

Úlohy z 32. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 2000 Britain

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

1. Bungee jumper je připojen k jednomu konci dlouhého pružného lana. Druhý konec pružného lana je upevněn k vysokému mostu. Skokan vykročí z mostu a padá dolů z klidu z mostu k řece. Nedpoadne až do vody. Hmotnost skokana je m , délka nezatíženého lana je L , tuhost lana je k a tíhové zrychlení je g .

Předpokládejme, že

- skokana můžeme považovat za hmotný bod o hmotnosti m připevněný na konec lana,
- hmotnost lana je zanedbatelná vzhledem k m ,
- lano splňuje Hookův zákon,
- odpor vzduchu při pádu skokana lze zanedbat.

Vypočtěte výrazy pro následující veličiny a запиšte do listu odpovědi:

- vzdálenost y , kterou skokan proletěl před tím, než se poprvé úplně zastavil,
- maximální rychlost v , které skokan během pádu dosáhl,
- dobu letu t skokana do jeho prvního zastavení

2. Tepelný stroj pracuje mezi dvěma stejnými tělesy o různých teplotách T_A a T_B ($T_A > T_B$). Hmotnost každého tělesa je m a měrná tepelná kapacita s . Tělesa jsou pod stálým tlakem a nemění své skupenství.

- (a) Vypočtěte celkovou práci, určete výraz pro koncovou teplotu T_0 , kterou mají obě dvě tělesa A a B, jestliže tepelný stroj získá ze systému maximální mechanickou práci, jak je teoreticky možné. Napište výraz pro koncovou teplotu T_0 do listu odpovědí.
- (b) Vypočtěte a napište do listu odpovědí výraz pro toto maximum získané práce

Tepelný stroj pracuje mezi dvěma nádržemi vody, každá z nich o objemu $2,50 \text{ m}^3$. Jedna nádoba má teplotu 350 K a druhá 300 K .

- (c) Vypočtěte maximum získané mechanické energie. Zapište hodnoty do listu odpovědí.

Měrná tepelná kapacita vody je $4,19 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, hustota vody je $1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

3. Předpokládejte, že když se vytvářela Země, byly na ní přítomny izotopy ^{238}U a ^{235}U , avšak ne produkty jejich rozpadu. Rozpad ^{238}U a ^{235}U využijeme ke stanovení stáří T Země.

(a) Izotop ^{238}U se rozpadá s poločasem rozpadu $4,50 \cdot 10^9$ roků. Produkty rozpadu v radioaktivních rozpadových řadách mají ve srovnání s ním poločas rozpadů kratší. Při první aproximaci můžeme jejich existence ignorovat. Rozpadová řada končí stabilním izotopem olova ^{206}Pb . Vypočtete a doplňte do listu odpovědí výraz pro počet atomů ^{206}Pb , vytvořených radioaktivním rozpadem za dobu t , pomocí počtu přítomných atomů ^{238}U a poločasu rozpadu ^{238}U . (Můžete využít násobky 10^9 roků.)

(b) Podobně ^{235}U se rozpadá s poločasem rozpadu $0,710 \cdot 10^9$ roků a prostřednictvím rozpadové řady s kratším poločasem rozpadu produktů získáme stabilní izotop olova ^{207}Pb .

Napište do listu odpovědí rovnici pro ^{207}Pb pomocí ^{235}U a poločasu rozpadu ^{235}U .

(c) Uranová ruda smíchaná s rudou olověnou je analyzována hmotnostním spektrometrem. Jsou měřeny relativní koncentrace tří izotopů olova ^{204}Pb , ^{206}Pb , ^{207}Pb a počet atomů byl nalezen v poměru $1,00 : 29,6 : 22,6$. Izotop ^{204}Pb je použit pro kalibraci, neboť není radioaktivního původu. Při analýze čisté olověné rudy máme poměr $1,00 : 17,9 : 15,5$.

Jestliže je dán poměr $^{238}\text{U} : ^{235}\text{U} = 137 : 1$, určete rovnici pro T a запиšte do listu odpovědí.

(d) Předpokládejte, že T je mnohem větší než poločas rozpadu obou izotopů uranu a vypočtete přibližnou hodnotu pro T .

(e) Tato přibližná hodnota T je nevýznamně větší než delší poločas rozpadu, ale může se použít k získání přesnější hodnoty T . Odhadněte dobu T stáří Země s přesností na 2%.

4. Náboj Q je rovnoměrně rozložen vakuu uvnitř koule o poloměru R .

(a) Odvoďte výraz pro intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r od středu koule pro $r \leq R$ a $r > R$.

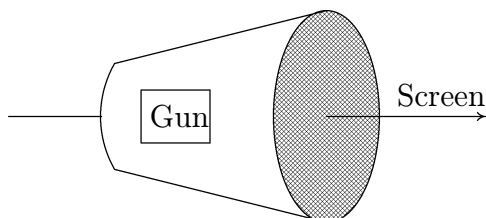
- (b) Určete výraz pro celkovou elektrickou energii spojenou s rozložením náboje.

Napište své odpovědi do listu odpovědí.

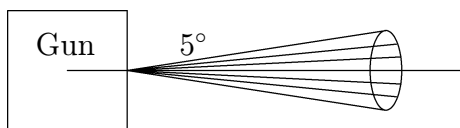
5. Kruhová smyčka z tenkého měděného drátu rotuje kolem svého vertikálního průměru v bodě zemského magnetického pole. Magnetická indukce zemského magnetického pole v tomto bodě je $44,5 \mu\text{T}$ a směřuje pod úhlem 64° dolů pod horizontálu. Hustota mědi je $8,90 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a měrný odpor je $1,70 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Vypočtěte, za jak dlouho dosáhne úhlová rychlost smyčky poloviční hodnoty. Popište kroky svých úvah a hodnotu získaného času zapište do listu odpovědí. Tento čas je mnohem delší než doba jedné otočky. Předpokládejte, že tření a odpor vzduchu můžeme zanedbat a při řešení této úlohy zanedbáme jev vlastní indukce, který je jinak nezanedbatelný.

2. úloha

- a) Obrazovka (CRT) skládající se z elektronového děla a stínítka, je umístěna v homogenním konstantním magnetickém poli o indukci B tak, že magnetické pole je rovnoběžné s paprskovou osou děla, jak je naznačeno na obr. 2.1.



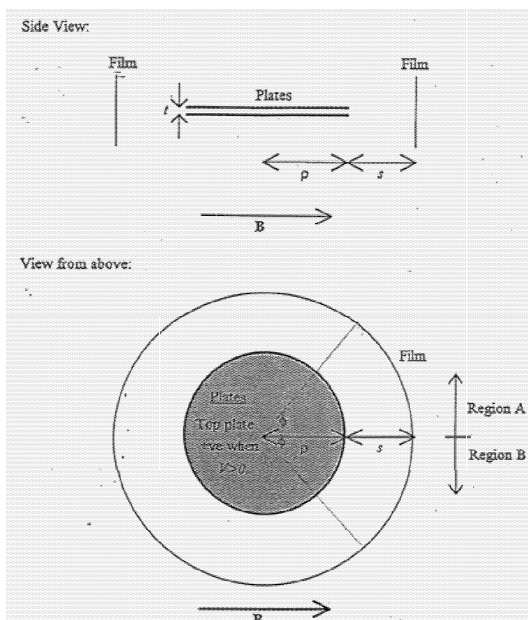
Elektronový paprsek vychází z anody elektronového děla na ose, ale má odchylku až do 5° od osy, jak je naznačeno na obr. 2.2. Obecně je na stínítku vytvořena rozšířená tečka, ale pro určité hodnoty magnetické indukce dostaneme dobře fokusovaný bod.



Uvažujeme-li pohyb elektronu s počátečním úhlem β , kde $0 \leq \beta \leq 5^\circ$ od osy při opouštění elektronového děla, a uvažíme složky rovnoběžné a kolmé k ose, odvodíme výraz pro poměr náboje a hmotnosti elektronu v závislosti na následujících veličinách:

- nejmenší indukce magnetického pole, pro níž dostaneme ostrý bod
- urychlovací napětí skrz elektronové dělo V (uvažte, že $V < 2 \text{ kV}$)
- vzdálenost D mezi anodou a obrazovkou

- b) Uvažujme nyní jinou metodu výpočtu poměru náboje a hmotnosti elektronu. Zařízení je ukázáno z profilu a půdorysu (seshora) na obr. 2.3, se směrem magnetického pole označeného $\mathbf{B}$. V tomto homogenním magnetickém poli jsou umístěny dvě mosazné kruhové desky poloměru r , které jsou odděleny na velmi malou vzdálenost t . Mezi nimi je napětí V . Desky jsou navzájem rovnoběžné a souosé, jejich osy jsou kolmé na indukci magnetického pole. Fotografický film pokrývá vnitřek zakřiveného povrchu válce poloměru $r + s$, který je uložen souose s deskami. Jinými slovy, film je v radiální vzdálenosti s od okraje desek. Celé zařízení je uloženo ve vakuu. Uvažte, že t je mnohem menší než s nebo r .

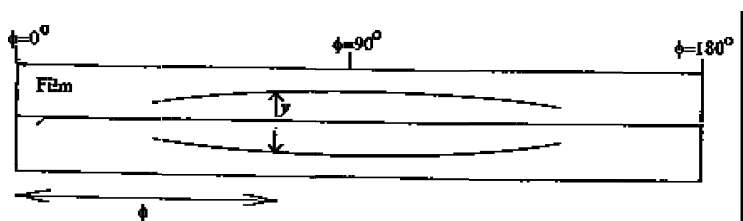


Bodový zdroj β částic, který je emituje rovnoměrně do všech směrů s jistým rozsahem rychlostí, je umístěn vedle středů desek, a ten samý kousek filmu je exponován pod třemi podmínkami:

- Nejprve, když $B = 0$ a $V = 0$.
- Podruhé, když $B = 0$ a $V = V_0$.
- Potřetí, když $B = -B_0$ a $V = -V_0$,

kde V_0 a B_0 jsou kladné konstanty. Uvažujte, že horní deska je kladně nabitá když $V > 0$ (záporně když $V < 0$) a že magnetické pole je ve směru definovaném obrázkem 2.5, pokud $B > 0$ (a opačně orientované, když $B < 0$). V této části můžete předpokládat, že mezera je zanedbatelně malá.

Dvě oblasti filmu jsou na obrázku 2.3 označeny A a B. Po expozici a vyvolání, získáme obraz, jehož náčrtek (jedné z oblastí) je na obrázku 2.4. Z které oblasti byl tento náčrtek vzat (A nebo B)? Odůvodněte svoje odpovědi ukázáním směru sil působících na elektron.



- c) Na obrázku 2.4 je náčrtek filmu získaný po expozici a vyvolání. Byla provedeno měření dvou nejzašších oddělených stop (mikroskopem) a tato vzdálenost y je také naznačena pro jeden úhel na obr. 2.4. Výsledky jsou dány v tabulce dole, úhel je definován na obr. 2.3 jako úhel mezi magnetickým polem a přímkou jdoucí od středu desek bodu na filmu.

Numerické veličiny parametrů systému jsou dány takto:

$$B_0 = 6,91 \text{ mT}, V_0 = 580 \text{ V}, t = 0,80 \text{ mm}, s = 41,0 \text{ mm}.$$

Kromě toho můžete potřebovat rychlost světla ve vakuu ($3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) a klidovou hmotnost elektronu ($9,11 \cdot 10^{-31}$) kg.

Určete částici β s maximální pozorovanou kinetickou energií a napište ji v eV.

- d) S využitím informací daných v části c), určete hodnotu poměru náboje a hmotnosti elektronu. To lze provést vykreslením příslušného grafu.

Algebraicky popište veličiny vykreslené na vodorovnou a svislou osu grafu. Uvažte, že výsledek, který obdržíte, nemusí souhlasit s akceptovanou hodnotou kvůli systematickým chybám v pozorování.

3. úloha

část A

Tato část se týká potíží při detekování gravitačních vln generovaných astronomickými jevy. Měli by být pozorovány např. v případě exploze vzdálené supernovy, která by měla produkovat silné fluktuace v gravitačním poli silné na povrchu země asi $10^{-19} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$. Model pro gravitační vlnový detektor (viz obr. 3.1) se sestává ze dvou kovových tyčí, každé metr dlouhé, uložených vůči sobě do pravého úhlu. Jeden konec každé tyče je jasně opticky vyleštěný a druhý konec je pevně upevněn. Pozice jedné tyče je nastavena tak, že signál přijímaný z fotonového článku je minimální (viz obr. 3.1).

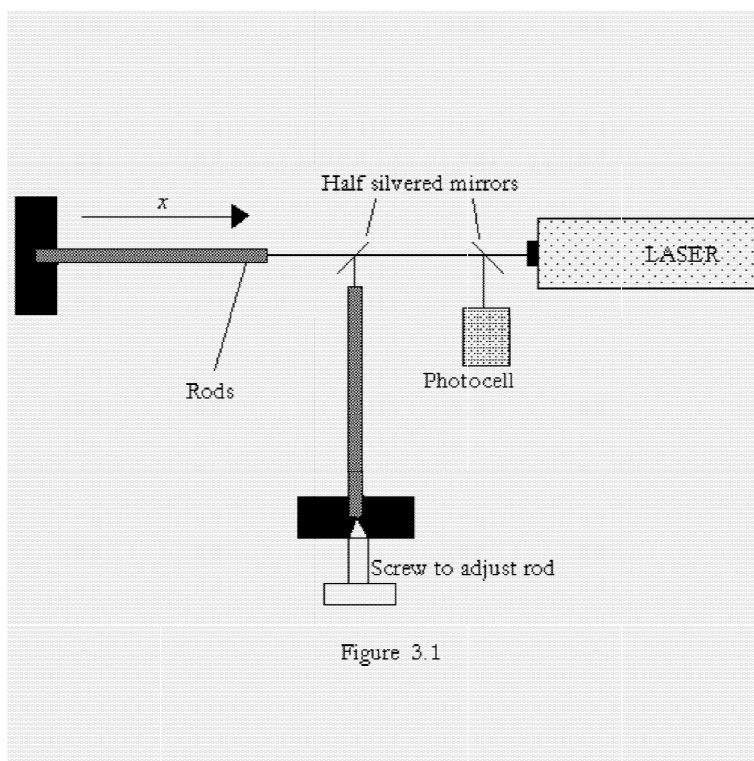


Figure 3.1

Tyčím jsou dávány krátke ostré podélné pulzy piezoelektrickým zařízením. Výsledkem je, že volné konce tyčí oscilují s podélným posunutím Δx_t , kde

$$\Delta x_t = ae^{-\mu t} \cos(\omega t + \phi)$$

a a , μ , ω a ϕ jsou konstanty.

- (a) Pokud je amplituda pohybu zmenšena o 20% během 50s intervalu, určete hodnotu μ .
- (b) Pro podélnou rychlost vln platí

$$v = \sqrt{E/\rho}.$$

Určete nejmenší hodnotu ω , pokud je dáno, že tyče jsou vyrobeny z hliníku o hustotě $\rho = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a Youngův model pružnosti je $E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

- (c) Je nemožné vyrobit tyče přesně stejně dlouhé, takže signál fotonky má „bicí“ frekvenci 0,005 Hz.¹ Jaký je rozdíl délek tyčí?
- (d) Pro tyč délky l odvoďte algebraický výraz pro změnu délky Δl , kvůli změně Δg tíhového zrychlení g , v závislosti na l a ostatních konstantách materiálu tyčí. Odpověď detektoru na tuto změnu se projeví ve změně směru jedné z tyčí.
- (e) Světlo laseru je monochromatické s vlnovou délkou 656 nm. Pokud minimální okrajový posun, který je možné detekovat, je 10^{-4} vlnové délky laseru, jaká je minimální délka tyčí l , aby systém byl schopen detekovat změny v g okolo $10^{-19} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$?.

část B

Tato část se týká efektu gravitačního pole na šíření světla vesmírem.

- (a) Foton emitovaný z povrchu Slunce (hmotnost M , poloměr R) je rudě posunutý. Předpokládáme-li, že hmotnost fotonu je ekvivalentní jeho energii, použijte Newtonovu gravitační teorii, abyste ukázali, že efektivní (nebo měřená) frekvence fotonu v nekonečnu je redukována (rudě posunuta) faktorem $(1 - GM/Rc^2)$.
- (b) Snížení frekvence fotonu je ekvivalentní vzrůstu jeho časové periody, nebo, pokud užijeme foton jako standardní hodiny, je ekvivalentní dilataci času. Kromě toho lze ukázat, že dilatace času je vždy doprovázena kontrakcí jednotky délky stejným faktorem.

¹Jde o rozdíl frekvencí tyčí

Nyní budeme studovat efekt, který to má na šíření světla blízko Slunce. Nejprve definujme efektivní index lomu n_r v bodě vzdáleném r od středu Slunce. Lze psát

$$n_r = \frac{c}{c'_r},$$

kde c je rychlost světla měřená souřadným systémem daleko od Slunečního gravitačního vlivu ($r \rightarrow \infty$), a c'_r je rychlost světla měřená souřadným systémem ve vzdálenosti r od středu Slunce.

Ukažte, že n_r může být aproximováno pomocí výrazu

$$n_r = 1 + \frac{aGM}{rc^2}$$

pro malá aGM/rc^2 , kde a je konstanta, kterou určíte.

- (c) Použitím tohoto výrazu pro n_r vypočtete v radiánech odchylku světelného paprsku od jeho přímé cesty, když přejde okraj Slunce.

Data:

Gravitační konstanta, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$.

Hmotnost Slunce, $M = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Poloměr Slunce, $R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Rychlost světla, $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Můžete také potřebovat následující integrál:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}$$