

## Řešení

1.1

Nejprve použijeme Gaussův zákon pro jednu desku,

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Hustota povrchového náboje na desce o ploše  $A$  nabité nábojem  $Q$  je

$$\sigma = \frac{Q}{A}.$$

Všimněme si, že elektrické pole je generováno dvěma stejnými nabitými rovnoběžnými deskami. Příspěvek každé z nich k elektrickému poli je  $\frac{1}{2}E$ . Síla je definována jako elektrické pole vynásobené nábojem. Máme tedy,

$$\text{Síla} = \frac{1}{2} E Q = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$


---

1.2

Hookeův zákon pro pružinku je

$$F_m = -k x.$$

V 1.1 jsme odvodili elektrickou sílu mezi oběma deskami,

$$F_e = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}.$$

Systém je stabilní. Podmínka rovnováhy je

$$F_m = F_e,$$

$$\Rightarrow x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k}$$


---

1.3

Elektrické pole je konstantní, tedy rozdíl potenciálů  $V$  je dán vztahem

$$V = E(d - x).$$

(I jiné přístupy jsou správné. Lze například použít definici kapacity k získání  $V$ .)

Dosazením elektrického pole z předchozího úkolu do této rovnice dostaneme,

$$V = \frac{Q d}{\varepsilon_0 A} \left( 1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k d} \right).$$


---

1.4

$C$  je definována jako poměr náboje a rozdílu potenciálů, tedy

$$C = \frac{Q}{V}.$$

Použitím výsledku 1.3, máme  $\frac{C}{C_0} = \left( 1 - \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A k d} \right)^{-1}.$

---

1.5

Musíme počítat jak mechanickou energii pružinky

$$U_m = \frac{1}{2} kx^2,$$

tak elektrickou energii kondenzátoru,

$$U_E = \frac{Q^2}{2C}.$$

Tedy celková energie systému je

$$U = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 A} \left( 1 - \frac{Q^2}{4\epsilon_0 A k d} \right).$$


---

2.1

Pro danou hodnotu  $x$ , je množství náboje na každém kondenzátoru

$$Q_1 = V C_1 = \frac{\epsilon_0 A V}{d - x},$$

$$Q_2 = V C_2 = \frac{\epsilon_0 A V}{d + x}.$$


---

2.2

Máme dva kondenzátory. Použitím výsledku 1.1 po každý z nich dostaneme

$$F_1 = \frac{Q_1^2}{2\epsilon_0 A},$$

$$F_2 = \frac{Q_2^2}{2\epsilon_0 A}.$$

Jelikož jsou tyto dvě síly v opačných směrech, výsledná síla je

$$F_E = F_1 - F_2, \Rightarrow F_E = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2} \left( \frac{1}{(d - x)^2} - \frac{1}{(d + x)^2} \right).$$


---

2.3

Zanedbáním členů řádu  $x^2$  ve výsledku 2.2, dostáváme

$$F_E = \frac{2\epsilon_0 A V^2}{d^3} x.$$


---

2.4

V systému jsou dvě pružinky o stejné tuhosti  $k$  spojené sériově. Mechanická síla je tedy

$$F_m = -2 k x.$$

Použitím výsledku úlohy 2.3 s uvědoměním si, že obě síly mají opačný směr, dostáváme

$$F = F_m + F_E, \quad \Rightarrow \quad F = -2 \left( k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3} \right) x,$$

$$\Rightarrow k_{\text{eff}} = 2 \left( k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3} \right).$$


---

2.5

Z druhého Newtonova pohybového zákona,

$$F = ma$$

a výsledku 2.4, máme

$$a = -\frac{2}{m} \left( k - \frac{\varepsilon_0 A V^2}{d^3} \right) x.$$


---

3.1

Začneme s Kirchhoffovými zákony pro dva elektrické obvody,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Q_s}{C_s} + V - \frac{Q_2}{C_2} = 0 \\ -\frac{Q_s}{C_s} + V - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \\ Q_2 - Q_1 + Q_s = 0 \end{array} \right. .$$

Platí  $V_s = \frac{Q_s}{C_s}$  a tedy

$$\Rightarrow V_s = V \frac{\frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 - x^2}}{C_s + \frac{2\varepsilon_0 A d}{d^2 - x^2}} .$$

Pozn: Soutěžící mohou zjednodušit tuto formuli použitím aproximace  $d^2 \gg x^2$ . To ale v této sekci nevádí.

---

3.2

Zanedbáním členů řádu  $x^2$  v odpovědi 3.1, dostaneme

$$V_s = V \frac{2\varepsilon_0 A x}{d^2 C_s + 2\varepsilon_0 A d} .$$


---

4.1

Poměr elektrické a mechanické síly je

$$\frac{F_E}{F_m} = \frac{\varepsilon_0 A V^2}{k_{eff} d^3} ,$$

dosazením číselných hodnot,

$$\frac{F_E}{F_m} = 7,6 \cdot 10^{-9} .$$

Z tohoto výsledku je jasné, že můžeme zanedbat elektrické síly vzhledem mechanickým.

---

4.2

Jak jsme ukázali v předchozí sekci, lze uvažovat, že jediná síla, která působí na desku, je mechanická síla pružinek:

$$F = 2k x .$$

Tedy, posunutí pohyblivé desky v mechanické rovnováze je

$$x = \frac{ma}{2k} .$$

Maximální výchylka je dvakrát větší,

$$x_{\max} = 2x ,$$

$$x_{\max} = \frac{ma}{k} .$$


---

4.3

Pro zrychlení

$$a = g ,$$

je maximální posunutí

$$x_{\max} = \frac{mg}{k} .$$

Použijme výsledek 3.2, a máme

$$V_s = V \frac{2\varepsilon_0 A x_{\max}}{d^2 C_s + 2\varepsilon_0 A d}$$

$$\Rightarrow C_s = \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \left( \frac{V x_{\max}}{V_s d} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow C_s = 8,0 \cdot 10^{-11} \text{ F} .$$


---

4.4

Necht'  $\ell$  je vzdálenost mezi řidičovou hlavou a volantem. Lze ji odhadnout v intervalu

$$\ell = 0,4 \text{ m} - 1 \text{ m} .$$

V okamžiku nárazu je relativní rychlost řidičovy hlavy vzhledem k automobilu nulová

$$\Delta v(t=0) = 0,$$

tedy

$$\ell = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

$$t_1 = 0,3 - 0,5 \text{ s}.$$

---

4.5

Čas  $t_2$  je polovina periody harmonického oscilátoru, tedy

$$t_2 = \frac{T}{2},$$

Perioda harmonického oscilátoru je jednoduše dána vztahem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

tedy,

$$t_2 = 0,019 \text{ s}.$$

Jelikož  $t_1 > t_2$ , airbag se stihne aktivovat včas.