

Úlohy z 31. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 1999 Itálie, Padova

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

Fyzikální konstanty a obecná data

Znalost některých obecných dat a fyzikálních konstant vám může být užitečná při řešení jednotlivých problémů. Jsou zde umístěna téměř nejpřesnější současná data a mají tudíž značný počet číslic. Očekává se, že při užití těchto dat budete počítat s vhodným počtem platných cifer.

Rychlost světla ve vakuu: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Magnetická permeabilita vakua: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$.

Elektrická permitivita vakua: $\varepsilon_0 = 8,8541878 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$.

Gravitační konstanta: $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Plynová konstanta: $R = 8,314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Boltzmannova konstanta: $k = 1,380658 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Boltzmannova-Stefanova konstanta: $\sigma = 56,703 \text{ nW m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Náboj protonu: $e = 1,60217733 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Hmotnost elektronu: $m_e = 9,1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Planckova konstanta: $h = 6,6260755 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$.

Základ Celsiovy stupnice: $T_K = 273,15 \text{ K}$.

Hmotnost Slunce: $M_S = 1,991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

Hmotnost Země: $M_E = 5,979 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

Střední poloměr Země: $r_E = 6,373 \text{ Mm}$.

Hlavní poloosa orbity Země: $R_E = 1,4957 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Hvězdný den: $d_s = 86,16406 \text{ ks}$.

Hvězdný rok: $y = 31,558150 \text{ Ms}$.

Hodnota tíhového zrychlení na povrchu Země: $g = 9,80665 \text{ m s}^{-2}$.

Hodnota atmosférického tlaku u hladiny moře: $p_0 = 101\,325 \text{ Pa}$.

Index lomu vzduchu pro viditelné světlo, při standardním tlaku a 15°C :
 $n_{air} = 1,000277$.

Rovníkový poloměr Jupiteru: $R_B = 69,8 \text{ Mm}$.

Střední poloměr orbity Jupiteru: $R = 7,783 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Jovian day: $d_J = 35,6 \text{ ks}$.

Jovian year: $y_J = 374,32 \text{ Ms}$.

Číslo $\pi = 3,14159265$.

1. úloha - Pohlčení záření plynem

Válcová nádoba, která má osu ve směru svislém, obsahuje molekulární plyn v termodynamické rovnováze. Horní podstava válce se může volně přemísťovat a tvoří ji skleněná deska. Předpokládejme, že plyn nemůže z nádoby unikat a že tření mezi deskou a stěnami válce postačuje k utlumení kmitů, ale nevyvolává podstatné energetické ztráty vzhledem k jiným energiím, takže je můžeme zanedbat. Na počátku je teplota plynu stejná jako teplota okolního prostředí, v němž má vzduch normální tlak. Plyn můžeme v dobrém přiblížení považovat za dokonalý. Dále předpokládejme, že stěny válce (včetně podstav) jsou velmi málo tepelně vodivé, mají malou tepelnou kapacitu, a proto vedení tepla mezi plynem a okolním prostředím, probíhá velmi pomalu a můžeme je tedy při řešení zanedbat.

Skleněnou deskou vpustíme do válce světlo emitované laserem o konstantním výkonu. Toto záření snadno prochází vzduchem a sklem, ale je zcela pohlcováno plynem uvnitř nádoby. Při absorpci (pohlčení) tohoto záření přejdou molekuly do excitovaného stavu, v němž rychle emitují infračervené záření a molekuly se postupně vrací do základního stavu. Energie záření pocházejícího z laseru je tedy transformována ve velmi krátkém čase do tepelného pohybu (molekulárního chaosu) a potom zůstává v plynu po dostatečně dlouhý čas.

Pozorujeme, že skleněná deska se při výše popsaném ději posouvá nahoru. Po určité době ozáření vypneme laser a změříme toto posunutí.

1. Použijte údaje uvedené níže a je-li nezbytné, také údaje z listu fyzikálních konstant, a vypočtete teplotu a tlak plynu po ozáření. (2b)
2. Vypočtete mechanickou práci vykonanou plynem v důsledku pohlčení záření. (1b)
3. Vypočtete energii záření pohlceného plynem během ozařování. (2b)
4. Vypočtete výkon záření emitovaného laserem, který byl absorbován plynem, odpovídající počet fotonů (a tedy elementárních absorpčních procesů) za jednotku času. (1,5 b)
5. Vypočtete účinnost procesu konverze optické energie na mechanickou potenciální energii skleněné desky. (1b)

Potom osu válce pomalu otočíme o 90° , takže jej položíme do vodorovného směru. Výměna tepla mezi plynem a nádobou se může zanedbat.

6. Uvažte, zda se nyní změní tlak, teplota nebo obě veličiny popisující plyn vdůsledku tohoto otočení. Vpřípadě, že ano, tak jaké budou konečné hodnoty? (2,5 b)

Údaje:

Tlak v okolí nádoby: $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$

Teplota v okolí nádoby: $T_0 = 20,0 \text{ }^\circ\text{C}$

Vnitřní průměr válce: $2r = 100 \text{ mm}$

Hmotnost skleněné desky: $m = 800 \text{ g}$

Látkové množství plynu vnádobě: $n = 0,100 \text{ mol}$

Molární teplo o stálém objemu užitého plynu: $c_v = 20,8 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$

Vlnová délka záření laseru: $\lambda = 514 \text{ nm}$

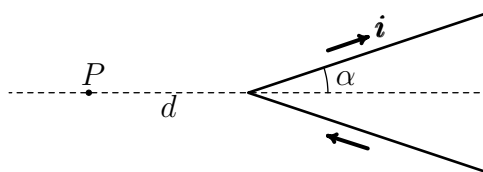
Doba ozařování: $\Delta t = 10,0 \text{ s}$

Posunutí pohyblivé desky po ozáření: $\Delta s = 30,0 \text{ mm}$.

2. úloha - Magnetické pole drátu ve tvaru V

K prvním úspěchům získaným Amperem při využívání magnetických jevů patří výpočet indukce magnetického pole $\mathbf{B}$, vytvořeného elektrickým proudem procházejícím vodiči. Srovnáme je s jiným výpočtem, provedeným Biotem a Savartem.

Zvláště zajímavý je případ velmi dlouhého tenkého drátu, kterým prochází stálý proud i . Drát je vytvořen ze dvou přímých částí, které mají tvar písmena V. Polovinu úhlu u vrcholu označíme α (viz obr.). Vsouhlase s Ampérovými výpočty velikost indukce $\mathbf{B}$ magnetického pole v daném bodě P , ležícím na ose úhlu soustavy drátu V, vně (podle obrázku) ve vzdálenosti d od vrcholu, je úměrná $\operatorname{tg}(\alpha/2)$. Ampérova práce byla později vtělena do Maxwellovy elektromagnetické teorie.

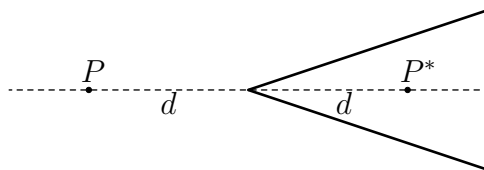


Užijte současné znalosti o elektromagnetismu:

1. Najděte směr vektoru $\mathbf{B}$ magnetické indukce v bodě P . (1b)
2. Víte-li, že velikost B magnetické indukce je přímo úměrná $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, určete součinitel úměrnosti k ve vztahu

$$|B(P)| = k \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (2b)$$

3. Vypočtěte indukci magnetického pole B v bodě P^* symetrickém P podle vrcholu, tj. na ose úhlu ve stejné vzdálenosti d (viz obr.). (2b)



4. Abychom změřili velikost indukce magnetického pole, umístíme do bodu P malou magnetku smomentem setrvačnosti I a magnetickým momentem dipólu μ . Magnetka kmitá v rovině, v níž leží vektor $\mathbf{B}$. Vypočtete periodu malých kmitů této magnetky jako funkci B . (2,5 b)

Ve stejných podmínkách Biot a Savart předpokládali, že magnetická indukce v bodě P (užijeme moderního označení) může být vyjádřena vztahem

$$B(P) = \frac{i\mu_0\alpha}{\pi^2 d},$$

kde μ_0 je permeabilita vakua. Ve skutečnosti se pokusili rozhodnout experimentem mezi dvěma interpretacemi (Amperovou a Biot-Savartovou interpretací) měření periody kmitů magnetky pro řadu hodnot úhlu otevírání písmene „V“. Avšak pro jisté hodnoty úhlu α jsou rozdíly příliš malé, než aby se daly snadno změřit.

5. Abychom experimentálně mohli rozhodnout mezi dvěma předpověďmi hodnot period magnetek v bodě P , je třeba získat rozdíl alespoň 10%, tj. $T_1 > 1,10T_2$ (T_1 je Ampérova předpověď a T_2 je Biot-Savartova předpověď); určete přibližně, v jakém intervalu se musí volit úhel α odpovídající otevírání „V“ na obrázku, abychom byli schopni rozhodnout mezi oběma interpretacemi. (3b)

Pokyn

V závislosti na tom, jakým způsobem úlohy řešíte, vám může být užitečný vztah:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

3. úloha - Kosmická sonda kJupiteru

V této úloze budeme zkoumat metodu často používanou pro zrychlování kosmických sond vpořadovaném směru. Kosmická sonda letí kplanetě a může podstatně zvětšit svoji rychlost a znatelně změnit směr letu, přičemž spotřebuje velice malou část energie orbitálního pohybu planety. Analyzujeme zde jev, při kterém sonda prochází blízko Jupiteru.

Planeta Jupiter obíhá okolo Slunce po eliptické trajektorii, kterou můžeme vřibližení považovat za kružnici se středním poloměrem R . Abychom mohli přistoupit kanálýze fyzikální situace, musíme nejprve:

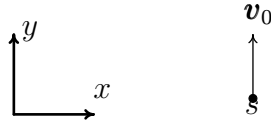
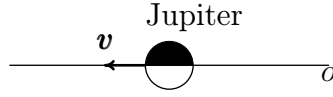
1. Určit rychlost V planety na její trajektorii kolem Slunce. (1,5 b)
2. Když se sonda nachází mezi Sluncem a Jupiterem (v úseku Slunce-Jupiter), určete vzdálenost od Jupitera, kde je gravitační přitažlivá síla ke Slunci vrovnováze sgravitační silou kJupiteru. (1b)

Kosmická sonda o hmotnosti $m = 825$ kg se přibližuje kJupiteru. Pro jednoduchost předpokládejme, že trajektorie kosmické sondy leží přímo vrovině trajektorie Jupiteru, tak předejdeme vážným problémům, při kterých by kosmická sonda opustila rovinu Jupiterovy oběžné trajektorie.

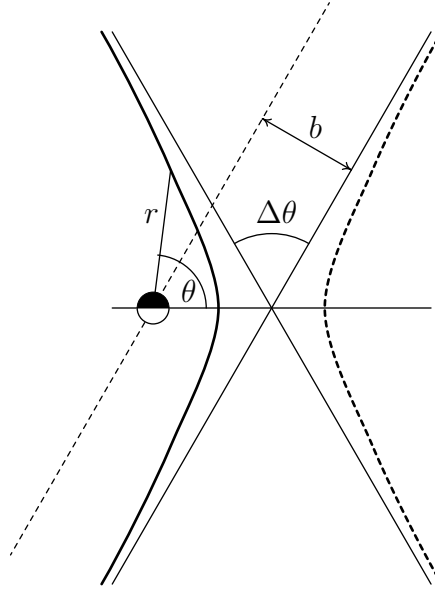
Předpokládejme také, že sonda se nachází voblasti, kde Jupiterova gravitační přitažlivost převažuje nad všemi ostatními gravitačními silami.

Ve vztažné soustavě spojené shmotným středem Slunce je počáteční rychlost kosmické sondy rovna $v_0 = 1,00 \cdot 10^4$ m/s (ve směru kladné poloosy y), zatímco rychlost Jupiteru má směr záporné poloosy x (viz obr. 1). Pod názvem počáteční rychlost myslíme rychlost sondy vmeziplanetárním prostoru ještě daleko od planety Jupitera, ale už voblasti, kde je přitažlivost Slunce možno zanedbat vzhledem kpřitažlivému působení Jupiteru. Předpokládáme, že setkání probíhá vdostatečně krátkém čase, a proto můžeme zanedbat změnu směru Jupitera po jeho trajektorii kolem Slunce. Můžeme také předpokládat, že kosmická sonda prochází za Jupiterem, tj. že souřadnice x sondy je větší než souřadnice Jupitera, zatímco souřadnice y jsou stejné.

3. Určete směr pohybu sondy (jako úhel φ mezi tímto směrem a osou x) a její rychlost v' ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem, když sonda je ještě daleko od Jupitera. (2b)



Obr. 1. Pohled ve vztažné soustavě spojené s hmotným středem Slunce. O označuje trajektorii Jupitera, s kosmickou sondou.



Trajektorie kosmické sondy ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem je hyperbola a její rovnice vpolárních souřadnicích vtéto vztažné soustavě je

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right), \quad (1)$$

kde b je vzdálenost Jupitera od jedné zasymptoty (tzv. impact parameter), E je celková mechanická energie kosmické sondy ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem, G je gravitační konstanta, M hmotnost Jupitera, r a θ jsou polární souřadnice (radiální vzdálenost a polární úhel).

Obr. 2. ukazuje dvě větve hyperboly, které popisuje rovnice (1). Jsou také znázorněny asymptoty a polární souřadnice. Poznamenejme, že počátek parametru r rovnice (1) je v „ohnisku přitažlivosti“ hyperboly. Trajektorie kosmické sondy je přitažlivá trajektorie a je zdůrazněna na obrázku 2.

4. Určete hodnotu celkové energie kosmické sondy ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem, přičemž uvažte, že je zvykem předpokládat, že ve velmi velké vzdálenosti je potenciální energie nulová. V tomto případě, je-li sonda daleko, pohybuje se stálou rychlostí v důsledku malého gravitačního působení. (1b)
5. Použijte rov. (1) popisující trajektorii kosmické sondy a určete celkovou úhlovou odchylku $\Delta\theta$ ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem (obr.2) a vyjádřete ji jako funkci počáteční rychlosti v' a impact parametru b . (2b)
6. Předpokládejte, že sonda nemůže minout Jupiter ve vzdálenosti menší než tři jeho poloměry od jeho středu. Určete jeho nejmenší možný impact parametr a maximálně možnou úhlovou odchylku. (1b)
7. Určete rovnici pro koncovou rychlost v'' sondy ve vztažné soustavě spojené se Sluncem po průletu kolem Jupitera jako funkci pouze těchto veličin: rychlost V Jupitera, počáteční rychlost v_0 sondy, úhlová odchylka $\Delta\theta$. (1b)
8. Užijte předchozí výsledky k určení číselné hodnoty koncové rychlosti v'' ve vztažné soustavě spojené se Sluncem, když úhlová odchylka dosáhla maximální možné hodnoty. (0,5 b)

Možná se Vám budou hodit tyto vztahy:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$