

Úlohy z 30. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 1999 Italy - Padua

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

1. V rovnováze musí být tlak p uvnitř nádoby roven pokojovému tlaku p_0 plus tlaku způsobenému vahou pohyblivé podstavy: $p = p_0 + \frac{mg}{\pi r^2}$. To je splněno před a po ozáření. Nejprve má plyn teplotu rovnou pokojové teplotě. Kvůli stavové rovnici pro ideální plyn je počáteční objem plynu $V_1 = \frac{nRT_0}{p}$ (kde R je plynová konstanta) a tudíž výška h_1 válce, kterou zaplňuje plyn je $h_1 = \frac{V_1}{\pi r^2} = \frac{nRT_0}{p_0\pi r^2 + mg}$. Po ozáření se výška zvýší na $h_2 = h_1 + \Delta s$, a tudíž je nová teplota

$$T_2 = T_0 \left(1 + \frac{\Delta s}{h_1} \right) = T_0 + \frac{\Delta s(p_0\pi r^2 + mg)}{nR}$$

Numericky vychází: $p = 102,32 \text{ kPa}$, $T_2 = 322 \text{ K} = 49^\circ\text{C}$.

2. Mechanická práce vykonaná plynem proti desce je $mg\Delta s$ a práce vykonaná proti tlaku v místnosti je $p_0\pi r^2\Delta s$, tudíž celková práce je

$$L = (mg + p_0\pi r^2)\Delta s = 24,1 \text{ J}$$

3. Vnitřní energie, díky změnám teploty, se změní o hodnotu $\Delta U = nc_v(T_2 - T_0)$. Zahřátí uvedené do systému během ozařovacího času Δt je

$$Q = \Delta U + L = nc_v \frac{T_0\Delta s}{h_1} + (mg + p_0\pi r^2)\Delta s = \Delta s(p_0\pi r^2 + mg) \left(\frac{c_v}{R} + 1 \right)$$

Toto teplo pochází přímo z absorpce záření a shoduje se proto s absorbovanou světelnou energií, $Q = 84 \text{ J}$.

Ten samý výsledek mohl být získán uvážením izobarické transformace a užitím Majerova vztahu $c_p = c_v + R$:

$$Q = nc_p(T_2 - T_0) = n(c_v + R) \left[\frac{\Delta s(p_0\pi r^2 + mg)}{nR} \right]$$

$$Q = \Delta s(p_0\pi r^2 + mg) \left(\frac{c_v}{R} + 1 \right)$$

4. Protože laser má konstantní výkon, absorbovaný výkon je

$$W = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} (p_0 \pi r^2 + mg) \left(\frac{c_v}{R} + 1 \right) = 8,4 \text{ W}$$

Energie každého fotonu je hc/λ , a proto je počet fotonů absorbovaný každou sekundu $\frac{W\lambda}{hc} = 2,2 \cdot 10^{19} \text{ s}^{-1}$.

5. Změna potenciální energie je rovna mechanické práci proti váze desky, a proto účinnost η transformace energie je

$$\eta = \frac{mg\Delta s}{Q} = \frac{1}{\left(1 + \frac{p_0 \pi r^2}{mg}\right) \left(1 + \frac{c_v}{R}\right)} = 2,8 \cdot 10^{-3} \approx 0,3\%$$

6. Když se válec otočí a jeho osa se stane horizontální, nastane adiabatická expanze, kdy se tlak změní z p na p_0 a teplota se změní na novou hodnotu T_3 . Rovnice pro adiabatický děj může být napsána ve tvaru

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

kde $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} = 1,399$. Vychází $T_3 = 321 \text{ K} = 48^\circ\text{C}$.

Schéma hodnocení

Orientační bodové schéma.

1. 0.5 Porozumění vztahu mezi vnějším a vnitřním tlakem.
0.7 Použití posunutí desky.
0.2+0.2 Správný výsledek pro výsledný tlak.
0.2+0.2 Správný výsledek pro výslednou teplotu.
2. 0.6 Porozumění faktu, že práce je konaná proti tíze desky i proti atomsférickému tlaku.
0.2+0.2 Správný výsledek pro práci.
3. 1 Korektní posouzení problému.
0.5 Správná rovnice pro zahřívání.
0.3 Porozumění faktu, že absorbovaná světelná energie je rovna teplu.
0.2 Správný numerický výsledek pro světelnou energii.

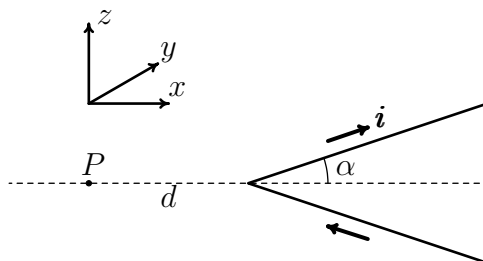
4. 0.2+0.2 Správný výsledek pro světelný výkon.
0.5 Einsteinův vztah.
0.3+0.3 Správný výsledek pro počet fotonů.
5. 0.6 Výpočet změny potenciální energie.
0.2+0.2 Správný výsledek pro účinnost.
6. 0.8 Porozumění faktu, že tlak se vrátí na pokojovou hodnotu.
0.4 Porozumění, že jde o adiabatickou změnu.
0.4 Rovnice pro adiabatickou změnu.
0.5 Odvození γ pro vztah mezi specifickými tepley.
0.2+0.2 Správný výsledek pro teplotu.

Pro správné výsledky se dávají dvojí body: jedny za správné analytické vyjádření, druhé za numerickou hodnotu.

Za numerické řešení nelze dát plný počet bodů, jestliže se počet číslic liší o více než jednu než je uvedeno v autorském řešení nebo jestliže chybí či jsou špatné jednotky. Za uvážení tíhy plynu nelze uznat žádný bonus.

2. úloha

1. Příspěvek k magnetické indukci $\mathbf{B}$ od každého ramena „V“ má ten samý směr jako od odpovídajícího nekonečného vodiče a tudíž - jestliže procházející proud je určen šipkou - magnetické pole je kolmé k rovině drátu (vzaté jako x - y rovina. Pokud uijeme pravidlo pravé ruky v soustavě naznačené na obrázku, $\mathbf{B}(P)$ míří podél kladné poloosy z .



Kvůli důvodům symetrie, celkové pole je dvojnásobné, než jaké generuje každé z ramen, a má ten samý směr.

- 2A Když $\alpha = \pi/2$, „V“ se stane přímým nekonečným drátem. V tomto případě je velikost magnetického pole $B(P)$ známa podle vzorce $B = \frac{i\mu_0}{2\pi d}$, a protože $\tan(\pi/4) = 1$, je faktor $k = \frac{i\mu_0}{2\pi d}$.

Následující řešení je rovnocenně akceptovatelné:

- 2B Vodič konečné délky ležící v přímce budí ve vzdálenosti h od sebe (v bodě P) magnetické pole o indukci $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{h}$, kde úhly θ_1, θ_2 jsou úhly, pod nimiž jsou viděny konce drátu z bodu P. Můžeme najít, že obě ramena „V“ dávají pole $B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1 - \cos \alpha}{d \sin \alpha}$, a tudíž celkové pole je

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right)$$

Toto řešení je úplnější, ale není požadováno.

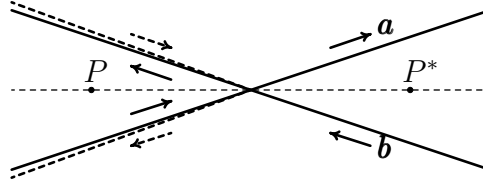
- 3A Za účelem výpočtu $\mathbf{B}(P^*)$ můžeme uvažovat, že „V“ je ekvivalentní dvěma zkrříženým nekonečným vodičům (a a b na následujícím obrázku) plus jiné „V“, symetrické k prvnímu, označeném na obrázku V' , nesoucím ten samý proud i , ale v opačném směru.

Pak $B(P^*) = B_a(P^*) + B_b(P^*) + B_V(P^*)$. Jednotlivé příspěvky jsou $B_a(P^*) = B_b(P^*) = \frac{i\mu_0}{2\pi d \sin \alpha}$ podél záporné poloosy z ; $B_V(P^*) = \frac{i\mu_0}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, podél kladné poloosy z . Tudíž máme:

$$B(P^*) = \frac{i\mu_0}{2\pi d} \left[\frac{2}{\sin \alpha} - \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

$$B(P^*) = k \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = k \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

a výsledné pole míří podél záporné poloosy z .



Následující řešení je rovnocenně akceptovatelné

- 3B Bod P^* uvnitř „V“ s polovičním rozpětím α může být považován za bod ležící venku z jiného „V“ s polovičním rozpětím $\pi - \alpha$ nesoucí ten samý proud, avšak s opačným směrem. Proto je

$$B(P^*) = k \tan\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = k \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = k \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Směr je stále podél z osy, ale podél záporné poloosy, protože příslušný proud má opačný směr než předchozí.

- 3C Hodnota indukce může být nalezena také stejným způsobem jako v bodě 2B.
- 4 Mechanický moment síly $\mathbf{M}$ působící na magnetickou jehlu položenou do bodu P je dán jako $\mathbf{M} = \mu \times B$, kde $\times$ značí vektorový součin. Je-li

Jehla vychýlena z rovnovážné polohy o malý úhel β (dost malý, aby platila aproximace $\sin \beta \approx \beta$, druhá momentová věta dává

$$M = -\mu B \beta = \frac{dL}{dt} = I \frac{d^2 \beta}{dt^2},$$

kde znaménko minus značí opačný směr působení momentu síly proti směru výchylky. Perioda T malých kmitů je pak dána jako

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\mu B}}$$

Sepsání diferenciální rovnice není nutné, stačí rozeznat analogii s harmonickým oscilátorem.

- 5 Pokud označíme indexem A výpočty založené na Ampèrově interpretaci, a indexem BS ty výpočty založené na hypotéze Biota a Savarta, dostaneme

$$B_A = \frac{i\mu_0}{2\pi d} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad B_{BS} = \frac{i\mu_0}{\pi^2 d} \alpha$$

$$T_A = 2\pi \sqrt{\frac{2\pi I d}{\mu_0 \mu i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}, \quad T_{BS} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi^2 I d}{\mu_0 \mu i \alpha}}$$

$$\frac{T_A}{T_{BS}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Pro $\alpha = \pi/2$ (maximální možná hodnota) je $T_A = T_{BS}$ a pro $\alpha \rightarrow 0$ je $T_A \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} T_{BS} \approx 1,128 T_{BS}$. Protože výraz $\frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha}{2}}$ je monotónně rostoucí funkcí α , je $\frac{T_A}{T_{BS}}$ monotónně klesající funkcí úhlu α . V experimentu není možné rozlišit obě interpretace, pokud hodnota α je větší než hodnota, pro kterou platí $T_A = 1,10 T_{BS}$ (10% odchylka). Dosazením do uvedené rovnice a za užitím vhodné numerické metody (trigonometrických tabulek nebo kalkulačky) dostaneme, že musí být $\alpha < 0,77 \text{ rad} \approx 44^\circ$.

Grafické řešení rovnice pro α je akceptovatelné, ale poněkud dlouhé. Řešení pomocí rozvoje v řadu (aproximací) není oproti tomu možné.

Schéma hodnocení

Orientační bodové schéma.

1. 1 Pro rozeznání faktu, že každé rameno dává stejný příspěvek.
0.5 Za správný náčrtek.
2. 0.5 Za fakt, že $\alpha = \pi/2$ pro rovný drát, nebo za znalost rovnice uvedené v části 2B.
0.25 Správný rovnice pro pole (pro konečný či nekonečný drát).
0.25 Hodnota k .
3. 0.7 Za rozeznání faktu, že drát V je ekvivalentní dvěma nekonečným drátům plus druhé V .
0.3 Za správné rovnice pro nekonečný drát.
0.5 Za správný výsledek pro intenzitu pole.
0.5 Za správný směr vektoru intenzity.

Alternativně:

3. 0.8 Popis bodu vně V pomocí $\pi - \alpha$ poloviční amplitudy a opačným směrem proudu.
0.7 Správný analytický výsledek.
0.5 Správný směr vektoru intenzity.

Alternativně:

3. 0.5 Správné užití rovnic uvedených v 2B.
1 Správný analytický výsledek.
0.5 Správný směr vektoru intenzity.
4. 0.5 Správné rovnice pro mechanický moment.
0.5 Za aproximaci $\sin \beta \approx \beta$.
1 Správné pohybové rovnice, zahrnující správné znaménko, nebo rozeznání analogie s harmonickým oscilátorem.
0.5 Správný analytický výsledek pro T .

- 5. 0.3 Správné vzorce pro dvě periody.
- 0.3 Rozeznání limitních hodnot pro α .
- 0.4 Správný poměr mezi periodami.
- 1 Nalezení vztahu mezi α a tečnou.
- 0.5 Vhodná aproximační hodnota α .
- 0.5 Konečná explicitní hodnota α .

Pro správné výsledky se dávají dvojí body: jedny za správné analytické vyjádření, druhé za numerickou hodnotu.

Za numerické řešení nelze dát plný počet bodů, jestliže se počet číslic liší o více než jednu než je uvedeno v autorském řešení nebo jestliže chybí či jsou špatné jednotky.

3. úloha

V zadání byla dána rovnice trajektorie hyperboly

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{v'^2 b^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \right) \quad (1)$$

- 1A Za předpokladu (jak bylo zmíněno v zadání), že orbita má tvar kružnice, a vzhledem k dostředivému zrychlení $\frac{V^2}{R}$ rovnému intenzitě gravitačního pole $\frac{GM_S}{R^2}$ (kde M_S je hmotnost Slunce) dostaneme oběžnou rychlost Jupitera

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} = 1,306 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Následující alternativní řešení je také možné:

- 1B Protože považujeme pohyb Jupitera za kruhový a rovnoměrný, $V = \omega R = \frac{2\pi R}{y_1}$, kde y_1 je perioda rotačního pohybu Jupiteru, která je dána v seznamu obecných fyzikálních konstant.

2. Dvě gravitační síly působící na kosmickou sondu budou v rovnováze, když

$$\frac{GMm}{\rho^2} = \frac{GM_S m}{(R - \rho)^2} \quad (2)$$

(kde ρ je vzdálenost od Jupitera a M je hmotnost Jupitera), odkud

$$\sqrt{M}(R - \rho) = \rho \sqrt{M_S} \quad (3)$$

a

$$\rho = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{M_S} + \sqrt{M}} R = 0,02997 R = 2,333 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad (4)$$

a tudíž obě přitažlivé gravitační síly jsou v rovnováze ve vzdálenosti asi 23,3 milionů kilometrů od Jupitera (cca 334 poloměrů Jupitera).

3. Pomocí jednoduché Galileiho transformace nalezneme složky rychlosti sondy ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem. Platí:

$$v'_x = V, \quad v'_y = v_0$$

a tudíž - v Jupiterově vztažné soustavě - se sonda pohybuje pod úhlem $\theta_0 = \arctan \frac{v_0}{V}$ vzhledem k ose x a její rychlost je $v' = \sqrt{v_0^2 + V^2}$ (Můžeme také uvážit vztahy $\cos \theta_0 = \frac{V}{\sqrt{v_0^2 + V^2}} = \frac{V}{v'}$, nebo popřípadě $\sin \theta_0 = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + V^2}} = \frac{v_0}{v'}$. Užitím daných hodnot obdržíme

$$\theta_0 = 0,653 \text{ rad} \approx 37,4^\circ \text{ a } v' = 1,65 \cdot 10^4 \text{ m/s.}$$

4. Protože trajektorie družice může být popsána pouze aproximovaně jako výsledek gravitační interakce dvou těles (měli bychom také zahrnout interakci se Sluncem a ostatními planetami), předpokládáme velkou, ale ne nekonečnou vzdálenost od Jupitera a aproximujeme celkovou energii v Jupiterově vztažné soustavě jako kinetickou energii družice ve velké vzdálenosti:

$$E \approx \frac{1}{2} m v'^2 \quad (5)$$

Odpovídající numerická hodnota je $E = 112 \text{ GJ}$.

5. Rovnice (1) ukazuje, že radiální vzdálenost jde do nekonečna a její převrácená hodnota je rovna nule, právě když

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta = 0 \quad (6)$$

a to sice, když

$$\cos \theta = - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}} \quad (7)$$

Můžeme také uvážit, že radiální vzdálenost nemůže být záporná, a proto jsou akceptovatelné všechny hodnoty splňující nerovnici

$$1 + \sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}} \cos \theta \geq 0 \quad (8)$$

neboli

$$\cos \theta \geq - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E v'^2 b^2}{G^2 M^2 m}}} \quad (9)$$

Řešení pro limitní případ nerovnice (9) (tj. řešení rovnice (7)) je:

$$\theta_{\pm} = \pm \arccos \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} \right) \quad (10)$$

a tudíž úhel $\Delta\theta$ (naznačený na obr. 2) mezi dvěma asymptotami hyperboly je dán jako:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= (\theta_+ - \theta_-) - \pi = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ev'^2b^2}{G^2M^2m}}} \quad (11) \\ &= \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4b^2}{G^2M^2}}} \end{aligned}$$

V posledním vzorci jsme užili hodnotu celkové energie vypočtenou v předešlé části.

6. Úhlová deviace je monotónně klesající funkcí parametru b , z čehož vyplývá, že odchylka je maximální, právě když b je minimální. Z diskuze v předešlé části je jasné, že bod největšího přiblížení je, když $\theta = 0$, a v tomto případě je minimální vzdálenost mezi sondou a centrem planety snadno vyjádřitelná pomocí rovnice (1):

$$r_{min} = \frac{v'^2b^2}{GM} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v'^4b^2}{G^2M^2}} \right)^{-1} \quad (12)$$

Převrácením rovnice (12) obdržíme parametr

$$b = \sqrt{r_{min}^2 + \frac{2GM}{v'^2} r_{min}} \quad (13)$$

Můžeme poznamenat, že výsledek může být také získán pomocí úvahy, že díky zachování momentu hybnosti máme

$$L = mv'b = mv'_{min}r_{min}$$

kde můžeme rychlost odpovídající největšímu přiblížení vypočíst ze zákona zachování energie jako

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv_{min}'^2 - \frac{GMm}{r_{min}}$$

a kombinací těchto dvou vztahů opět dostaneme vztah (13).

Parametr b je rostoucí funkcí vzdálenosti při největším přiblížení; tudíž, pokud se sonda nemůže přiblížit k povrchu Jupiteru na vzdálenost více než dvou poloměrů (a tudíž $r_{min} = 3R_0$, kde R_0 je poloměr Jupiteru), minimální přijatelná hodnota parametru b je

$$b_{min} = \sqrt{9R_0^2 + \frac{6GM}{v'^2}R_0} \quad (14)$$

Z této rovnice obdržíme konečně maximální možnou odchylku:

$$\Delta\theta_{max} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4 b_{min}^2}{G^2 M^2}}} \quad (15)$$

$$\Delta\theta_{max} = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v'^4}{G^2 M^2} \left(9R_0^2 + \frac{6GM}{v'^2} R_0 \right)}}$$

a užitím daných numerických hodnot vypočteme:

$$b_{min} = 4,90 \cdot 10^8 \text{ m} \approx 7,0 R_0 \text{ a } \Delta\theta_{max} = 1,526 \text{ rad} \approx 87,4^\circ$$

7. Konečný směr pohybu vzhledem k ose x vztažné soustavy spojené s Jupiterem je dán počátečním úhlem plus úhlovou odchylkou, tedy $\theta_0 + \Delta\theta$, jestliže satelit poletí za planetu. Konečné velikosti složek rychlosti sondy ve vztažné soustavě spojené s Jupiterem jsou:

$$v'_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta), \quad v'_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta)$$

zatímco v soustavě spojené se Sluncem jsou

$$v''_x = v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V, \quad v''_y = v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta)$$

Tudíž konečná rychlost sondy ve Sluneční vztažné soustavě je

$$\begin{aligned}
 v'' &= \sqrt{(v' \cos(\theta_0 + \Delta\theta) - V)^2 + (v' \sin(\theta_0 + \Delta\theta))^2} \\
 v'' &= \sqrt{(v_0^2 + 2V^2 - 2v'V \cos(\theta_0 + \Delta\theta))} \\
 v'' &= \sqrt{(v_0^2 + 2V^2 - 2v'V(\cos \theta_0 \cos \Delta\theta - \sin \theta_0 \sin \Delta\theta))} \quad (16) \\
 v'' &= \sqrt{(v_0^2 + 2V^2 - 2V(V \cos \Delta\theta - v_0 \sin \Delta\theta))} \\
 v'' &= \sqrt{(v_0(v_0 + 2V \sin \Delta\theta) + 2V^2(1 - \cos \Delta\theta))}
 \end{aligned}$$

8. Užitím numerické hodnoty pro maximální úhlovou odchylku vypočteme
 $v'' = 2,62 \cdot 10^4$ m/s.

Schéma hodnocení

Orientační bodové schéma.

1. 0.4 Gravitační zákon nebo vztahy popisující rovnoměrný pohyb po kružnici.
 0.4 Korektní přístup.
 0.4+0.3 Správný výsledek pro rychlost Jupiteru.
2. 0.3 Správný přístup.
 0.4+0.3 Správný výsledek pro vzdálenost od Jupiteru.
3. 1 Korektní transformace soustavy souřadnic.
 0.3+0.2 Správný výsledek pro rychlost sondy ve vztažné soustavě Jupiteru.
 0.3+0.2 Správný výsledek pro úhel.
4. 0.8 Porozumění, jak zacházet s potenciální energií v nekonečnu.
 0.2 Numerický výsledek pro kinetickou energii.
5. 0.6 Korektní přístup.
 0.6 Rovnice pro směry asymptot.
 0.8 Rovnice pro úhel odchýlení sondy.

6. 0.3+0.2 Správný výsledek pro parametr b (minimum impact parameter).
- 0.3+0.2 Správný výsledek pro maximální úhel odchýlení sondy.
7. 0.5 Rovnice pro složky rychlosti ve vztažné soustavě Slunce.
- 0.5 Rovnice pro rychlost jako funkce úhlu odchýlení.
8. 0.5 Numerický výsledek pro konečnou rychlost.

Pro správné výsledky se dávají dvojí body: jedny za správné analytické vyjádření, druhé za numerickou hodnotu.

Za numerické řešení nelze dát plný počet bodů, jestliže se počet číslic liší o více než jednu než je uvedeno v autorském řešení nebo jestliže chybí či jsou špatné jednotky.