme vzít druhý kořen $x = x_0 = 0,06723\text{m}$ a tedy $m = 9\text{kg/m} \cdot x_0 = 0,6051\text{kg}$.

$$\tan \beta = \frac{h}{x+h\sqrt{3}} = 0,4362, \text{ tedy } \beta = 23,57^\circ.$$

Odpověď: $m = 0,61\text{kg}$ a $\beta = 23,6^\circ$.

Úkol 2

2.1. Grafy $m(a)$, $a(t)$, $a m(t)$ během pracovního cyklu.

Na začátku v prohlubni není žádná voda, $a = 0$, m má největší velikost rovnou $Mg \cdot TG = 30 \cdot 9,81 \cdot 0,01571 \text{ N}\cdot\text{m} = 0,4624 \text{ N}\cdot\text{m}$. Naše konvence bude taková, že znaménko tohoto momentu bude záporné, protože zmenšuje hodnotu a .

Jak voda natéká do prohlubně, moment způsobený tíhou vody (mající kladné znaménko) zvětšuje m dokud není m malé kladné. Tehdy se začne páka zvedat. Od tohoto okamžiku, dle předpokladu, je konstantní množství vody v prohlubni.

Páka se naklání, takže těžiště se dostane mimo osu rotace, což vede k růstu m , které dosáhne maxima, když voda začne přetékat přes okraj prohlubně. V tuto chvíli je $\alpha = \alpha_0 = 20,6^\circ$.

Jednoduchý výpočet dává

$$SI = SP + PQ/2 = 0,12\text{m} \cdot 1,732 + 0,1111\text{m}/2 = 0,2634\text{m},$$

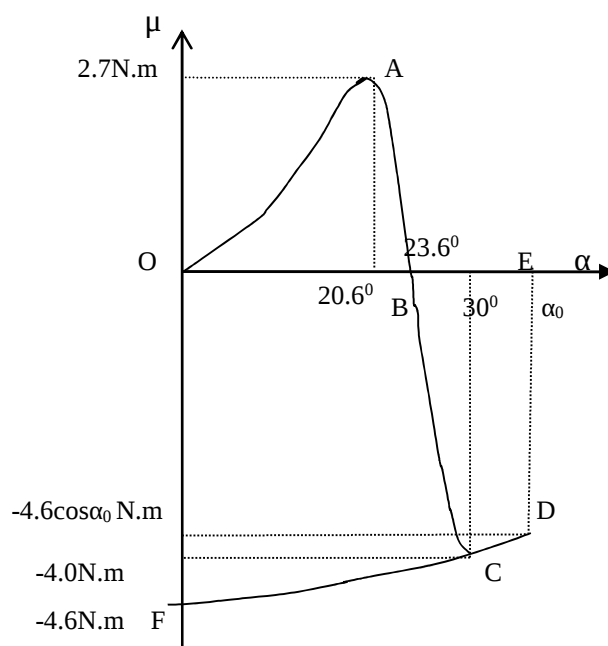
$$TN = 0,20\text{m} + 0,74\text{m} - 2/3 SI = 0,7644\text{m}.$$

$$\mu_{\max} = (1,0\text{kg} \cdot TN - 30\text{kg} \cdot TG)g \cos 20,63^\circ = 2,690 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

$$\text{Tedy } \mu_{\max} = 2,7 \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Protože se prohlubeň dále naklání, množství vody v prohlubni klesá, a když $a = b$, $m = 0$. Díky setrvačnosti a stále narůstá a m klesá. Prohlubeň je prázdná, když $a = 30^\circ$, kdy se m rovná $-30\text{kg} \cdot g \cdot TG \cdot \cos 30^\circ \text{ N}\cdot\text{m}$. Poté α stále roste díky setrvačnosti až do hodnoty α_0 ($\mu = -gM TG \cos \alpha_0 = -4,62 \text{ N}\cdot\text{m} \cos \alpha_0$), následně rychle poklesne na 0 ($\mu = -4,62 \text{ N}\cdot\text{m}$).

Na základě těchto úvah můžeme načrtnout grafy $a(t)$, $m(t)$ a $m(a)$.



2.2. Elementární práce vykonaná momentem $m(a)$ je $dw = m(a)da$. Energie, kterou páka získá během jednoho cyklu díky působení momentu sil $m(a)$ je $W = \oint \mu(a)da$, což je plocha grafu omezená křivkou $m(a)$. Tedy W_{total} je rovna ploše ohraničené křivkou (OABCDFO) v grafu $m(a)$.

Práce, kterou páka přenesse na hmoždír je rovna energii, kterou páka získává při pohybu z polohy $a = a_0$ do vodorovné polohy $a = 0$. Tedy W_{pounding} je rovna ploše (OEDFO) v grafu $m(a)$. Je rovna $gM \cdot TG \cdot \sin \alpha_0 = 4,6J \sin \alpha_0$.

2.3. Velikost a_0 lze odhadnout z toho, že v bodě D je energie páky nulová. Máme plocha (OABO) = plocha (BEDCB)

Odhadneme OABO trojúhelníkem a BEDCB lichoběžníkem, dostaneme

$$23,6^\circ \cdot 2,7N \cdot m \cdot 1/2 = 4,0N \cdot m \cdot [(\alpha_0 - 23,6^\circ) + (\alpha_0 - 30^\circ)] \cdot 1/2, \text{ což znamená } \alpha_0 = 34,7^\circ.$$

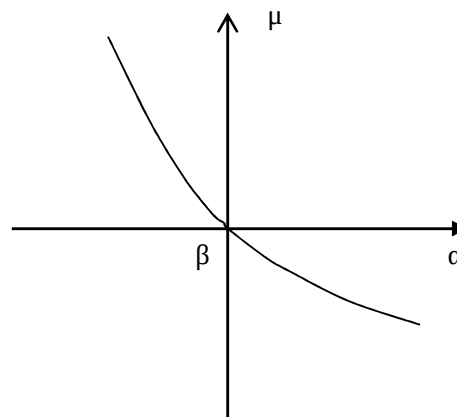
$$\text{Odtud } W_{\text{pounding}} = \text{plocha (OEDFO)} = \int_{34,76}^0 -Mg \cdot TG \cdot \cos \alpha d\alpha = 4,62 J \sin 34,7^\circ = 2,63 J.$$

$$\text{Tedy } W_{\text{pounding}} \approx 2,6 J.$$

Úkol 3.

3.1a. Prohlubeň stále přetéká. Obě větve závislosti $m(a)$ v okolí $a = b$ odpovídající rostoucímu a klesajícímu α jsou vzájemně shodné.

Z grafu plyne, že $a = b$ je stabilní rovnováha hmoždíře.



3.1.b. Nalezněte analyticky výraz pro otáčivý moment síly m je-li úhel náklonu $a = b + \Delta a$ (Δa je malé).

Hmotnost vody v prohlubni, v poloze páky s úhlem nákl a je $m = (1/2) r b h PQ$, kde

$$PQ = h \left(\frac{1}{\tan a} - \frac{1}{\tan 30^\circ} \right). \text{ Snadným výpočtem ukážeme, že se při nárůstu } a \text{ od } b \text{ k}$$

$$b + \Delta a, \text{ zvýšila hmotnost vody o } \Delta m = -\frac{bh^2 r}{2 \sin^2 a} \Delta a \approx -\frac{bh^2 r}{2 \sin^2 b} \Delta a. \text{ Otáčivý}$$

moment m působící na páku při náklonu o $b + \Delta a$ je roven otáčivému momentu

způsobeného tíhou Δm .

Máme $\mu = \Delta m \cdot g \cdot TN \cdot \cos(\beta + \Delta\alpha)$. TN najdeme z podmínky rovnováhy páky při úhlu náklonu β :

$$TN = M \cdot TG / m = 30 \text{ kg} \cdot 0,01571 \text{ m} / 0,605 \text{ kg} = 0,779 \text{ m}.$$

Máme tedy $\mu = -47,2 \text{ N} \cdot \text{m} \Delta\alpha \approx 47 \text{ N} \cdot \text{m} \Delta\alpha$.

3.1.c. Pohybová rovnice páky

$$m = I \frac{d^2 a}{dt^2} \quad \text{kde, } \mu = 47 \text{ N} \cdot \text{m} \Delta\alpha, a = b + \Delta a, \text{ a } I \text{ je součet momentů}$$

setrvačnosti páky a vody v prohlubni vzhledem k ose T. Moment setrvačnosti I není konstantní, jelikož množství vody v prohlubni závisí na a . Pokud je Δa malé, lze považovat množství vody v prohlubni za konstantní, tedy I je přibližně konstantní.

Považujeme vodu v prohlubni za hmotný bod o hmotnosti 0,6 kg, jednoduchý výpočet dává $I = 12 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0,6 \text{ kg} \cdot 0,78^2 \text{ m}^2 = 12,36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \approx 12,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Máme tedy $-47 \text{ N} \cdot \text{m} \Delta\alpha =$

$12,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \frac{d^2 \Delta\alpha}{dt^2}$. Tedy, pohybovou rovnici harmonického oscilátoru z periodou $\tau =$

$$2\pi \sqrt{\frac{12,4}{47}} \text{ s} = 3,227 \text{ s}. \text{ Odpověď tedy zní } \tau = 3,2 \text{ s}.$$

3.2. Harmonické kmitání páky (okolo $a = b$) pokud prohlubeň stále přetéká

Předpokládejme, že páka kmitá harmonicky s amplitudou Δa_0 okolo $a = b$. V čase $t = 0$, $\Delta a = 0$, začne prohlubeň přetékat. Za čas dt se změní náklon o da . Zajímá nás případ $da < 0$, tj. pohyb páky je ve směru zmenšujícího se a , a je tedy třeba další vodu, aby prohlubeň stále přetékala. Pohybová rovnice je:

$$\Delta a = -\Delta a_0 \sin(2\pi t / \tau), \text{ tedy } d(\Delta a) = da = -\Delta a_0 (2\pi / \tau) \cos(2\pi t / \tau) dt.$$

Aby prohlubeň přetékala, musí za tento čas přitéci do prohlubně minimálně

$$dm = -\frac{bh^2 r}{2 \sin^2 b} da = \frac{2\Delta a_0 \pi bh^2 r dt}{2\tau \sin^2 b} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right);$$

$$dm \text{ je maximální v čase } t = 0, \quad dm_0 = \frac{\pi bh^2 r \Delta a_0}{\tau \sin^2 b} dt$$

Množství vody dopadající do prohlubně je dán jejím přítokem Φ ; $dm_0 = \Phi dt$,

$$\text{tedy} \quad \Phi = \frac{\pi bh^2 r \Delta a_0}{\tau \sin^2 b}.$$

Přetékající prohlubeň je nutná podmínka harmonických kmitů páky, tedy podmínka, aby

konala páka harmonické kmity s amplitudou 1^0 nebo $2\pi/360$ rad je $\Phi \geq \Phi_1$ kde

$$\Phi_1 = \frac{\pi b h^2 \rho_2 \pi}{360 \tau \sin^2 \beta} = 0,2309 \text{ kg/s.}$$

Tedy $\Phi_1 = 0,23 \text{ kg/s.}$

3.3 Určení Φ_2

Přetéká-li stále prohlubeň při náklonu páky $20,6^\circ$, hmotnost vody v prohlubni dosáhne v tomto čase 1 kg a páka kmitá harmonicky s amplitudou rovnou $23,6^\circ - 20,6^\circ = 3^\circ$. Přítok musí být větší než $3 \Phi_1$, tedy $\Phi_2 = 0,7 \text{ kg/s.}$ Toto je minimální přítok, aby hmoždíř přestal pracovat.