

Úlohy z 32. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 2000 Britain

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

A Bungee Jumper

- (a) Skokan poprvé zastaví, když se ztracená gravitační potenciální energie bude rovnat získané energii pružnosti lana

$$mgy = \frac{1}{2}k(y - L)^2, \quad (0, 1)$$

$$ky^2 - 2y(kL + mg) + kL^2 = 0, \quad (0, 1)$$

což je kvadratická rovnice. Jejími řešeními jsou

$$y_{1,2} = \frac{2(kL + mg) \pm \sqrt{4(kL + mg)^2 - 4k^2L^2}}{2k}$$

$$y_{1,2} = \frac{kL + mg \pm \sqrt{2mgkL + m^2g^2}}{k}, \quad (0, 2)$$

Vyhovuje kladný kořen a nižší klidová poloha. $(0, 1)$

- (b) Maximální rychlosti je dosaženo ve chvíli, kdy je zrychlení nulové a síly jsou vyrovnány, tj. pokud $mg = kx$. $(0, 1)$

Tudíž platí: kinetická energie = ztracená potenciální energie - energie pružnosti elastického lana $(0, 1)$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(L + x) - \frac{1}{2}kx^2, \quad (0, 1)$$

Protože je

$$x = \frac{mg}{k}$$

$$v^2 = 2g\left(L + \frac{mg}{k}\right) - \frac{mg^2}{k},$$

$$v = \sqrt{2gL + \frac{mg^2}{k}}, \quad (0, 2)$$

- (c) Čas do zastavení = doba trvání volného pádu + čas do doby, kdy se lano přestane napínat $(0, 1)$

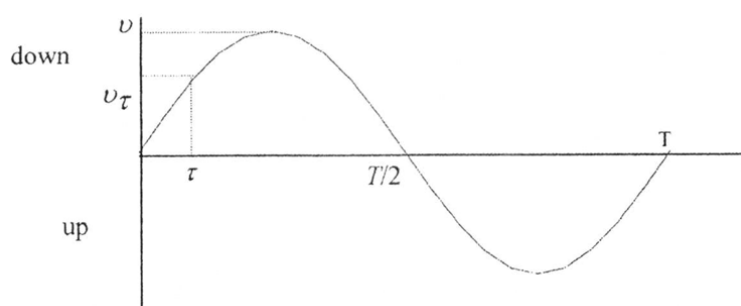
$$\text{Délka volného pádu} = L = \frac{1}{2}gt_f^2$$

$$\text{Tudíž } t_f = \sqrt{\frac{2L}{g}}, \quad (0, 2)$$

Skokan vstupuje do kmitavého pohybu s počáteční rychlostí získanou volným pádem $= gt_1 = \sqrt{2gL} = v_\tau$. $(0, 1)$

$$\text{Perioda kmitů} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = T, \quad (0, 1)$$

Celý cyklus kmitání můžeme znázornit grafem.



Skokan začíná kmitat v čase τ daném jako

$$\tau = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{v_\tau}{v} = \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{v}, \quad (0, 2)$$

Skokan se zastaví po jedné polovině kmitu v celkovém čase

$$= t_f + (T/2 - \tau), \quad (0, 1)$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \\ &= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left\{ \pi - \sin^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \right\} \end{aligned}$$

To je totéž jako

$$= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \left\{ \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt{2gL + mg^2/k}} \right\}$$

nebo jako

$$= \sqrt{\frac{2L}{g}} + \sqrt{\frac{m}{k}} \tan^{-1} \left\{ -\sqrt{\frac{2kL}{mg}} \right\}, \quad (0,2)$$

B Tepelný stroj

Pokud počítáme maximální dosažitelnou práci, předpokládáme nulové ztráty (tření apod.) v pracujícím motoru.

$$\Delta Q_1 = \text{energie z tělesa A} = -ms\Delta T_1, \quad (\Delta T_1 - ve)$$

$$\Delta Q_2 = ms\Delta T_2, \quad (\Delta T_2 + ve)$$

- (a) Pro maximální zisk mechanické energie můžeme předpokládat Carnotův motor, pro který platí

$$\frac{\Delta Q_1}{T_1} = \frac{\Delta Q_2}{T_2}$$

během celé operace (druhý termodynamický zákon).

$$\text{Platí: } \Delta Q_1 = -ms\Delta T_1 \quad \text{a} \quad \Delta Q_2 = ms\Delta T_2 \quad (0,2)$$

$$-ms \int_{T_A}^{T_0} \frac{dT_1}{T_1} = ms \int_{T_B}^{T_0} \frac{dT_2}{T_2} \quad (0,2)$$

$$\ln \frac{T_A}{T_0} = \ln \frac{T_0}{T_B} \quad (0,1)$$

$$T_0^2 = T_A T_B \quad (0,1)$$

$$T_0 = \sqrt{T_A T_B} \quad (0,2)$$

- (b) Platí:

$$Q_1 = -ms \int_{T_A}^{T_0} dT_1 = ms(T_A - T_0)$$

$$Q_2 = ms \int_{T_B}^{T_0} dT_2 = ms(T_0 - T_B) \quad (0,2)$$

$$W = Q_1 - Q_2 \quad (0,1)$$

$$W = ms(T_0 - T_0 - T_0 + T_B) = ms(T_A + T_B - 2\sqrt{T_A T_B})$$

$$W = ms(\sqrt{T_A} - \sqrt{T_B})^2 \quad (0,2)$$

(c) Numerický příklad: hmotnost = objem $\times$ hustota

$$W = 2,50 \times 1,00 \times 10^3 \times 4,19 \times (350 + 300 - 2\sqrt{350 \times 300}) \text{ J}$$

$$W = 20 \text{ MJ} \quad (0,5)$$

C Radioaktivita a stáří Země

(a) Označme N_0 původní počet atomů uranu. Pak podle zákona radioaktivního rozpadu platí pro jejich počet N po uplynutí času t

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (0,1)$$

a pro počet n atomů olova vzniklých radioaktivním rozpadem platí

$$n = N_0(1 - e^{-\lambda t}), \quad (0,1)$$

Tudíž

$$n = N e^{\lambda t}(1 - e^{-\lambda t}) = N(e^{\lambda t} - 1), \quad (0,1)$$

Tento vztah lze vyjádřit také jako

$$n = N(2^{t/\tau} - 1),$$

kde τ je poločas rozpadu, nebo pomocí $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,6931}{T}$, tedy jako

$$n = N(e^{0,6931t/\tau} - 1), \quad (0,1)$$

Pro příslušné izotopy tedy platí:

$${}^{206}_{\text{n}} = {}^{238}_{\text{N}}(2^{t/4,50} - 1) \quad \text{nebo} \quad {}^{206}_{\text{n}} = {}^{238}_{\text{N}}(e^{0,1540t} - 1), \quad (0,1)$$

kde t je čas vyjádřený v násobcích 10^9 let.

$$(b) \quad {}^{207}_{\text{n}} = {}^{235}_{\text{N}}(2^{t/0,710} - 1) \quad \text{nebo} \quad {}^{207}_{\text{n}} = {}^{235}_{\text{N}}(e^{0,9762t} - 1), \quad (0,1)$$

- (c) Ve smíšeném uranu (tj. obsahujícím Pb jak přírodního, tak radioaktivního původu) mají izotopy olova poměry:

$$204 : 206 : 207 \text{ odpovídá } 1,00 : 29,6 : 22,6$$

V čistém olovu (bez radioaktivity) $1,00 : 17,9 : 15,5$.

Odtud vyplývá, že olovo vytvořené radioaktivním rozpadem uranu je v poměru

$$206 : 207 = 11,7 : 7,1$$

Vydělením rovnic z částí (a) a (b) dostaneme:

$$\frac{{}^{206}\text{n}}{{}^{207}\text{n}} = \frac{{}^{238}\text{N}}{{}^{235}\text{N}} \left\{ \frac{2^{t/4,50} - 1}{2^{t/0,710} - 1} \right\}$$

popřípadě

$$\frac{{}^{206}\text{n}}{{}^{207}\text{n}} = \frac{{}^{238}\text{N}}{{}^{235}\text{N}} \left\{ \frac{e^{0,1540t} - 1}{e^{0,9762t} - 1} \right\}, \quad (0,1)$$

Dosazením dostaneme

$$\frac{11,7}{7,1} = 137 \left\{ \frac{2^{T/4,50} - 1}{2^{T/0,710} - 1} \right\}$$

popřípadě

$$\frac{11,7}{7,1} = 137 \left\{ \frac{e^{0,1540T} - 1}{e^{0,9762T} - 1} \right\}, \quad (0,1)$$

Odtud

$$0,0120 \{ 2^{T/0,710} - 1 \} = \{ 2^{T/4,50} - 1 \}$$

nebo

$$0,0120 \{ e^{0,9762T} - 1 \} = \{ 2^{0,1540T} - 1 \} \quad (0,1)$$

- (d) Pokud předpokládáme, že $T \gg 4,50 \times 10^9$ a zanedbáme jedničku v obou závorkách (0,2 bodu), dostaneme po úpravách:

$$T = -\frac{\log 0,0120}{\log 2 \times 1,1862} 10^9 = 5,38 \cdot 10^9$$

popřípadě

$$T = -\frac{\ln 0,0120}{-0,8222} 10^9 = 5,38 \cdot 10^9 \quad (0,2)$$

- (e) Můžeme použít numerické metody. Protože aproximovaná hodnota je dostatečně větší než $0,710 \cdot 10^9$ roků, můžeme jedničku na pravé straně zanedbat, zatímco na pravé straně ji ponecháme. Dosazením aproximované hodnoty $T = 5,38 \cdot 10^9$ let na pravou stranu rovnice dostaneme nový výraz, z něhož určíme novou aproximovanou hodnotu bližší skutečnosti. Pokud podobnou operaci provedeme třikrát, dostaneme se k hodnotě $T = 4,52 \cdot 10^9$ let, což již splňuje podmínku uvedenou v zadání.

D Nabitá koule

- (a) Hustota náboje uvnitř koule je $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ (0,2)

Pro $x \leq R$ platí podle Gaussovy věty pro intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti x od středu koule:

$$E = \frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 x^2} = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (0,3)$$

Pro $x > R$ platí pro intenzitu pole ve vzdálenosti x od středu koule:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \quad (0,2)$$

- (b) **Metoda 1**

Pro hustotu elektrické energie pole v daném bodě platí vztah

$$\frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (0,1)$$

Nechť $x \leq R$. Energie v tenké slupce tloušťky dx o poloměru x je dána jako

$$dE_{in} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi x^2 dx = \frac{1}{2}4\pi\epsilon_0 \frac{Q^2 x^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 R^6} x^2 dx, \quad (0,1)$$

Celková elektrická energie uvnitř koule je tedy dána jako

$$E_{in} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0) R^6} \int_0^R x^4 dx = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (0,2)$$

Nechť $x > R$. Energie v tenké slupce tloušťky dx o poloměru x je dána jako

$$dE_{out} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 4\pi x^2 dx = \frac{1}{2}4\pi\epsilon_0 \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 x^4} x^2 dx, \quad (0,1)$$

Celková elektrická energie vně koule je tedy dána jako

$$E_{out} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)} \int_R^\infty \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (0,2)$$

Celková energie spojená s rozložením náboje je tedy

$$E_{electric} = \frac{1}{40} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} + \frac{1}{8} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (0,1)$$

Metoda 2

Tenká slupka s nábojem $4\pi x^2 dx \rho$ se pohybuje od nekonečna až k povrchu koule poloměru x , kde je elektrický potenciál $(0,1)$

$$\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{x^2 \rho}{3\epsilon_0} \quad (0,2)$$

a má tudíž elektrickou potenciální energii

$$\left(\frac{x^2 \rho}{3\epsilon_0 x} \right) (4\pi x^2 \rho) dx \quad (0,1)$$

Celková energie celé koule je tudíž

$$E_{electric} = \int_0^R \frac{4\pi \rho^2 x^4}{3\epsilon_0} dx = \frac{4}{15} \frac{\pi \rho^2 R^5}{\epsilon_0} \quad (0,2)$$

Užitím vztahu $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$ dostaneme

$$E_{electric} = \frac{4}{15} \pi \left(\frac{9Q^2}{16\pi^2 R^6} \right) \frac{R^5}{\epsilon_0} = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \quad (0,2)$$

E Elektromagnetická indukce

Metoda 1: Porovnání energií

Horizontální složka indukce magnetického pole B indukuje elektromotorické napětí (dále EMN) v kroužku. Platí $B = 44,5 \times 10^{-6} \cos 64^\circ$ (0,2 bodu). Magnetický indukční tok skrz kroužek pootočený o úhel θ je $\phi = B\pi a^2 \sin \theta$, kde a je poloměr kroužku. (0,1 bodu) Pak platí:

$$\text{Indukované EMN} = \frac{d\phi}{dt} = B\pi a^2 \frac{d \sin \omega t}{dt}$$

kde ω je okamžitá úhlová rychlost kroužku. Derivací

$$\text{Indukované EMN} = B\pi a^2 \omega \cos \omega t = B\pi a^2 \omega \cos \theta \quad (0,1)$$

Efektivní elektromotorické napětí během jedné otáčky je

$$\frac{B\pi a^2 \omega}{\sqrt{2}} \quad (0,2)$$

Průměrné zahřátí kroužku díky odporu je $\frac{B^2 \pi^2 a^2 \omega^2}{2R}$ (0,1 bodu), moment setrvačnosti je $\frac{1}{2}ma^2$ (0,1 bodu) a rotační energie tudíž je $\frac{1}{4}ma^2\omega^2$ (0,1 bodu) kde m je hmotnost kroužku.

Působící síla způsobí změnu úhlové rychlosti ω

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{4}ma^2\omega^2 \right\} = \frac{1}{4}ma^2 2\omega \frac{d\omega}{dt}$$

Porovnáním dostaneme:

$$\frac{1}{4}ma^2 2\omega \frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2 \pi^2 a^2 \omega^2}{2R} \quad (0,1)$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} dt \quad (0,1)$$

Pokud označíme T dobu, za kterou se sníží úhlová rychlost na polovinu, pak můžeme psát

$$\int_{\omega}^{\omega/2} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^T \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} dt \quad (0,1)$$

$$\ln 2 = \frac{B^2 \pi^2 a^2}{mR} T \quad (0,2)$$

Poněvadž $R = \frac{2\pi a \rho}{A}$, kde A je obsah průřezu drátu smyčky (0,1 bodu) a platí $m = 2\pi a d A$, kde d je hustota drátu (0,1 bodu), dosazením dostaneme:

$$\ln 2 = \frac{B^2 T}{4\rho d} \quad (0,1)$$

$$T = \frac{4\rho d \ln 2}{B^2}$$

Číselně: $T = 12$ dní 18 hodin (0,2 bodu)

Metoda 2: Protipůsobící moment síly

Horizontální složka magnetického pole $B = 44,5 \times 10^{-6} \cos 64^\circ$ (0,2 bodu)

Průřez drátu prstence je A , poloměr prstence a , hustota d a měrná rezistivita ρ . Dále označme ω okamžitou úhlovou rychlost (kladný směr ve směru hodinových ručiček).

Odpor prstence je $R = \rho \frac{2\pi a}{A}$ (0,1 bodu), hmotnost prstence $m = 2\pi a A d$ (0,1 bodu), moment setrvačnosti $M = \frac{1}{2} m a^2$ (0,1 bodu), magnetický indukční tok prstencem pod úhlem θ je $\phi = B\pi a^2 \sin \theta$ (0,1 bodu), indukované elektromotorické napětí $EMN = \frac{d\phi}{dt} = B\pi a^2 \frac{d \sin \omega t}{dt} = B\pi a^2 \cos \omega t = B\pi a^2 \cos \theta$ (0,1 bodu) a indukovaný proud $I = B\pi a^2 \cos \theta / R$.

Moment síly působící proti pohybu je

$$BIS' = (B\pi a^2 \cos \theta)I = \frac{1}{R}(B\pi a^2)^2 \omega \cos^2 \theta \quad (0,1)$$

Práce vykonaná při malém pootočení $\delta\theta$ je

$$\frac{1}{R}(B\pi a^2)^2 \omega \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)\delta\theta \quad (0,1)$$

kde jsme užili rovnosti $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$. Definujme *průměrný moment síly* jako práci vykonanou za jednu otočku (o úhel 2π) dělený úhlem otočky 2π ¹.

¹Smysl definice je, že průměrný moment síly za jednu otočku vykoná stejnou práci jako proměnný moment síly.

Protože integrál $\int_0^{2\pi} (\cos 2\theta + 1) d\theta = 2\pi$, je průměrný moment síly určen jako

$$\frac{1}{2R}(B\pi a^2)^2\omega \quad (0,1)$$

Tento průměrný moment síly působí stejné zpomalování jako proměnný moment síly, pokud je doba zpomalování mnohem větší než doba jedné otáčky (a lze ji tedy vyjádřit jako celistvý násobek otáček). Proto

$$M \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2R}(B\pi a^2)^2\omega \quad (0,2)$$

kde znaménko minus znamená působení proti směru pohybu, obdržíme po dosazení za R , M a dalších úpravách rovnici

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2}{4\rho d}\omega \quad (0,2)$$

Dále

$$\int_{\omega}^{\omega/2} \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^T \frac{B^2}{4\rho d} dt \quad (0,2)$$

$$\ln 2 = \frac{B^2 T}{4\rho d} \quad (0,2)$$

$$T = \frac{4\rho d \ln 2}{B^2}$$

Číselně: $T = 12$ dní 18 hodin (0,2 bodu)

2. úloha

- (a) Zaostření nastane pro jeden „cyklotronový“ oběh elektronu. Úhlová rychlost

$$\omega = \frac{Be}{m},$$

takže doba jednoho oběhu je

$$T = 2\pi \frac{m}{eB}.$$

Rychlost elektronu je

$$u = \sqrt{2eV/m},$$

uražená vzdálenost je

$$D = Tu \cos \beta \approx Tu = (2^{3/2}\pi/B)(Vm/e)^{1/2}.$$

Odtud vyplývá, že poměr

$$\frac{e}{m} = 8V \left(\frac{\pi}{BD} \right)^2.$$

- (b) Uvažujme podmínku (ii) - Síla způsobená elektrickým polem působí vzhůru.

V oblasti A síla magnetického pole působí také vzhůru, elektron narazí na horní desku a nedosáhne filmu.

V oblasti B síla magnetického pole působí dolů a pokud jsou síly vyrovnány, není zde nevyvážené síly a elektron vyletí z desek a exponuje film.

Obrázek byl vzat z oblasti B.

- (c) Požadujeme vyrovnanost sil. Elektrická síla je dána jako eV/t , velikost magnetické síly je dána jako $euB \sin \phi$, kde u je rychlost elektronu.

Pro podmínku vyrovnaní sil musí platit: $u = V/tB|\sin \phi|$. Maximální rychlost u odpovídá minimálnímu $\phi = 23^\circ$. Číselně pak vychází

$$u = 0,896c.$$

Relativistický koeficient $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2} = 2,255$. Odtud vypočteme kinetickou energii elektronu

$$E_k = (\gamma - 1)mc^2 = 641 \text{ keV}.$$

- (d) Poté, co elektrony vyletí z prostoru desek, působí na ně pouze síla magnetického pole. Approximujeme ji vertikální silou, protože úhel elektronu vzhledem k vodorovné přímce zůstává malý.

Zrychlení způsobené touto silou je

$$a = \frac{Beu \sin \phi}{\gamma m}.$$

Počáteční vodorovná složka rychlosti je u , proto čas potřebný na dosáhnutí filmu po výletu z prostoru desek je $t = s/u$. Vertikální posunutí za tento čas je

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{2} a \left(\frac{s}{u} \right)^2.$$

Odtud

$$y = \frac{Bes^2 \sin \phi}{\gamma mu}$$

Z části (c), pro elektron vylétající z desek, také známe

$$u = V/tB |\sin \phi|$$

Tak eliminujeme u a obdržíme:

$$y^2 = \left(\frac{eBs \sin \phi}{m} \right)^2 \left\{ \left(\frac{Bst \sin \phi}{V} \right)^2 - \left(\frac{s}{c} \right)^2 \right\}$$

a proto kreslíme na svislou osu $(y/Bs \sin \phi)^2$ a na vodorovnou osu $(Bst \sin \phi/V)^2$. Odtud dostaneme po těchto substitucích graf přímky se směrnici $(e/m)^2$ a na vertikální ose úsek $-(es/mc)^2$.

Tento úsek odečteme jako $-537,7 \text{ (C s / kg)}^2$ a dostáváme $e/m = 1,70 \cdot 10^{11} \text{ C / kg}$. Směrnici odečteme jako $2,826 \cdot 10^{27} \text{ (C/kg)}^2$ a dostaneme tak $e/m = 1,68 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$.

3. úloha

Část A

- (a) Podle zadání platí v čase $t = 0$

$$\Delta x_t = a \cos \phi.$$

Předpokládáme, že čas $t = 50s$ je celistvým násobkem periody (to logicky plyne ze zadání). Pak platí

$$0,8\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi) = ae^{-\mu t} \cos \phi.$$

Dělením obou vztahů a dosazením dostaneme

$$0,8 = e^{-50\mu}$$

a odtud $\mu = 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

- (b) Ze zadaných hodnot vypočteme

$$v = (E/\rho)^{1/2} = 5100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Základní vlnová délka tyče je (uvažte analogii s kmitajícím lanem, které má jeden volný konec)

$$\lambda_{rod} = 4l = 4 \text{ m}.$$

Základní frekvence pak je $f = v/\lambda = 1,3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$ a příslušná úhlová frekvence je $\omega = 2\pi v/\lambda = 8,1 \cdot 10^3 \text{ rad s}^{-1}$.

- (c) Označme $\delta f = 0,005 \text{ Hz}$ „bicí“ frekvenci tyčí (rozdíl frekvencí kmitání tyčí). Označme l_1, l_2 a λ_1, λ_2 délky tyčí a příslušné vlnové délky, platí analogicky jako v případě b)

$$\lambda_1 = 4l_1, \quad \lambda_2 = 4l_2.$$

Označme ještě f_1, f_2 frekvence kmitů obou tyčí. Ze vztahů

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1}, \quad f_2 = \frac{v}{\lambda_2}$$

odvodíme vztah

$$\delta f = f_2 - f_1 = v \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = v \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}$$

a uvažíme-li, že $\lambda_1 - \lambda_2 = -\delta\lambda_{rod}$ a $\lambda_1 \approx \lambda_2 \approx \lambda_{rod}$ (neboť rozdíl vlnových délek je nepatrný, takže součin lze aproximovat hodnotou λ_{rod}^2 spočtenou v části b), dostaneme

$$\delta f = -\frac{v}{\lambda^2} \delta\lambda_{rod}$$

a s použitím vztahu

$$f = \frac{v}{\lambda_{rod}}$$

dostaneme

$$\frac{\delta\lambda_{rod}}{\lambda_{rod}} = -\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta l}{l}$$

a odtud

$$|\delta l| = l \frac{\delta f}{f}.$$

Číselně vychází $\delta l = 3,8 \cdot 10^{-6}$ m.

- (d) Změna v gravitační síle působící na tyč ve vzdálenosti x od volného konce je $m\Delta g$. Jest $m = \rho x A$, kde A je obsah průřezu tyče. Změna tlaku je $m\Delta g/A = \rho x \Delta g$, změna napětí je rovna změně relativního prodloužení

$$\delta(dx)/dx = \frac{\rho x \Delta g}{E}.$$

Odtud dostaneme

$$\delta(dx) = \frac{\rho x \Delta g}{E} dx$$

a integrací dostáváme

$$\int_0^{\Delta l} \delta(dx) = \int_0^l \frac{\rho x \Delta g}{E} dx$$

$$\Delta l = \frac{\rho \Delta g}{E} l^2$$

- (e) Platí: $\lambda_{rod} = 4l$, odtud $\Delta l = \Delta\lambda_{rod}/4$. Je také $\Delta l = \frac{\rho \Delta g}{E} l^2$. Odtud lze vyjádřit l a vypočteme $l = 9,2 \cdot 10^7$ m.

Část B

- (a) Z rovnosti vztahů

$$mc^2 = hf,$$

lze přiřadit fotonu (jako částici) hmotnost

$$m = hf/c^2.$$

Na povrchu Slunce má foton energii $hf - \frac{GMm}{R}$, v nekonečnu energii hf' . Ze zákona zachování energie plyne

$$hf' = hf - \frac{GMm}{R} = hf - \frac{GM}{R} \frac{hf}{c^2}$$

a odtud

$$f' = f \left(1 - \frac{GM}{Rc^2} \right).$$

- (b) Označíme-li $\gamma = 1 - GM/Rc^2$, pak platí $f' = \gamma f$. Rychlost měřenou daleko od slunce je možné vyjádřit vztahem $c = f\lambda$. Rychlost měřenou blízko slunce lze podobně vyjádřit $c' = f'\lambda'$, přičemž při počítání λ' musíme uvážit „kontrakci délky“ (jak je napovězeno v zadání), tj. $\lambda' = \gamma\lambda$. Proto vychází, že

$$c' = f'\lambda' = \gamma^2 f\lambda = \gamma^2 c.$$

Odtud dostaneme

$$n_r = \frac{c}{c'} = \frac{c}{c(1 - GM/Rc^2)^2}.$$

Užijeme-li aproximace $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ pro $x \ll 1$, dostaneme

$$n_r = 1 + \frac{2GM}{rc^2}$$

Odtud vyplývá, že $a = 2$.

- (c) Podle Snellova zákona lomu:

$$n(r + \delta r) \sin \theta = n(r) \sin(\theta - \delta \xi).$$

Dívejme se na efektivní index lomu (značme ho úsporně n) jako na funkci proměnné r , tj. píšeme $n(r)$. Nyní užijeme na levé straně faktu, že malý přírůstek funkce lze nahradit diferenciálem, který lze pro funkce jedné proměnné vyjádřit jako

$$dx = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{df(x)}{dx},^2$$

tedy

$$n(r + \delta r) \approx n(r) + \frac{dn(r)}{dr} \delta r = n(r) + \frac{dn}{dr} \delta r.$$

Na pravé straně oproti tomu rozepíšeme $\sin(\theta - \delta\xi)$ pomocí známého vzorce

$$\sin(\theta - \delta\xi) = \sin \theta \cos \delta\xi - \cos \theta \sin \delta\xi.$$

Uvědomme si, že $\delta\xi$ je velmi malý úhel, takže lze aproximovat

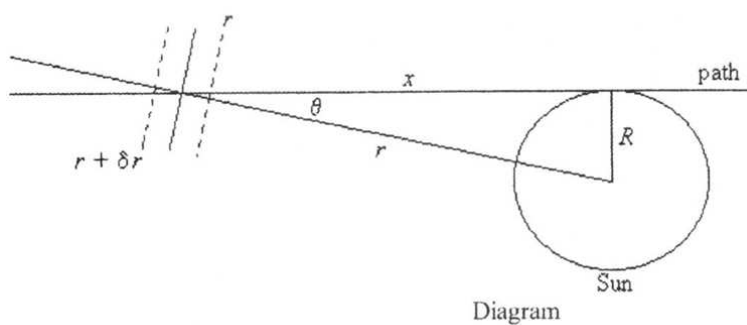
$$\cos \delta\xi \approx 1, \quad \sin \delta\xi \approx \delta\xi.$$

Přihlédnutím ke všem těmto úpravám dostáváme

$$\left(n(r) + \frac{dn}{dr} \delta r\right) \sin \theta = n(r) \sin \theta - n(r) \cos \theta \delta\xi,$$

a po další přímé úpravě

$$\frac{dn}{dr} \delta r \sin \theta = -n(r) \cos \theta \delta\xi.$$



²⁾ jde jen o jiný zápis derivace funkce

Nyní $n(r) = 1 + 2GM/rc^2$, takže $(dn/dr) = -2GM/c^2r^2$ a dále

$$(2GM/c^2r^2) \sin \theta \delta r = n(r) \cos \theta \delta \xi.$$

Z toho důvodu

$$\delta \xi = (2GM/c^2r^2) \tan \theta (\delta r/n) \approx (2GM \tan \theta /c^2r^2) \delta r.$$

(Uvědomme si totiž, že efektivní index lomu je velmi blízký jedné.)

Nyní uvažme, že $r^2 = x^2 + R^2$, takže $r dr = x dx$.

$$\begin{aligned} \int d\xi &= \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta dr}{r^2} = \\ &= \frac{2GM}{c^2} \int \frac{\tan \theta r dr}{r^3} = \frac{2GM}{c^2} \int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

a odtud

$$\xi = \frac{4GM}{Rc^2} \text{rad} = 8,4 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$