

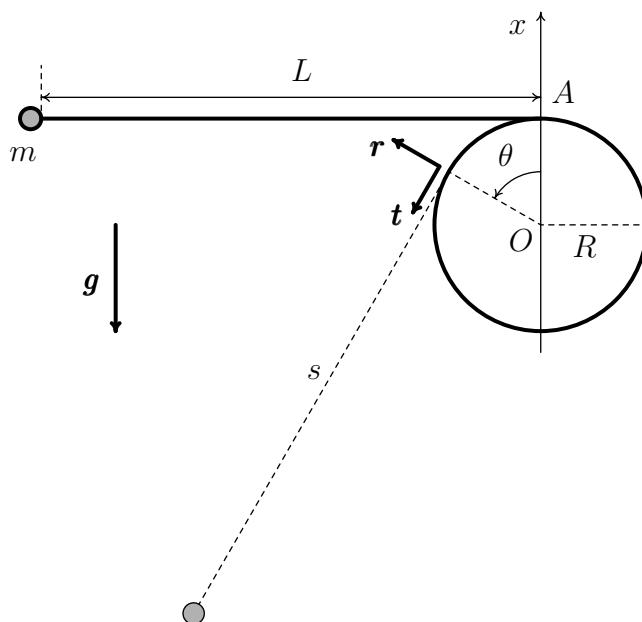
Úlohy z 34. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 2003 Tai-Wan

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha - Houpačka s padajícím závažím

Tuhá válcová tyč poloměru R je upevněna vodorovně nad zemí. Lankem zanedbatelné hmotnosti a délky L ($L > 2\pi R$) je zavěšeno v bodě A na vrcholu tyče závažíčko hmotnosti m , jak je naznačeno na obr. 1a. Houpačka je zvednuta na úroveň bodu A a vypuštěna z klidu, když je lanko napjaté. Zanedbejte jakékoliv napínání lanka. Předpokládejte, že závažíčko může být považováno za hmotný bod a kýve se pouze v rovině kolmé k ose tyče. Podle toho jej můžeme považovat za bodovou částici. Tíhové zrychlení je g .



Nechť O je počátek vztažné soustavy. Když je částice v bodě P , lanko má tečný směr k válcovému povrchu v bodě Q . Délku úseku lana QP označíme s . Jednotkové vektory v tečném a radiálním směru označme $\mathbf{t}$ a $\mathbf{r}$. Úhlové posunutí θ průvodiče OQ je měřeno proti směru hodinových ručiček od svislé osy x podél OA a je bráno kladně.

Když $\theta = 0$, pak je délka s rovna L a tíhová potenciální energie U částice je nulová. Jak se částice pohybuje, okamžité časové změny veličin θ a s jsou dány veličinami $\dot{\theta}$ a $\dot{s}$.

Pokud nebude řečeno jinak, veškeré rychlosti (velikosti i směry) se vztahují k pevnému bodu O .

Část A

V části A je lanko během pohybu částice napjaté. V závislosti na veličinách daných výše, tj. $s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}, R, L, g, \mathbf{t}, \mathbf{r}$, najděte:

- (a) Vztah mezi $\dot{\theta}$ a $\dot{s}$. (0,5 bodu)
- (b) Rychlost $\mathbf{v}_Q$ pohybujícího se bodu Q vzhledem k O . (0,5 bodu)
- (c) Rychlost částice $\mathbf{v}'$ vzhledem k pohybujícímu se bodu Q , když se částice nachází v bodě P . (0,7 bodu)
- (d) Rychlost částice $\mathbf{v}$ vzhledem k bodu O , když se částice nachází v bodě P . (0,7 bodu)
- (e) $\mathbf{t}$ -složku zrychlení částice vzhledem k bodu O , když se nachází v bodě P . (0,7 bodu)
- (f) Tíhovou potenciální energii U částice, když je v bodě P . (0,5 bodu)
- (g) Rychlost v_m částice v nejnižším bodě její trajektorie. (0,7 bodu)

Část B

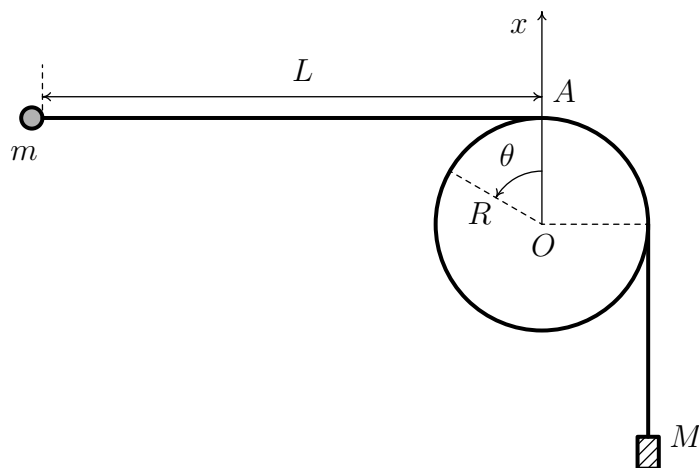
V části B má poměr L ku R následující hodnotu:

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \cotg \frac{\pi}{16} = 3,534 + 3,352 = 6,886$$

- (h) Jaká je rychlost v_s částice, když je úsek lanka mezi body P a Q současně napjatý a zároveň nejkratší? (vyjádřete v závislosti na g a R) (2,4 bodu)
- (i) Jaká je rychlost v_H částice v nejvyšším bodě její trajektorie H , když se přehoupne na druhou stranu tyče? (vyjádřete v závislosti na g a R) (1,9 bodu)

Část C

V části C není kyvadlo upevněno v bodě A , ale je lankem spojeno přes vrchol tyče s těžším závažím hmotnosti M , jak je naznačeno na obr. 1b. Závaží může být považováno za částici.



Na začátku je závaží upevněno na úrovni bodu A a závaží visí dole pod bodem O . Lanko je napnuté a jeho vodorovná část má délku L . Závažíčko je poté z klidu uvolněno a závaží začne padat. Předpokládejme, že závažíčko zůstává ve svislé rovině a může se bez překážek kývat během pádu závaží.

Smykové tření mezi lankem a povrchem tyče je zanedbatelné. Naproti tomu, statické tření předpokládáme dostatečně velké, aby ve chvíli, kdy se závaží poprvé zastaví, se nedá znovu do pohybu.

- (j) Předpokládejte, že se závaží skutečně zastaví po pádu majícím délku D a že $(L - D) \ll R$. Jestliže částice se pak může houpat kolem tyče až do výchylky $\theta = 2\pi$, zatímco oba úseky lana neovinuté kolem tyče zůstávají přímé, poměr $\alpha = D/L$ nesmí být menší než kritická hodnota α_c . Zanedbejte členy řádu R/L nebo vyššího, obdržte odhad α_c v závislosti na poměru M/m . (3,4 bodu)

Řešení

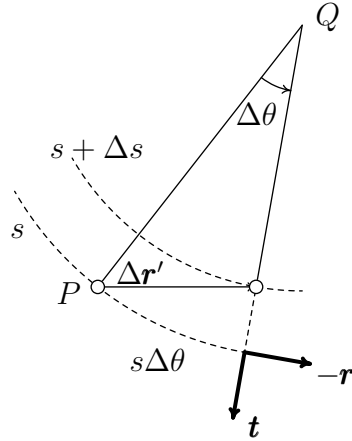
Část A

- (a) Protože délka lanka $L = s + R\theta$ je konstantní, její změna velikosti s časem musí být nulová. Tudíž máme

$$\dot{s} + R\dot{\theta} = 0 \quad (A1)$$

- (b) Vzhledem k bodu O se Q pohybuje po kružnici poloměru R s úhlovou rychlostí $\dot{\theta}$, takže

$$\mathbf{v}_Q = R\dot{\theta}\mathbf{t} = -\dot{s}\mathbf{t} \quad (A2)$$



Obr. A1

- (c) Viz obr. A1. Vzhledem k bodu Q je posunutí bodu P za časový interval Δt

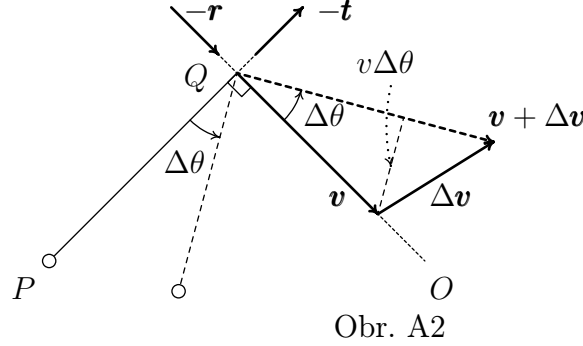
$$\Delta\mathbf{r}' = (s\Delta\theta)(-\mathbf{r}) + (\Delta s)\mathbf{t} = [(s\dot{\theta})(-\mathbf{r}) + \dot{s}\mathbf{t}]\Delta t.$$

Z toho vyplývá

$$\mathbf{v}' = -s\dot{\theta}\mathbf{r} + \dot{s}\mathbf{t}. \quad (A3)$$

- (d) Rychlost částice vzhledem k bodu O je součtem dvou relativních rychlostí daných rovnicemi (A2) a (A3), takže

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_Q = (-s\dot{\theta}\mathbf{r} + \dot{s}\mathbf{t}) + R\dot{\theta}\mathbf{t} = -s\dot{\theta}\mathbf{r} \quad (A4)$$



- (e) Viz obr. A2. Složka ve směru vektoru $-\mathbf{t}$ změny rychlosti $\Delta \mathbf{v}$ je dána jako

$$(-\mathbf{t}) \cdot \Delta \mathbf{v} = v \Delta \theta = v \dot{\theta} \Delta t.$$

Tudíž $\mathbf{t}$ -složka zrychlení $\mathbf{a} = \Delta \mathbf{v} / \Delta t$ je dána vztahem

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = -v \dot{\theta}.$$

Protože velikost rychlosti v částice je $s \dot{\theta}$ podle rovnice (A4), nahlédneme, že $\mathbf{t}$ -složka zrychlení částice v bodě P je dána jako

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = -v \dot{\theta} = -(s \dot{\theta}) \dot{\theta} = -s \dot{\theta}^2 \quad (\text{A5})$$

Poznamenejme, že z obr. A2 můžeme obdržet také radiální složku zrychlení jako

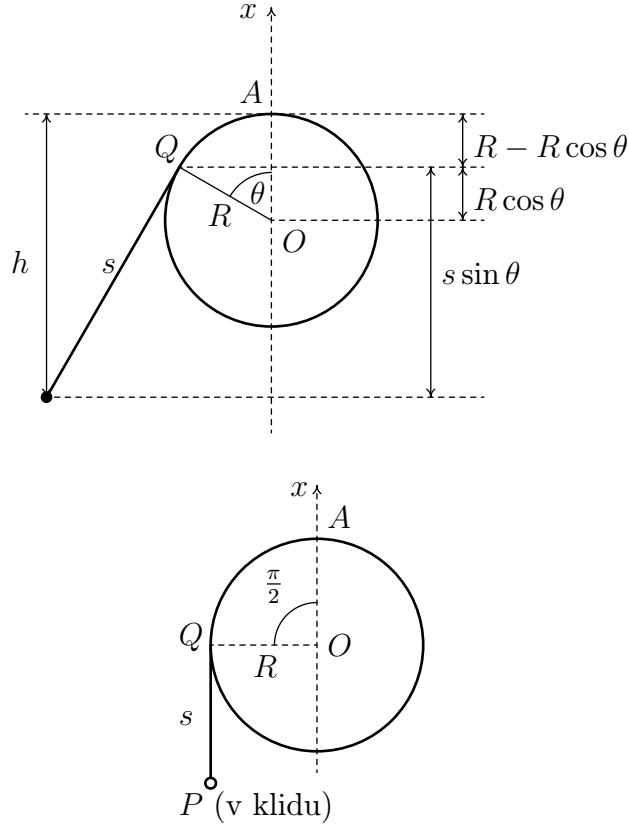
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d(s\dot{\theta})}{dt}.$$

- (f) Viz obr. A3. Tíhová potenciální energie částice je dána vztahem $U = -mgh$. Pomocí s a θ ji lze vyjádřit jako

$$U(\theta) = -mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \quad (\text{A6})$$

- (g) V nejnižším bodě své trajektorie musí částice mít nejnižší tíhovou potenciální energii U_m . Jestliže celková mechanická energie E částice je

rovna U_m , její kinetická energie by byla nulová. Částice by pak zůstala v klidu a ve stabilní rovnovážné poloze naznačené na obr. A4. Tudíž potenciální energie dosahuje svého minima, když $\theta = \pi/2$ nebo $s = L - \pi R/2$.



Obr. A3 (nahore) a obr. A4 (dole)

Z obr. A4 nebo rovnice (A6) pak pro minimální potenciální energii platí

$$U_m = U(\frac{\pi}{2}) = -mg[R + L - (\pi R/2)]. \quad (A7)$$

Na počátku je celková mechanická energie E nulová. Protože se E zachovává, rychlost v_m částice v nejnižším bodě trajektorie musí splňovat podmínku

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + U_m. \quad (A8)$$

Z rovnic (A7) a (A8) dostaneme

$$v_m = \sqrt{2g[R + (L - \pi R/2)]}. \quad (A9)$$

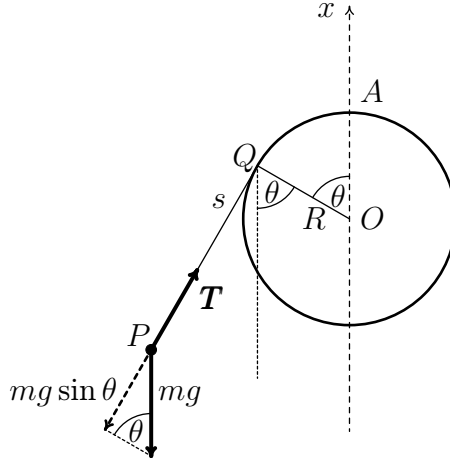
Část B

(h) Z rovnice (A6) vychází pro celkovou mechanickou energii částice

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + U(\theta) = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \quad (B1)$$

Z rovnice (A4) plyne, že velikost rychlosti v je rovna $s\dot{\theta}$. Tudíž z rovnice (B1) dostáváme

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = 2g[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \quad (B2)$$



Obr. B1

Nechť T je síla napínající lanko. Potom, jak je vidět z obr. B1, t -složka výsledné síly působící na částici je $-T + mg \sin \theta$. Z rovnice (A5) víme, že příslušné zrychlení je rovno $(-s\ddot{\theta})$. Podle druhého Newtonova zákona máme

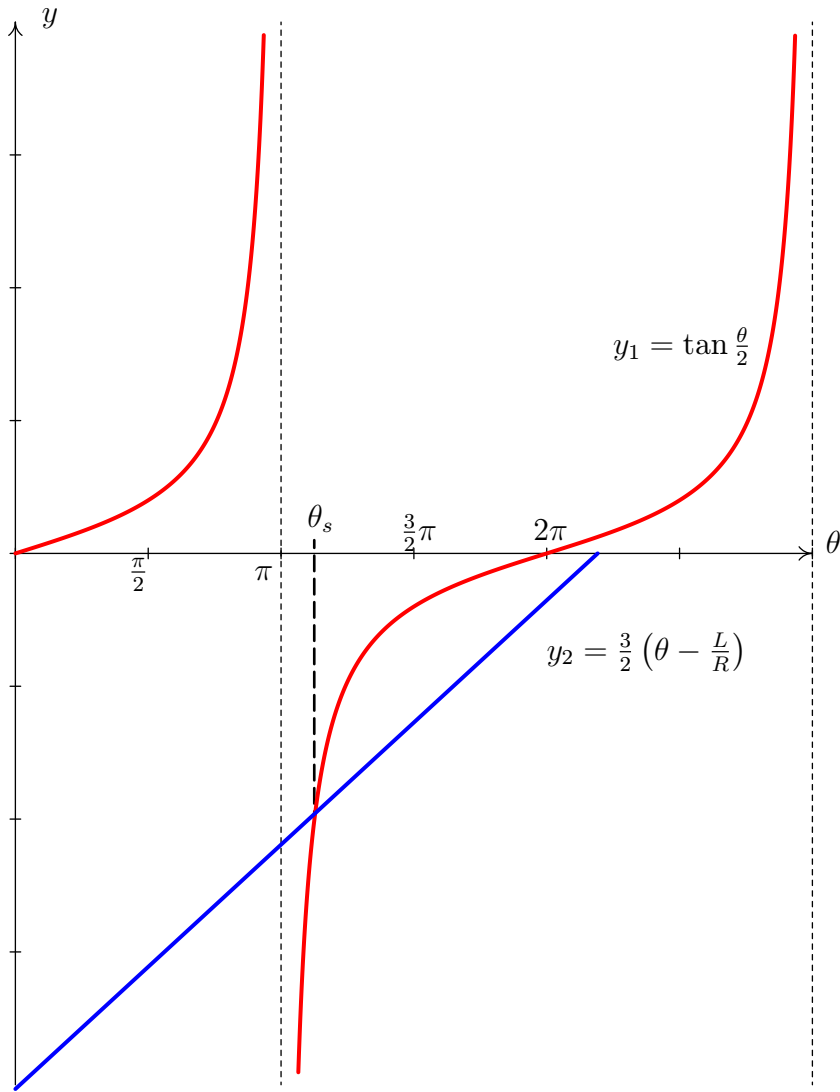
$$m(-s\ddot{\theta}) = -T + mg \sin \theta \quad (B3)$$

Z posledních dvou rovnic můžeme vyjádřit sílu napínající lanko:

$$T = m(s\ddot{\theta} + g \sin \theta) = \frac{mg}{s}[2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta]$$

$$T = \frac{2mgR}{s} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \left(\theta - \frac{L}{R} \right) \right] \sin \theta \quad (B4)$$

Označme funkce $y_1 = \operatorname{tg}(\theta/2)$ a $y_2 = 3(\theta - L/R)/2$. Jejich grafy jsou na obr. B2.



Obr. B2

Z rovnice (B4) a obr. (B2) dostaneme výsledek naznačený v tabulce B1. Úhel, při kterém $y_2 = y_1$, označme θ_s ($\pi < \theta_s < 2\pi$) a je dán vztahem

$$\frac{3}{2} \left(\theta_s - \frac{L}{R} \right) = \operatorname{tg} \frac{\theta_s}{2} \quad (B5)$$

nebo ekvivalentní podmínkou

$$\frac{L}{R} = \theta_s - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{\theta_s}{2} \quad (B6)$$

Protože je poměr L/R znám a dán vztahem

$$\frac{L}{R} = \frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{16} = \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) - \frac{2}{3} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\pi}{8} \right) \quad (B7)$$

snadno nahlédneme, že $\theta_s = 9\pi/8$.

	$(y_1 - y_2)$	$\sin \theta$	síla T
$0 < \theta < \pi$	+	+	+
$\pi < \theta < \theta_s$	$+\infty$	0	+
$\theta = \theta_s$	0	−	0
$\theta_s < \theta < 2\pi$	+	−	−

Tabulka B1 ukazuje, že síla T napínající lanko musí být kladná (neboť lanko musí být napnuté a přímé) v rozsahu $0 < \theta < \theta_s$. Jakmile θ dosáhne hodnoty θ_s , napínající síla bude nulová a část lanka, která není v kontaktu s tyčí, již nebude dále přímá. Nejkratší možná hodnota s_{min} pro délku s úsečky QP tudíž nastane pro $\theta = \theta_s$ a je dána vztahem

$$s_{min} = L - R\theta_s = R \left(\frac{9\pi}{8} + \frac{2}{3} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{16} - \frac{9\pi}{8} \right) = \frac{2R}{3} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{16} = 3,352R \quad (B8)$$

Když $\theta = \theta_s$, pak $T = 0$ a rovnice (B2) a (B3) dávají

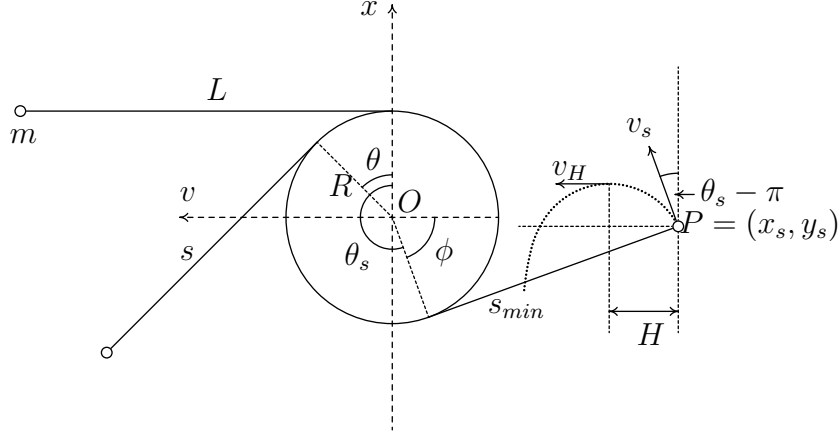
$$v^2 = -gs \sin \theta.$$

Tudíž rychlost v_s je

$$v_s = \sqrt{-gs_{min} \sin \theta_s} = \sqrt{\frac{2gR}{3} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{4gR}{3} \cos \frac{\pi}{16}}$$

$$v_s = 1,133\sqrt{gR} \quad (B9)$$

- (i) Když $\theta \geq \theta_s$, částice se pohybuje jako projektil v tíhovém poli. Jak je naznačeno na obr. B3, jde o šikmý vrh s počáteční rychlostí v_s z pozice $P = (x_s, y_s)$ ve směru svírajícím úhel $\phi = (3\pi/2 - \theta_s)$ s osou y .



Obr. B3

Rychlost v_H částice v nejvyšším bodě parabolické trajektorie je rovna y -ové složce její počáteční rychlosti, když byla „vystřelena“. Tudíž

$$v_H = v_s \sin(\theta_s - \pi) = \sqrt{\frac{4gR}{3}} \cos \frac{\pi}{16} \sin \frac{\pi}{8} = 0,4334\sqrt{gR} \quad (B10)$$

Vodorovná vzdálenost H uražená částicí z bodu P do bodu s maximální výškou je

$$H = \frac{v_s^2 \sin 2(\theta_s - \pi)}{2g} = \frac{v_s^2}{2g} \sin \frac{9\pi}{4} = 0,4535R \quad (B11)$$

Souřadnice částice, když $\theta = \theta_s$ jsou dány vztahy

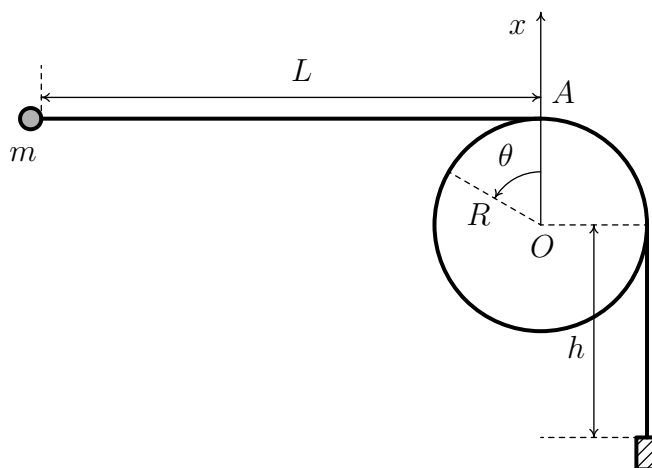
$$x_s = R \cos \theta_s - s_{min} \sin \theta_s = -R \cos \frac{\pi}{8} + s_{min} \sin \frac{\pi}{8} = 0,358R \quad (B12)$$

$$y_s = R \sin \theta_s + s_{min} \cos \theta_s = -R \sin \frac{\pi}{8} - s_{min} \cos \frac{\pi}{8} = -3,478R \quad (B13)$$

Evidentně je $|y_s| > (R + H)$. Částice tudíž může dosáhnout bodu své nejvyšší výšky aniž by předtím udeřila do povrchu tyče.

Část C

- (j) Předpokládejme, že závaží je na počátku o délku h níže než bod O , jak je naznačeno na obr. C1.



Obr. C1

Když závaží spadne o délku D a zastaví se, zákon zachování celkové mechanické energie systému částice závaží dává

$$-Mgh = E' - Mg(h + D) \quad (C1)$$

kde E' je celková mechanická energie částice, když závaží zastaví. Z toho vyplývá

$$E' = MgD \quad (C2)$$

Nechť Λ je celková délka lanka. Pak musí být její hodnota stejná pro $\theta = 0$ i jakékoli jiné úhlové posunutí θ . Pak musí platit

$$\Lambda = L + \frac{\pi}{2}R + hs + R\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + (h + D) \quad (C3)$$

Poznamenejme, že $D = \alpha L$, a zavedením $\lambda = L - D$ můžeme psát

$$\lambda = L - D = (1 - \alpha)L \quad (C4)$$

Z posledních dvou rovnic dostaneme

$$s = L - D - R\theta = \lambda - R\theta \quad (C5)$$

Poté, co závaží zastaví, se musí celková mechanická energie částice zachovávat. Podle rovnice (C2) nyní máme, namísto rovnice (B1), následující vztah:

$$E' = MgD = \frac{1}{2}mv^2 - mg[R(1 - \cos \theta) + s \sin \theta] \quad (C6)$$

Druhá mocnina rychlosti částice je tedy dána vztahem

$$v^2 = (s\dot{\theta})^2 = \frac{2MgD}{m} + 2gR[(1 - \cos \theta) + \frac{s}{R} \sin \theta] \quad (C7)$$

Protože rovnice (B3) stále platí, síla T napínající lanko je dána vztahem

$$-T + mg \sin \theta = m(-s\dot{\theta}^2) \quad (C8)$$

Z posledních dvou rovnic vychází

$$\begin{aligned} T &= m(s\dot{\theta}^2 + g \sin \theta) \\ T &= \frac{mg}{s} \left[\frac{2M}{m} D + 2R(1 - \cos \theta) + 3s \sin \theta \right] \\ T &= \frac{2mgR}{s} \left[\frac{MD}{mR} + (1 - \cos \theta) + \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{R} - \theta \right) \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (C9)$$

kde k odvození posledního vztahu je užita rovnice (C5).

Nyní uvažujme funkci

$$f(\theta) = 1 - \cos \theta + \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{R} - \theta \right) \sin \theta \quad (C10)$$

Protože $\lambda = (L - D) \ll R$, můžeme psát

$$f(\theta) \approx 1 + \frac{3}{2} \frac{\lambda}{R} \sin \theta - \cos \theta = 1 + A \sin(\theta - \phi) \quad (C11)$$

kde jsme označili

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda}{R} \right)^2}, \quad \phi = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\frac{3\lambda}{2R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda}{R} \right)^2}} \quad (C12)$$

Z rovnice (C11) je vidět, že minimální hodnota funkce $f(\theta)$ je

$$f_{min} = 1 - A = 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda}{R}\right)^2} \quad (C13)$$

Protože síla T napínající lanko zůstává během houpání částice kolem tyče nezáporná, máme z rovnice (C9) nerovnost

$$\frac{MD}{mR} + f_{min} = \frac{M(L - \lambda)}{mR} + 1 - \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda}{R}\right)^2} \geq 0 \quad (C14)$$

neboli

$$\left(\frac{ML}{mR}\right) + 1 \geq \left(\frac{M\lambda}{mR}\right) + \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} \frac{\lambda}{R}\right)^2} \approx \left(\frac{M\lambda}{mR}\right) + \left(\frac{3\lambda}{2R}\right) \quad (C15)$$

Z rovnic (C4), (C15) dostáváme

$$\left(\frac{ML}{mR}\right) + 1 \geq \left[\left(\frac{ML}{mR}\right) + \left(\frac{3L}{2R}\right)\right] (1 - \alpha) \quad (C16)$$

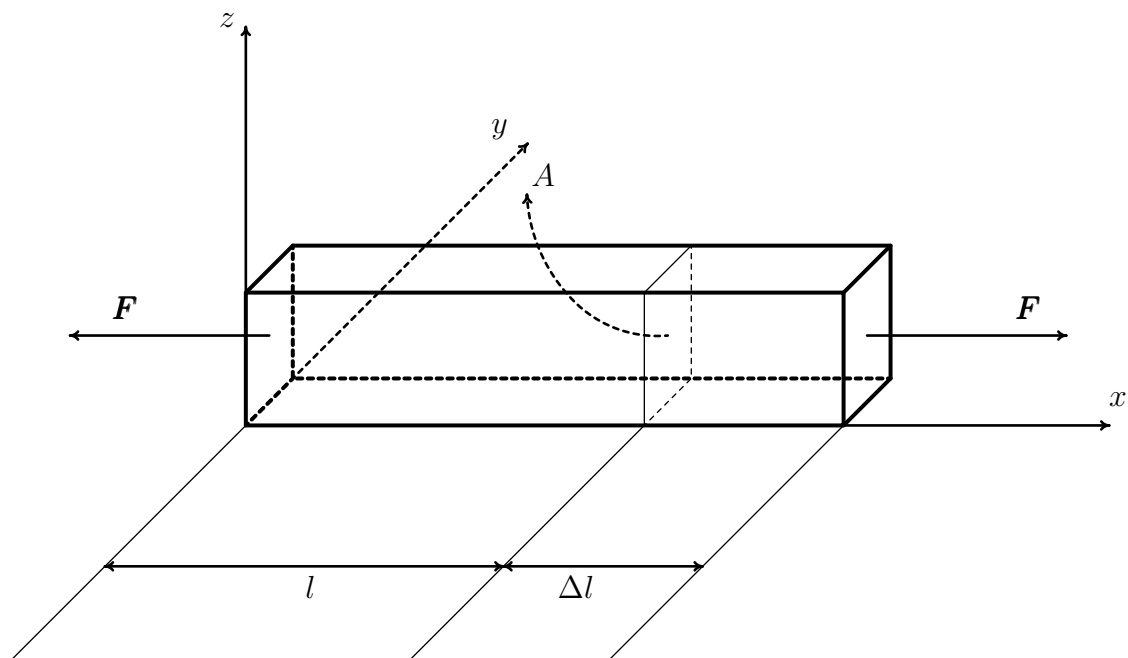
Zanedbáním členů řádu (R/L) nebo vyššího vede poslední nerovnost na

$$\alpha \geq 1 - \frac{\left(\frac{ML}{mR}\right) + 1}{\left(\frac{ML}{mR}\right) + \left(\frac{3L}{2R}\right)} = \frac{\left(\frac{3L}{2R}\right) - 1}{\left(\frac{ML}{mR}\right) + \left(\frac{3L}{2R}\right)} = \frac{1 - \frac{2R}{3L}}{\frac{2M}{3m} + 1} \approx \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}} \quad (C17)$$

Kritická hodnota pro poměr D/L je tedy

$$\alpha_c = \frac{1}{1 + \frac{2M}{3m}} \quad (C18)$$

2. úloha - A Piezoelectric Crystal Resonator under an Alternating Voltage



Obr. 2a

Uvažujte homogenní tyč průřezu A a (v nestlačeném stavu) délky l (obráz. 2a). Její délka se mění o Δl , když stejně velké a proti sobě působící síly velikosti F působí na její konce ve směru normál. *Napětí* T na plochy na konci tyče je definováno jako podíl F/A . Relativní změna délky tyče, tj. poměr $\Delta l/l$, se nazývá *relativní prodloužení*, resp. zkrácení¹ tyče. Označme jej S . V závislosti na T a S lze Hookův zákon vyjádřit jako

$$T = YS, \quad \text{nebo} \quad \frac{F}{A} = Y \frac{\Delta l}{l}, \quad (1)$$

kde Y značí *Youngův modul pružnosti* materiálu tyče. Poznamenejme, že *stlačující* napětí T odpovídá $F < 0$ a poklesu délky, tj. $\Delta l < 0$. Takové napětí má tudíž zápornou hodnotu a vzhledem k tlaku p platí $T = -p$.

¹anglický termín je *strain*, což značí napětí nebo zatížení

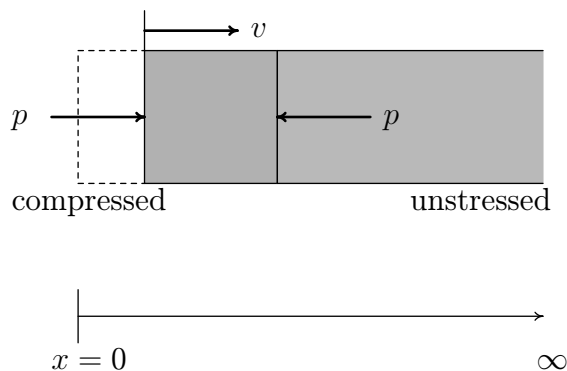
Pro homogenní tyč hustoty ρ , rychlost šíření podélných vln tyčí je dán vztahem

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (2)$$

Efekt útlumu nebo rozptýlení lze při řešení následujících úkolů zanedbat.

Část A: mechanické vlastnosti

Homogenní tyč „polonekonečné“ délky, rozprostírající se od $x = 0$ do ∞ (viz obr. 2b), má hustotu ρ . Zpočátku je nehybná a bez napětí. Kladívko poté jemným úderem vyvolá malý tlak p na levém konci v bodě $x = 0$ po velmi krátký čas Δt , čímž způsobí tlakovou vlnu šířící se rychlostí u směrem doprava.

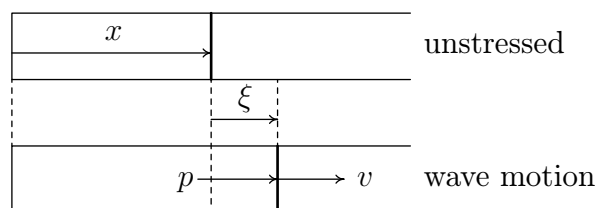


Obr. 2b

- Když kladívko způsobí pohyb levého konce tyče konstantní rychlostí v (obráz. 2b), jaké je relativní prodloužení S a tlak p v místě levého konce tyče během času Δt ? Vyjádřete pouze pomocí ρ , u a v . (1,6 bodu)
- Uvažujte podélnou vlnu šířící se tyčí podél osy x . Pro průřez v bodě x , když je tyč nenapjatá (obráz. 2c), buď $\xi(x, t)$ jeho posunutí v čase t a předpokládejme

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut), \quad (3)$$

kde ξ_0 a k jsou konstanty. Určete odpovídající rychlost $v(x, t)$, prodloužení $S(x, t)$ a tlak $p(x, t)$ jako funkce x a t . (2,4 bodu)



Obr. 2c

Část B: elektromechanické vlastnosti (včetně piezoelektrického efektu)

Uvažujte destičku křemenného krystalu délky b , tloušťky h a šířky w (obr. 2d). Jeho délka a tloušťka se měří podél osy x a z . Elektrody tvoří tenké pokovení na vrchu a spodku krystalu. Vodiče, které slouží také jako upevnění (obr. 2e), jsou přiletovány ke středům elektrod, o kterých můžeme předpokládat, že jsou nehybné vzhledem k podélným oscilacím ve směru osy x .

Uvažovaný křemenný krystal má hustotu $\rho = 2,65 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ a Youngův modul pružnosti $Y = 7,87 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$. Délka b destičky je 1,00 cm a šířka w a výška (tloušťka) h jsou takové, že $h \ll w$ a $w \ll b$. Pokud je spínač K otevřený, předpokládáme pouze podélné stojaté vlnění v destičce ve směru osy x .

Pro stojatou vlnu frekvence $f = \omega/2\pi$ může být posunutí $\xi(x, t)$ v čase t průřezu destičky s rovnovážnou polohou x psáno jako

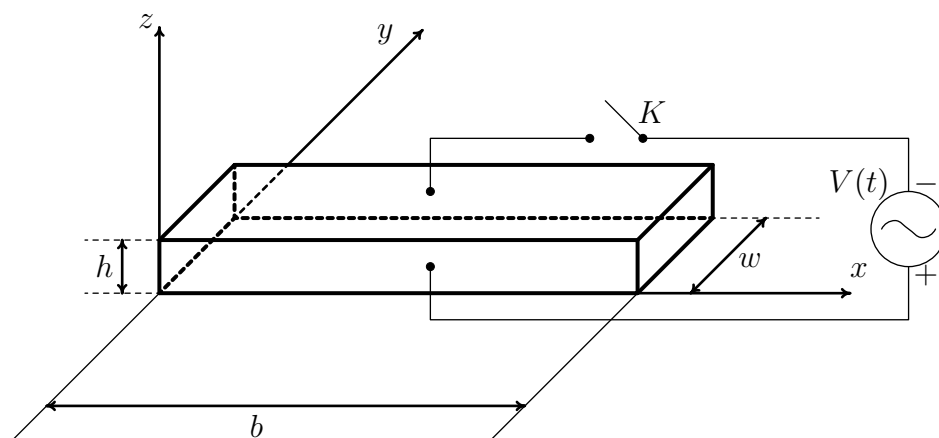
$$\xi(x, t) = 2\xi_0 g(x) \cos \omega t, \quad (0 \leq x \leq b) \quad (4b)$$

kde ξ_0 je kladná konstanta a prostorová funkce $g(x)$ je tvaru

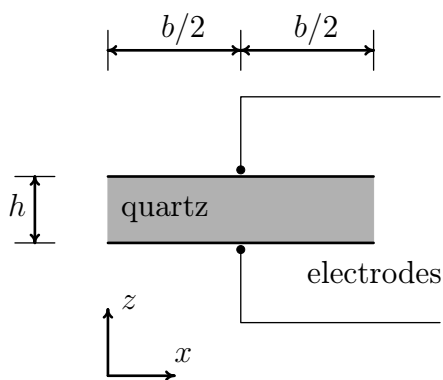
$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right). \quad (4b)$$

Funkce $g(x)$ má maximální hodnotu 1 a pro k platí $k = \omega/u$. Nezapomeňte,

že středy elektrod jsou nehybné a levý i pravý kraj destičky jsou volné a musí na ně působit nulový tlak (nebo napětí).



Obr. 2d



Obr. 2e

- (c) Určete hodnoty konstant B_1 a B_2 v rovnici (4b) pro podélnou stojatou vlnu v křemenné destičce. (1,2 bodu)
- (d) Které jsou dvě nejnižší frekvence, při kterých může v destičce vzniknout stojaté vlnění? (1,2 bodu)

Piezoelektrický efekt je speciální vlastnost křemenných krystalů. Stlačením nebo roztahením krystalu se generuje elektrické napětí napříč krystalem

a naopak vnější napětí přivedené na konce krystalu způsobí roztahení nebo stlačení v závislosti na polaritě napětí. Tudíž se mechanické a elektrické oscilace mohou spojit a vytvořit rezonanci.

Pro výpočet piezoelektrického efektu nechť je povrchová hustota náboje na horní a dolní elektrodě $-\sigma$ a $+\sigma$, když se destička nachází v elektrickém poli intenzity E mířící ve směru osy z . Označme prodloužení a napětí destičky ve směru osy x jako S a T . Pak může být piezoelektrický efekt krystalu popsán následující soustavou rovnic:

$$S = \frac{1}{Y}T + d_p E \quad (5a)$$

$$\sigma = d_p T + \varepsilon_T E \quad (5b)$$

kde $1/Y = 1,27 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$ je převrácená hodnota Youngova modulu pružnosti (*elastic compliance*) v konstantním elektrickém poli a $\varepsilon_T = 4,06 \cdot 10^{-11} \text{ F/m}$ je permitivita při konstantním napětí, zatímco $d_p = 2,25 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}$ je piezoelektrický koeficient.

Nechť je spínač K na obr. 2d uzavřen. Mezi elektrodami vznikne střídavé napětí $V(t) = V_m \cos \omega t$ a generuje ve směru osy z v destičce homogenní elektrické pole $E(t) = V(t)/h$. Když je dosaženo stabilního stavu, objeví se v destičce ve směru osy x podélné stojaté vlnění o úhlové frekvenci ω .

Jestliže elektrické pole je homogenní, vlnová délka λ a frekvence f podélných stojatých vln v destičce souvisí vztahem $\lambda = u/f$ s u daným rovnicí (2). Ale, jak ukazuje rovnice (5a), $T = YS$ neplatí, ačkoliv definice napětí a prodloužení zůstávají nezměněny a konce destičky zůstávají volné a nepůsobí na ně žádný tlak.

- (e) Uvažte rovnice (5a) a (5b). Povrchovou hustotu náboje σ na spodní elektrodě lze vyjádřit funkcí x a t ve tvaru

$$\sigma(x, t) = \left[D_1 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + D_2 \right] \frac{V(t)}{h},$$

kde $k = \omega/u$. Nalezněte vztahy pro D_1 a D_2 . (2,2 bodu)

- (f) Celkový povrchový náboj $Q(t)$ na spodní elektrodě závisí na $V(t)$ takto:

$$Q(t) = \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} - 1 \right) \right] C_0 V(t) \quad (6)$$

Nalezněte výraz pro C_0 a výraz a numerickou hodnotu α^2 . (1,4 bodu)

Řešení

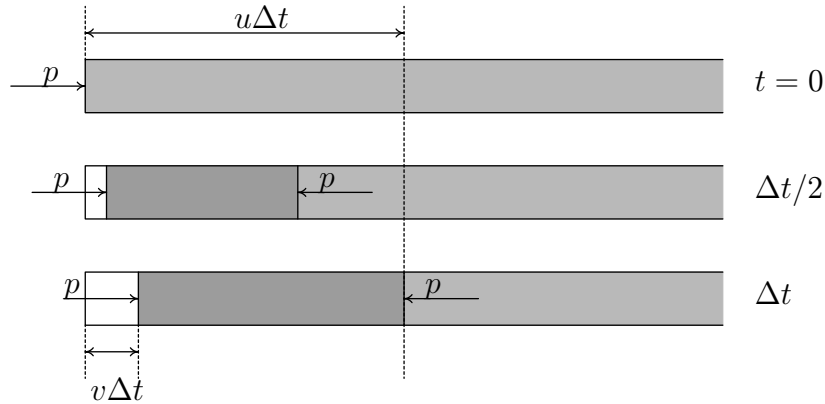
Část A

- (a) Viz obr. A1. Levý konec tyče se posune o vzdálenost $v\Delta t$, zatímco tlaková vlna urazí vzdálenost $u\Delta t$, kde $u = \sqrt{Y/\rho}$. Zkrácení na levém konci je

$$S = \frac{\Delta l}{l} = \frac{-v\Delta t}{u\Delta t} = \frac{-v}{u} \quad (A1a)$$

Z Hookova zákona vychází pro tlak na levém konci

$$p = -YS = Y\frac{v}{u} = \rho uv \quad (A1b)$$



Obr. A1

- (b) Rychlost v a posunutí ξ svazuje stejný vztah jako u jednoduchého harmonického kmitání (nebo rovnoměrného kruhového pohybu, viz obr. A2) o úhlové frekvenci $\omega = ku$. Tudiž, je-li $\xi(x, t) = \xi_0 \sin k(x - ut)$, potom

$$v(x, t) = -ku\xi_0 \cos k(x - ut) \quad (A2)$$

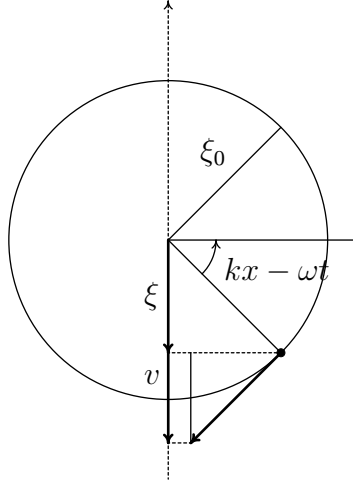
Vztahy mezi relativním zkrácením, tlakem a rychlostí jsou stejné jako v části (a). Tudiž

$$S(x, t) = -v(x, t)/u = k\xi_0 \cos k(x - ut) \quad (A3)$$

$$\begin{aligned}
\rho(x, t) &= \rho u v(x, t) = -k \rho u^2 \xi_0 \cos k(x - ut) \\
&= -Y S(x, t) = -k Y \xi_0 \cos k(x - ut)
\end{aligned} \tag{A4}$$

Príslušné vztahy je možné odvodiť také diferencováním:

$$v(x, t) = \frac{d\xi}{dt}, \quad S(x, t) = \frac{d\xi}{dx}, \quad p(x, t) = -Y \frac{d\xi}{dx}.$$



Obr. A2

Část B

- (c) Protože úhlová frekvence ω a rychlost šíření vlny u jsou dány, pro vlnovou délku platí vztah $\lambda = 2\pi/k$, kde $k = \omega/u$. Změna posunutí ξ je tudíž popsána funkcí

$$g(x) = B_1 \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) + B_2 \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \tag{B1}$$

Protože středy elektrod jsou nehybné, je $g(b/2) = 0$. Z toho plyne $B_2 = 0$. Protože maximum funkce $g(x)$ je rovno 1, dostáváme, že $B = \pm 1$ a

$$g(x) = \pm \sin \frac{\omega}{u} \left(x - \frac{b}{2} \right) \tag{B2}$$

Proto lze posunutí vyjádřit vztahem

$$\xi(x, t) = \pm 2\xi_0 \sin \frac{\omega}{u} \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t \tag{B3}$$

- (d) Protože tlak p (nebo napětí T) musí na koncích destičky vymizet (tj. pro $x = 0$ a $x = b$), řešení této části úlohy lze analogicky dostat z rezonančních frekvencí zvukové vlny v otevřené trubce délky b . Nicméně, je-li dáno, že středy elektrod jsou nehybné, všechny vyšší frekvence základního tónu je nutno vyloučit, protože mají v průřezu v půli destičky spíše kmitny než uzly.

Protože základní tón má vlnovou délku $\lambda = 2b$, základní frekvence je dána vztahem $f_1 = u/(2b)$. Pro rychlost šíření vlny u platí

$$u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = 5,45 \cdot 10^3 \text{ m/s} \quad (B4)$$

a tedy, protože $b = 1,00 \cdot 10^{-2}$ m, dvě nejnižší frekvence, při nichž vznikne stojaté vlnění, jsou

$$f_1 = \frac{u}{2b} = 273 \text{ kHz}, \quad f_3 = 3f_1 = \frac{3u}{2b} = 818 \text{ kHz} \quad (B5)$$

Jiné řešení úloh (c) a (d):

Podélná stojatá vlna v destičce má uzel v bodě $x = b/2$. Můžeme na ni nahlížet jako na dvě vlny pohybující se v opačných směrech. Tudíž jejich posunutí a rychlost musí splňovat výrazy

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= 2\xi_m \sin k \left(x - \frac{b}{2}\right) \cos \omega t \\ &= \xi_m \left[\sin k \left(x - \frac{b}{2} - ut\right) + \sin k \left(x - \frac{b}{2} + ut\right) \right] \end{aligned} \quad (B6)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -ku\xi_m \left[\cos k \left(x - \frac{b}{2} - ut\right) - \cos k \left(x - \frac{b}{2} + ut\right) \right] \\ &= 2\omega\xi_m \sin k \left(x - \frac{b}{2}\right) \sin \omega t \end{aligned} \quad (B7)$$

kde $\omega = ku$ a první a druhý člen v hranatých závorkách reprezentuje vlnu postupující ve směru $+x$ a $-x$. Poznamenejme, že rovnice (B6) je identická s rovnicí (B3), když položíme $\xi_m = \pm\xi_0$.

Pro vlnu postupující ve směru $-x$ musí být v rovnicích (A1a) a (A1b) rychlost v nahrazena $-v$, takže dostáváme

$$S = \frac{-v}{u} \text{ a } p = \rho uv \quad \text{vlna postupující podél } +x \quad (B8)$$

$$S = \frac{v}{u} \text{ a } p = -\rho uv \quad \text{vlna postupující podél } -x \quad (B9)$$

Stejně jako v části (b), zkrácení a tlak lze vyjádřit jako

$$\begin{aligned} S(x, t) &= -k\xi_m \left[-\cos k \left(x - \frac{b}{2} - ut \right) - \cos k \left(x - \frac{b}{2} + ut \right) \right] \\ &= 2k\xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t \end{aligned} \quad B10$$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= -\rho u \omega \xi_m \left[-\cos k \left(x - \frac{b}{2} - ut \right) - \cos k \left(x - \frac{b}{2} + ut \right) \right] \\ &= -2\rho u \omega \xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos \omega t \end{aligned} \quad B11$$

Poznamenejme, že v , S a p lze dostat také diferencováním ξ stejně jako v části (b).

Napětí T nebo tlak p musí být neustále na obou koncích destičky nulový ($x = 0$ a $x = b$), protože jsou volné a nehybné. Z rovnice (B11) je to možné jedině tehdy, je-li $\cos(kb/2) = 0$ neboli

$$kb = \frac{\omega}{u}b = \frac{2\pi f}{\lambda f}b = n\pi, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (B12)$$

Vyjádřeno pomocí vlnové délky λ lze v rovnici (B12) psát

$$\lambda = \frac{2b}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (B13)$$

Pro frekvenci pak platí

$$f = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2b} = \frac{n}{2b} \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (b14)$$

Výsledek je identický s rovnicemi (B4) a (B5).

- (e) Z rovnic (5a) a (5b) v zadání vyplývá, že piezoelektrický efekt vede na rovnice

$$T = Y(S - d_p E) \quad (B15)$$

$$\sigma = Y d_p S + \varepsilon_T \left(1 - Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \right) E \quad (B16)$$

Protože $x = b/2$ musí být uzel jakékoliv podélné stojaté vlny v destičce, posunutí ξ a relativní prodloužení S musí být vyjádřeno formou danou rovnicemi (B6) a (B10), tedy, s přihlédnutím k $\omega = ku$,

$$\xi(x, t) = \xi_m \sin k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \phi) \quad (B17)$$

$$S(x, t) = k\xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \phi) \quad (B18)$$

kde je nyní ve členu závislém na čase zahrnuta fázová konstanta ϕ .

Podle předpokladů je elektrické pole E mezi elektrodami homogenní a závisí pouze na čase:

$$E(x, t) = \frac{V(t)}{h} = \frac{V_m \cos \omega t}{h} \quad (B19)$$

Dosazením rovnic (B18) a (B19) do (B15) dostaneme

$$T = Y \left[k\xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) \cos(\omega t + \phi) - \frac{d_p}{h} V_m \cos \omega t \right] \quad (B20)$$

Napětí T musí být na obou koncích destičky ($x = 0$ a $x = b$) neustále nulové, protože jsou volné a nehybné. To je možné pouze tehdy, je-li $\phi = 0$ a

$$k\xi_m \cos \frac{kb}{2} = d_p \frac{V_m}{h} \quad B21$$

Protože $\phi = 0$, rovnice (B16), (B18) a (B19) implikují, že povrchová hustota náboje musí mít tutéž závislost na čase a lze ji vyjádřit jako

$$\sigma(x, t) = \sigma(x) \cos \omega t \quad (B22)$$

se závislostí na x popsanou rovnicí

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= Y d_p k \xi_m \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T \left(1 - Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \right) \frac{V_m}{h} \\ \sigma(x) &= \left[Y \frac{d_p^2}{\cos \frac{kb}{2}} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T \left(1 - Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \right) \right] \frac{V_m}{h} \end{aligned} \quad (B23)$$

(f) V čase t je celkový povrchový náboj $Q(t)$ na spodní elektrodě integrá-

lem $\sigma(x, t)$ z rovnice (B22) přes povrch elektrody. Výsledek je

$$\begin{aligned}
 \frac{Q(t)}{V(t)} &= \frac{1}{V(t)} \int_0^b \sigma(x, t) w \, dx = \frac{1}{V_m} \int_0^b \sigma(x) w \, dx = \\
 &= \frac{w}{h} \int_0^b \left[Y \frac{d_p^2}{\cos \frac{kb}{2}} \cos k \left(x - \frac{b}{2} \right) + \varepsilon_T \left(1 - Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \right) \right] dx = \\
 &= \left(\varepsilon_T \frac{bw}{h} \right) \left[Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} \right) + \left(1 - Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} \right) \right] = \\
 &= C_0 \left[\alpha^2 \left(\frac{2}{kb} \operatorname{tg} \frac{kb}{2} \right) + (1 - \alpha^2) \right]
 \end{aligned}$$

kde

$$C_0 = \varepsilon_T \frac{bw}{h}, \quad \alpha^2 = Y \frac{d_p^2}{\varepsilon_T} = 9,82 \cdot 10^{-3}$$

Poznámka: Výsledek $C_0 = \varepsilon_T bw/h$ lze také obdržet úvahou „klidové limity“ $k = 0$ v rovnicích (5) v zadání. Protože $\operatorname{tg} x \approx x$, když $x \ll 1$, máme

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{Q(t)}{V(t)} \approx C_0 [\alpha^2 + (1 - \alpha^2)] = C_0$$

Je zřejmé, že konstanta C_0 je kapacita deskového kondenzátoru tvořeného elektrodami (o ploše bw) s křemíkovým krystalem (tloušťky h a permitivitou ε_T) sloužícím jako dielektrikum. Je tudíž nutně dána vzorcem $\varepsilon_T bw/h$.

3. úloha

Část A - Hmotnost neutrína a rozpad neutronu

Volný neutron hmotnosti m_n se rozpadá v klidu v laboratorní vztažné soustavě na tři neinteragující částice: proton, elektron a anti-neutrino. Klidová hmotnost protonu je m_p , klidová hmotnost anti-neutrína se předpokládá nulová, ale mnohem menší než klidová hmotnost elektronu m_e . Označme rychlost světla ve vakuu c . Měřené hodnoty hmotností jsou následující:

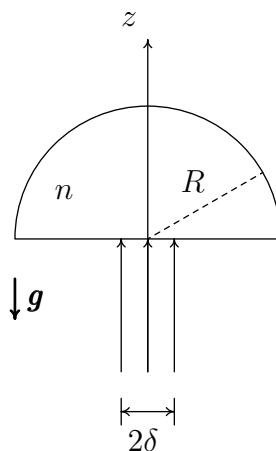
$$m_n = 939,56563 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_p = 938,27231 \text{ MeV}/c^2,$$

$$m_e = 0,5109907 \text{ MeV}/c^2.$$

Všechny energie a rychlosti vztahujeme k laboratorní vztažné soustavě. Nechť E je celková energie elektronu vylétajícího z místa rozpadu.

- (a) Najděte maximální možnou hodnotu E_{max} energie E a rychlost v_m anti-neutrína, když $E = E_{max}$. Obě veličiny vyjádřete pomocí klidových hmotností částic a rychlosti světla. Pokud je dáno, že $m_v < 7,3 \text{ eV}/c^2$, vypočítejte E_{max} a poměr v_m/c na 3 platné číslice. (4,0 bodu)



Obr. 3a

Část B - Levitace světlem

Průhledná skleněná hemisféra o poloměru R a hmotnosti m má index lomu n . Index lomu prostředí vně hemisféry je roven jedné. Rovnoběžné paprsky

monochromatického světla laseru dopadají rovnoměrně a kolmo do středu rovinné plochy, jak je naznačeno na obr. 3a. Tíhové zrychlení $\mathbf{g}$ míří svisle dolů. Poloměr δ kruhového průřezu paprsku laseru je mnohem menší než R . Jak kulová hemisféra, tak laserový paprsek jsou osově symetrické vzhledem k ose z .

Skleněná hemisféra neabsorbuje žádné světlo laseru. Její povrch je pokryt tenkou vrstvou průsvitného materiálu, takže odraz světla je zanedbatelný při vstupu do hemisféry i výstupu z hemisféry. Optická dráha uražená světlem laseru při průchodu neodrážejícím povrchovou vrstvou je také zanedbatelná.

- (b) Zanedbáním členů řádu $(\delta/R)^3$ a vyššího najděte výkon laseru P potřebný k udržení tíhy skleněné hemisféry. (4,0 bodu)

Nápověda: $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, když je θ mnohem menší než 1.

Řešení

Část A

- (a) Nechť $(c^2 E_e, c\mathbf{q}_e)$, $(c^2 E_p, c\mathbf{q}_p)$ a $(c^2 E_v, c\mathbf{q}_v)$ jsou čtyřvektory hybnosti a energie elektronu, protonu a antineutrína v klidové vztažné soustavě spojené s neutronem. Uvažujme, že E_e , E_p , E_v , $\mathbf{q}_e$, $\mathbf{q}_p$, $\mathbf{q}_v$ jsou všechny v jednotkách hmotnosti. Proton a anti-neutrino lze považovat za částice tvořící systém s celkovou klidovou hmotností M_c , celkovou energií $c^2 E_c$ a celkovou hybností $c\mathbf{q}_c$. Tudíž máme

$$E_c = E_p + E_v, \quad \mathbf{q}_c = \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_v, \quad M_c^2 = E_c^2 - q_c^2 \quad (A1)$$

Poznamenejme, že velikost vektoru $\mathbf{q}_c$ značíme q_c a stejná konvence bude platit i pro ostatní vektory.

Protože energie i hybnost se při rozpadu neutronu zachovává, máme

$$E_c + E_e = m_n \quad (A2)$$

$$\mathbf{q}_c = -\mathbf{q}_e \quad (A3)$$

Umocněna na druhou dává poslední rovnice

$$q_c^2 = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad (A4)$$

Z rovnice (A4) a třetí rovnice (A1) dostaneme

$$E_c^2 - M_c^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad (A5)$$

Druhý a třetí člen přesuneme na opačnou stranu rovnice a dále dělíme rovnicí (A2). Dostaneme

$$E_c - E_e = \frac{1}{m_n}(M_c^2 - m_e^2) \quad (A6)$$

Řešením soustavy rovnic (A2) a (A6) dostaneme

$$E_c = \frac{1}{2m_n}(m_n^2 - m_e^2 + M_c^2) \quad (A7)$$

$$E_e = \frac{1}{2m_n}(m_n^2 + m_e^2 - M_c^2) \quad (A8)$$

Užitím rovnice (A8) lze rovnici (A4) přepsat do tvaru

$$q_e = \frac{1}{2m_n} \sqrt{(m_n^2 + m_e^2 - M_c^2)^2 - (2m_n m_e)^2}$$

$$q_e = \frac{1}{2m_n} \sqrt{(m_n + m_e + M_c)(m_n + m_e - M_c)(m_n - m_e + M_c)(m_n - m_e - M_c)} \quad (A9)$$

Rovnice (A8) ukazuje, že maximum E_e koresponduje s minimem M_c^2 . Klidová hmotnost M_c je celkovou energií protonu a anti-neutrino ve vztažné soustavě spojené s jejich hmotným středem, a tedy dosahuje minima

$$M = m_p + m_v \quad (A10)$$

když jsou proton i anti-neutrino v klidu vzhledem k hmotnému středu svého systému. Tudíž z rovnic (A8) a (A10), s přihlédnutím k tomu, že maximální energie elektronu je $E = c^2 E_e$,

$$E_{max} = \frac{c^2}{2m_n} [m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2] \approx 1,29 \text{ MeV} \quad (A11)$$

Když platí (A10), proton a anti-neutrino se pohybují se stejnou rychlostí v_m svého hmotného středu a my máme

$$\frac{v_m}{c} = \left(\frac{q_v}{E_v} \right) \Big|_{E=E_{max}} = \left(\frac{q_p}{E_p} \right) \Big|_{E=E_{max}} = \left(\frac{q_c}{E_c} \right) \Big|_{E=E_{max}} =$$

$$\frac{v_m}{c} = \left(\frac{q_e}{E_c} \right) \Big|_{M_c=m_p+m_v} \quad (A12)$$

kde poslední rovnost vyplývá z rovnice (A3). Užitím (A7) a (A9) lze poslední člen v rovnici (A12) použít k výpočtu rychlosti anti-neutrino, když $E = E_{max}$. Odtud máme ($M = m_p + m_v$)

$$\frac{v_m}{c} = \frac{\sqrt{(m_n + m_e + M)(m_n + m_e - M)(m_n - m_e + M)(m_n - m_e - M)}}{m_n^2 - m_e^2 + M^2}$$

$$\frac{v_m}{c} \approx 0,00127 \quad (A13)$$

Jiný způsob řešení:

Předpokládejme, že v klidové soustavě spojené s neutronem elektron vylétá ven s hybností $c\mathbf{q}_e$ a energií c^2E_e , proton s $c\mathbf{q}_p$ a c^2E_p a anti-neutrino s $c\mathbf{q}_v$ a c^2E_v . Označíme-li velikost vektoru $\mathbf{q}_\alpha$ jako q_α , dostaneme

$$E_p^2 = m_p^2 + q_p^2, \quad E_v^2 = m_v^2 + q_v^2, \quad E_e^2 = m_e^2 + q_e^2 \quad (1A)$$

Zákony zachování hybnosti a energie při rozpadu neutronu vedou ke vztahům

$$E_p + E_v = m_n - E - e \quad (2A)$$

$$\mathbf{q}_p + \mathbf{q}_v = -\mathbf{q}_e \quad (3A)$$

Umocněním na druhou, poslední dvě rovnice vedou na

$$E_p^2 + E_v^2 + 2E_pE_v = (m_n - E_e)^2 \quad (4A)$$

$$q_p^2 + q_v^2 + 2\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{q}_v = q_e^2 = E_e^2 - m_e^2 \quad (5A)$$

Odečtením rovnice (5A) od (4A) a užitím (1A) dostaneme

$$m_p^2 + m_v^2 + 2(E_pE_v - \mathbf{q}_p \cdot \mathbf{q}_v) = m_n^2 + m_e^2 - 2m_nE_e \quad (6A)$$

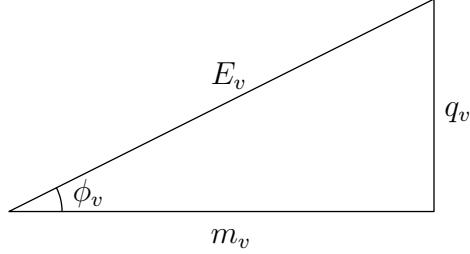
nebo (v ekvivalentním tvaru)

$$2m_nE_e = m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_v^2 - 2(E_pE_v - \mathbf{q}_p \cdot \mathbf{q}_v) \quad (7A)$$

Jestliže θ je úhel mezi vektory $\mathbf{q}_p$ a $\mathbf{q}_v$, máme $\mathbf{q}_p \cdot \mathbf{q}_v = q_pq_v \cos \theta \leq q_pq_v$, takže rovnice (7A) vede na vztah

$$2m_nE_e \leq m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_v^2 - 2(E_pE_v - q_pq_v) \quad (8A)$$

Poznamenejme, že rovnost v (8A) platí pouze tehdy, je-li $\theta = 0$, tj. energie elektronu nabývá své maximální hodnoty právě tehdy, když se anti-neutrino a elektron pohybují stejným směrem.



Nechť jsou rychlosti protonu a anti-neutrina v klidové soustavě neutronu $c\beta_p$ a $c\beta_v$. Pak máme $q_p = \beta_p E_p$ a $q_v = \beta_v E_v$. Jak je naznačeno na obr. A1, zavedeme úhel ϕ_v ($0 \leq \phi_v \leq \pi/2$) pro antineutrino takto:

$$q_v = m_v \operatorname{tg} \phi_v, \quad E_v = \sqrt{m_v^2 + q_v^2} = m_v \sec \phi_v, \quad \beta_v = \frac{q_v}{E_v} = \sin \phi_v \quad (9A)$$

Obdobně pro proton píšeme

$$q_p = m_p \operatorname{tg} \phi_p, \quad E_p = \sqrt{m_p^2 + q_p^2} = m_p \sec \phi_p, \quad \beta_p = \frac{q_p}{E_p} = \sin \phi_p \quad (9A)$$

Rovnici (8A) pak lze vyjádřit ve tvaru

$$2m_n E_e \leq m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - m_v^2 - 2m_p m_v \frac{1 - \sin \phi_p \sin \phi_v}{\cos \phi_p \cos \phi_v} \quad (11A)$$

Faktor na konci poslední rovnice lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin \phi_p \sin \phi_v}{\cos \phi_p \cos \phi_v} &= \frac{1 - \sin \phi_p \sin \phi_v - \cos \phi_p \cos \phi_v}{\cos \phi_p \cos \phi_v} + 1 = \\ &= \frac{1 - \cos(\phi_p - \phi_v)}{\cos \phi_p \cos \phi_v} + 1 \geq 1 \end{aligned} \quad (12A)$$

a snadno nahlédneme, že nabývá své minimální hodnoty 1, když $\phi_p = \phi_v$, tj. když se anti-neutrino a proton pohybují se stejnou rychlostí, tj. $\beta_v = \beta_p$. Z rovnice (11A) pak vyplývá, že maximální hodnota E_e je

$$(E_e)_{\max} = \frac{1}{2m_n} [m_n^2 + m_e^2 - (m_p + m_v)^2] \quad (13A)$$

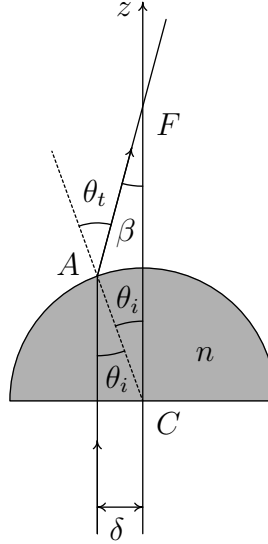
a maximální energie elektronu $E = c^2 E_e$ je

$$E_{max} = c^2 (E_e)_{max} \approx 1,29 \text{ MeV} \quad (14A)$$

Když se anti-neutrino a elektron pohybují se stejnou rychlostí, máme z rovnic (9A), (10A), (2A), (3A) a (1A) výsledek

$$\beta_v = \beta_p = \frac{q_p}{E_p} = \frac{q_v}{E_v} = \frac{q_p + q_v}{E_p + E_v} = \frac{q_e}{m_n - E_e} = \frac{\sqrt{E_e^2 - m_e^2}}{m_n - E_e} \quad (15A)$$

Uvědomme si, že $v_m/c = (\beta_v)_{max} E_e$. Dosazením z rovnice (13A) do posledního vztahu dostaneme po úpravách shodný výsledek jako prve, tj. $v_m/c \approx 0,00127$.



Obr. B1

Část B

- (b) Viz obr. B1. Lom světla na sférickém povrchu se řídí Snellovým zákonem

$$n \sin \theta_i = \sin \theta_t \quad (B1)$$

Zanedbáním členů řádu $(\delta/R)^3$ nebo vyššího v rozvoji funkce sinus dává rovnice (B1)

$$n\theta_i \approx \theta_t \quad (B2)$$

Pro trojúhelník $\triangle FAC$ na obr. B1 máme

$$\beta = \theta_t - \theta_i \approx (n-)\theta_i \quad (B3)$$

Nechť f_0 je frekvence dopadajícího světla. Jestliže n_p je počet fotonů dopadajících na rovinný povrch na jednotku plochy za jednotku času, celkový počet fotonů dopadajících na rovinný povrch za jednotku času je $n_p \pi \delta^2$. Celkový výkon P fotonů dopadajících na povrch je $(n_p \pi \delta^2)(h f_0)$, kde h je Planckova konstanta. Tudíž

$$n_p = \frac{P}{\pi \delta^2 h f_0} \quad (B4)$$

Počet fotonů dopadající na kruhový disk vnitřního poloměru r a vnějšího $r + dr$ na rovinném povrchu za jednotku času je $n_p(2\pi r dr)$, kde $r = R \tan \theta_i \approx R \theta_i$. Proto

$$n_p(2\pi r dr) \approx n_p(2\pi R^2) \theta_i d\theta_i \quad (B5)$$

Změna složky hybnosti ve směru osy z příslušná těmto fotonům, když se lámou na kulovém povrchu, je

$$\begin{aligned} dF_z &= n_p \frac{h f_0}{c} (2\pi r dr) \cos \beta \approx n_p \frac{h f_0}{c} (2\pi R^2) \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) \theta_i d\theta_i \approx \\ &\approx n_p \frac{h f_0}{c} (2\pi R^2) \left[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_i^3\right] d\theta_i \end{aligned} \quad (B6)$$

a tedy z -složka změny hybnosti příslušná těmto fotonům je

$$\begin{aligned} F_z &= 2\pi R^2 n_p \left(\frac{h f_0}{c}\right) \int_0^{\theta_{im}} \left[\theta_i - \frac{(n-1)^2}{2} \theta_i^3\right] d\theta_i = \\ &= \pi R^2 n_p \left(\frac{h f_0}{c}\right) \theta_{im}^2 \left[1 - \frac{(n-1)^2}{4} \theta_{im}^2\right] \end{aligned} \quad (B7)$$

kde $\tan \theta_{im} = \frac{\delta}{R} \approx \theta_{im}$. Tudíž, s přihlédnutím k (B5), máme

$$F_z = \frac{\pi R^2 P}{\pi \delta^2 h f_0} \frac{h f_0}{c} \frac{\delta^2}{R^2} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4 R^2}\right] = \frac{P}{c} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4 R^2}\right] \quad (B8)$$

Síla způsobující optickou levitaci je rovna součtu z -složek sil vyvolaných dopadem a lomem světla na skleněné hemisféře a tudíž

$$\frac{P}{c} + (-F_z) = \frac{P}{c} - \frac{P}{c} \left[1 - \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \right] = \frac{(n-1)^2 \delta^2}{4R^2} \frac{P}{c} \quad (B9)$$

Když dáme do rovnosti tíhu mg skleněné hemisféry a poslední výsledek, dostaneme minimální výkon laseru potřebný k levitaci hemisféry

$$P = \frac{4mgcR^2}{(n-1)^2 \delta^2} \quad (B10)$$