

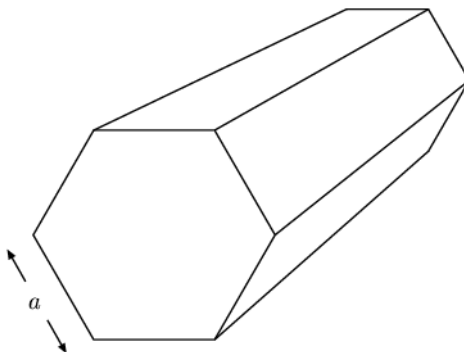
Úlohy z 29. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 1998 Reykjavík, Island

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha – Valení šestibokého hranolu

Uvažujte dlouhý, pevný, tuhý, pravidelný šestiboký hranol jako je běžný typ tužky. Hmotnost hranolu je M a je rovnoměrně rozložena. Délka každé strany průřezu hranolu je a .



Moment setrvačnosti I šestibokého hranolu vzhledem k jeho středové ose je

$$I = \frac{5}{12}Ma^2$$

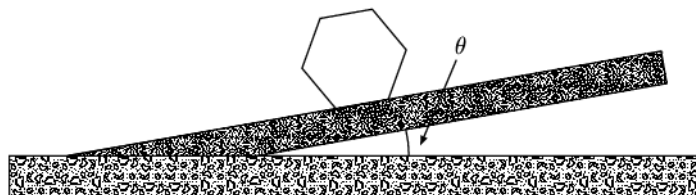
Moment setrvačnosti I' vzhledem k rohu hranolu je

$$I' = \frac{17}{12}Ma^2$$

- a) (3,5 bodu) Hranol je zpočátku v klidu. Je umístěn na nakloněné rovině odchýlené o malý úhel θ od horizontálního směru. Předpokládejte, že povrch hranolu je jemně konkávní, takže se hranol dotýká desky pouze svými rohy. Efekt konkávnosti na moment setrvačnosti může být zanedbán. Hranol nyní uvedeme z klidu do pohybu a ten začne nerovnoměrné valení dolů po desce. Předpokládejte, že tření předchází jakémukoliv klouzání a hranol neztrácí kontakt s podložkou. Úhlová rychlost předtím, než roh udeří na desku je ω_i , zatímco ω_f je okamžitá úhlová rychlost po dopadu na desku. Ukažte, že lze psát

$$\omega_f = s\omega_i$$

a určete hodnotu koeficientu s .



- b) (1 bod) Kinetická energie válce je obdobně před a po dopadu K_i a K_f . Ukažte, že lze psát

$$K_f = rK_i$$

a určete hodnotu koeficientu r .

- c) (1,5 bodu) Aby nastal následující dopad, musí mít K_i minimální hodnotu $K_{i,min}$, kterou lze psát ve tvaru $K_{i,min} = \delta Mga$ kde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ je tíhové zrychlení.

Nalezněte koeficient δ v závislosti na sklonu θ a koeficientu r . Ve vyjádření výsledku použijte pro r algebraický symbol, nikoliv číselnou hodnotu.

- d) (2 body) Pokud je podmínka z části (c) splněna, kinetická energie K_i dosáhne pevné hodnoty $K_{i,0}$ jak se válec valí dolů po nakloněné rovině. Pokud tento limit existuje, ukažte, že $K_{i,0}$ může být vyjádřena pomocí

$$K_{i,0} = \kappa Mga$$

a určete koeficient κ v závislosti na sklonu θ a koeficientu r .

- e) (2 body) Vypočtete, s přesností $0,1^\circ$, minimální sklon roviny θ_0 , pro který valení, jakmile začne, pokračuje neurčitě dlouho.

2. úloha – Voda pod ledovou čepičkou

Ledová čepička je tlustá ledová pokrývka (více než několik km široká) spočívající na zemi a táhnoucí se vodorovně přes desítky či stovky km. V této úloze uvažujeme tání ledu a chování vody pod ledovou čepičkou v bodě tání. Můžeme předpokládat, že za těchto podmínek led způsobuje kolísání tlaku jako viskózní kapalina, ale lehce se deformuje, principiálně při vertikálním pohybu. Pro účely úlohy jsou dány následující informace.

Hustota vody: $\rho_w = 1,000 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Hustota ledu: $\rho_i = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Měrná tepelná kapacita ledu: $c_i = 2,1 \cdot 10^3 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$

Měrné teplo tání ledu: $L_i = 3,4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

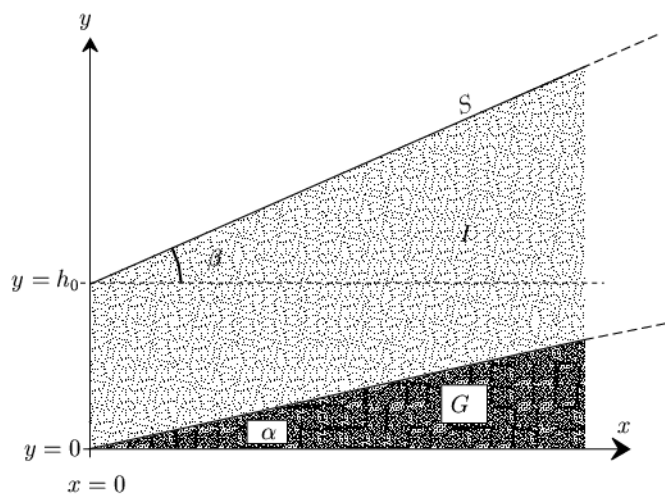
Hustota horniny a magmatu: $\rho_r = 2,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Měrná tepelná kapacita horniny a magmatu: $c_r = 700 \text{ J/(kg } ^\circ\text{C)}$

Měrné teplo tání horniny a magmatu: $L_r = 4,2 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$

Průměrný vnější tepelný tok skrz povrch země: $J_Q = 0,06 \text{ W/m}^2$

Bod tání ledu: $T_0 = 0^\circ\text{C}$, konstanta



Obr. 2.1

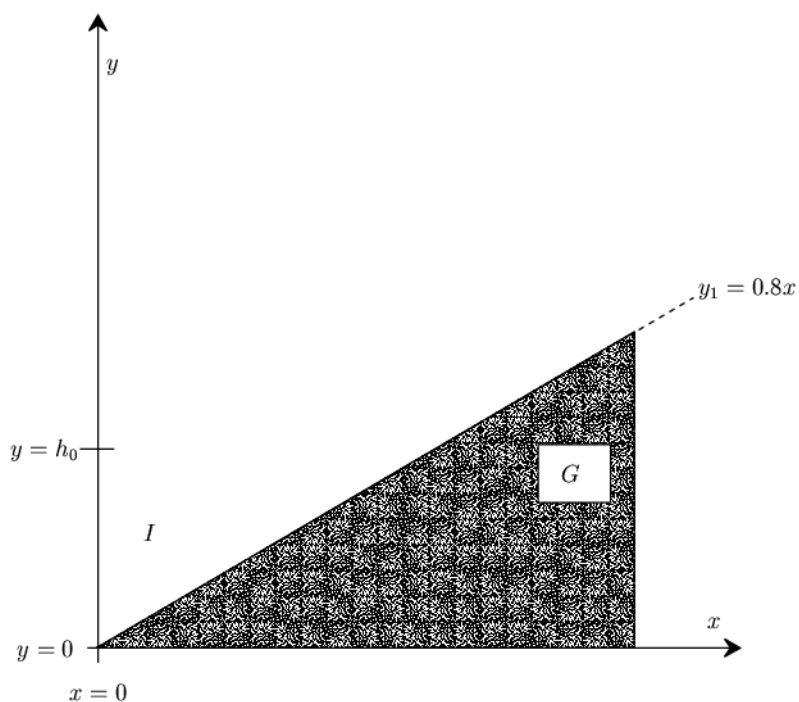
- a) (0,5 bodu) Uvažujte tlustou ledovou čepičku umístěnou v bodě průměrného tepelného toku z vnitřku země. Užijte data z tabulky a vypočtěte tloušťku d ledové vrstvy odtáté každým rokem.

- b) (3,5 bodu) Uvažujte nyní horní povrch ledové čepičky. Povrch pod ledem má sklon α . Horní povrch čepičky má sklon β (viz obr. 2.1). Svislá tloušťka ledu v bodě $x = 0$ je h_0 . Z toho důvodu může být horní a dolní povrch ledu popsán rovnicemi

$$y_1 = x \operatorname{tg} \alpha, \quad y_2 = h_0 + x \operatorname{tg} \beta.$$

Odvodte vztahy pro tlak p na spodu ledové čepičky jako funkci horizontální souřadnice x .

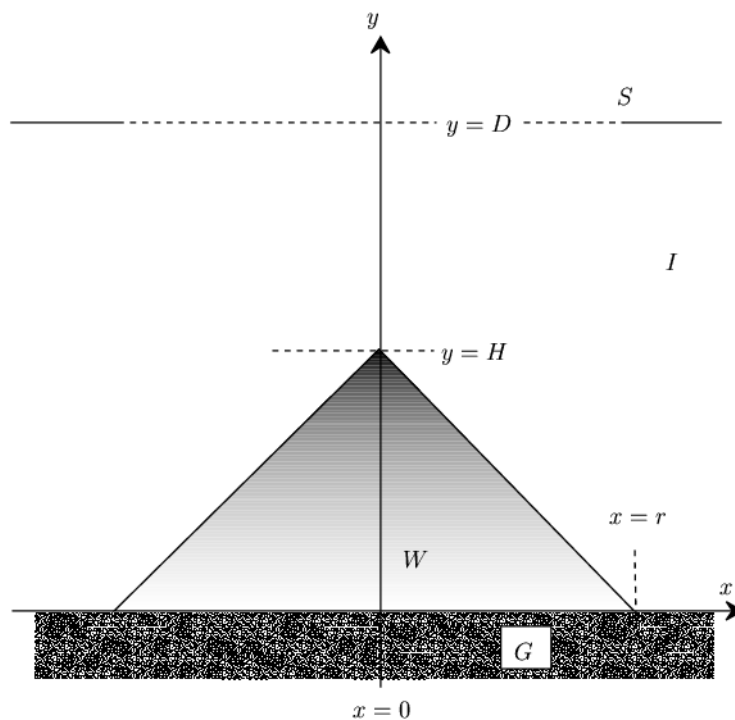
Matematicky formulujte podmínku mezi β a α tak, aby voda ve vrstvě mezi ledovou čepičkou a zemí netekla v žádném směru. Ukažte, že tuto podmínku lze psát jako $\operatorname{tg} \beta = s \operatorname{tg} \alpha$. Nalezněte koeficient s .



Obr. 2.2

Přímka $y_1 = 0,8x$ na obr. 2.2 ukazuje povrch země pod ledovou čepičkou. Vertikální tloušťka h_0 v bodě $x = 0$ je 2 km. Předpokládejte, že voda na dně je v rovnováze.

Na graf nakreslete přímku y_1 a přidejte přímku y_2 ukazující horní povrch ledu. Na obrázku naznačte, která čára je která.

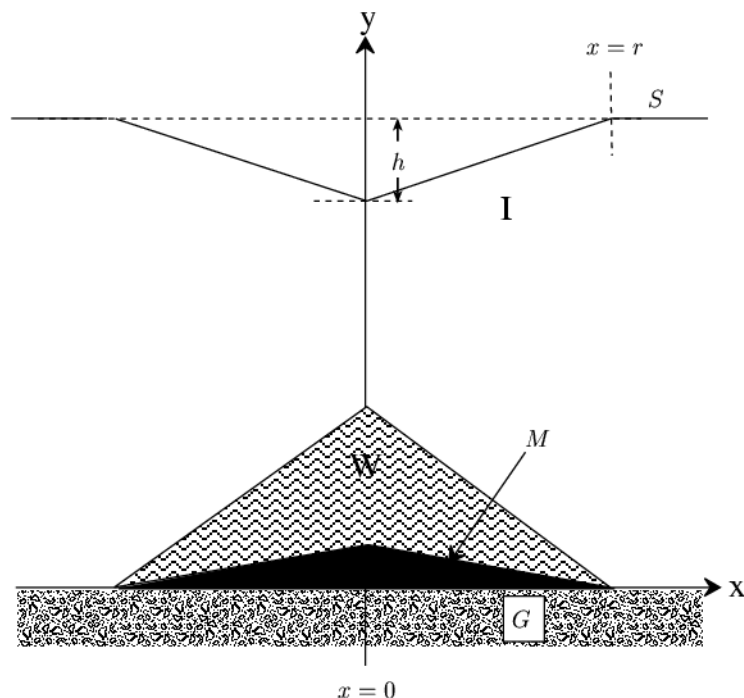


Obr. 2.3

- c) (1 bod) Uvnitř velkého kusu ledu na vodorovné zemi a původní konstantní tloušťkou $D = 2,0$ km, se zformuje táním ledu kužel vody výšky $H = 1,0$ km a poloměru $r = 1,0$. (obr. 2.3) Předpokládáme, že zbylý led se přizpůsobuje pouze vertikálním pohybem.

Ukažte analyticky a graficky tvar povrchu ledové čepičky poté, co se zformuje vodní kužel a je dosažena hydrostatická rovnováha.

- d) (5 bodů) Ve své roční expedici mezinárodní skupina vědců zkoumá takovou ledovou čepičku v Antarktidě. Oblast je normálně širokou plošinou, avšak tentokrát našli hlubokou kráterovitou proláklinu, zformovanou jako kužel obrácený špičkou dolů o hloubce $h = 100$ m a poloměru $r = 500$ m. (obr. 2.4). Tloušťka ledu v této oblasti je 2000 m.



Obr. 2.4

Po diskuzi se vědci usoudili, že nejvíce pravděpodobnou možností je, že zde byla malá vulkanická erupce pod ledovou čepičkou. Malé množství magmatu (roztavené skály) tlačilo na dně ledové čepičky, ztuhlo a ochladilo se, přičemž roztavilo příslušné množství ledu. Vědci zkusili následně odhadnout množství proniklý objem magmatu a zkoumali, co se stalo s roztátou vodou.

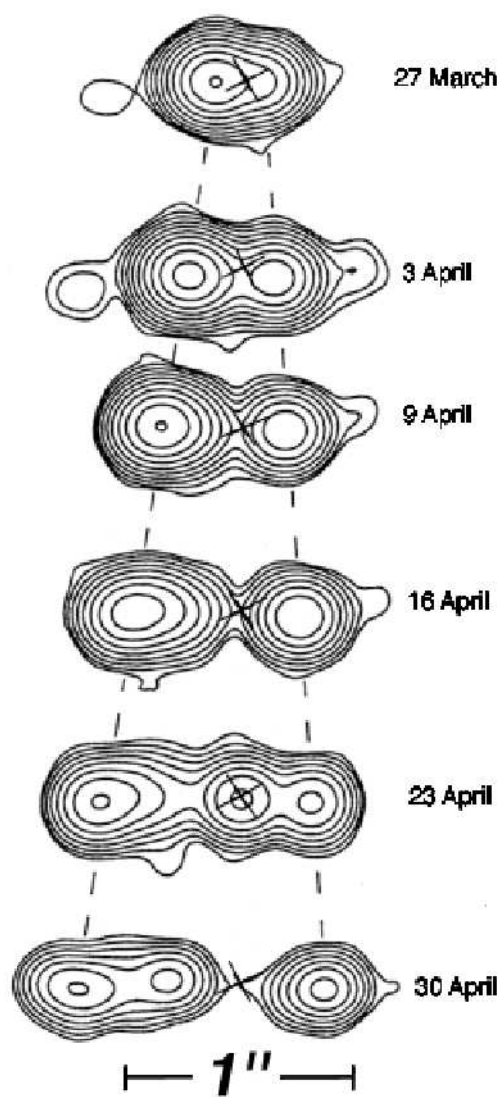
Předpokládejte, že led se pohybuje pouze vertikálně. Dále předpokládejte, že magma je kompletně roztavené a na počátku má teplotu 1200°C . Pro jednoduchost ještě předpokládejte, že vnikání má tvar kužele s kruhovou základnou pod kuželovitou proláklinou v povrchu. Čas výstupu magmatu byl krátký vzhledem k času tepelné výměny. Tepelný tok byl (předpokládáme) primárně vertikální, takže objem roztátého ledu je v každém čase ohraničen kuželovitým povrchem umístěným nad středem pronikání magmatu.

Za těchto daných předpokladů probíhá tání ledu ve dvou krocích. Při prvním není voda v tlakové rovnováze s povrchem magmatu a tudíž odplave pryč. O vodě plavající pryč můžeme předpokládat, že má teplotu 0°C . Následně je dosaženo hydrostatické rovnováhy a voda se akumuluje nad vniklým magmatem namísto aby odplavala pryč.

Při dosažení termální rovnováhy určete následující veličiny.

1. Výšku H vrcholu vodního kužele zformovaného pod ledovou čepičkou, vyhledem k původnímu dolnímu okraji ledové čepičky.
2. Výšku h_1 vniklého magmatu
3. Celkovou hmotnost m_{tot} vyprodukované vody a hmotnost m' vody, která odplavala pryč.

Nakreslete tvar vniklého magmatu a vody, která zůstala pod ledem. Užijte systém souřadnic navržený na obr. 2.4.



Obr. 3.1

3. úloha – Rychlejší než světlo?

V této úloze budeme analyzovat a interpretovat měření provedená v roce 1994. Jednalo se o emisi rádiových vln ze složitého kombinovaného zdroje v naší galaxii.

Přijímač byl nalazen na široký pás radiových vln o vlnových délkách kolem několika centimetrů. Obr. 3.1 ukazuje sérii obrázků zaznamenaných v různých časech. Obrysy naznačují konstantní sílu vyzařování stejně jako vrstevnice na geografických mapách. Dvě maxima na obrázku jsou interpretovány jako dva objekty pohybující se od společného středu naznačeného křížkem na obrázcích. (Střed, považovaný za pevný bod v prostoru, je také silným zářičem, ale především na jiných vlnových délkách). Měření byla provedena ve dnech různého data, ale ve stejný denní čas.

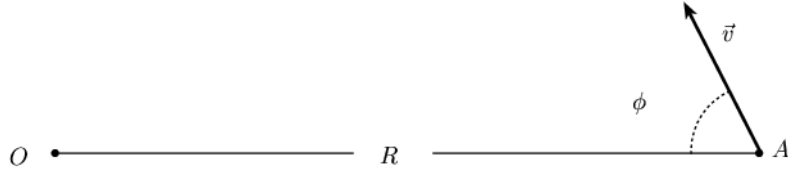
Stupnice obrázku je daná úsečkou vymezující jednu úhlovou vteřinu (arc second = as). ($1 \text{ as} = 1/3600$ úhlového stupně) Vzdálenost nebeského tělesa ve středu obrázku, určeného křížkem, je odhadována na $R = 12,5 \text{ kpc}$. Kiloparsec (kpc) je roven $3,09 \cdot 10^{19} \text{ m}$. Rychlost světla je $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Výpočet chyb se při řešení nepožaduje.

- a) (2 body) Označme úhlovou pozici obou zářičů, vzhledem k jejich společnému středu, $\theta_1(t)$ a $\theta_2(t)$, kde indexy 1 a 2 označují postupně levý a pravý objekt, a t je čas pozorování. Úhlové rychlosti, jak se jeví ze Země, jsou ω_1 a ω_2 . Příslušné příčné posuvné rychlosti obou zdrojů označme $v'_{1,\perp}$ a $v'_{2,\perp}$.

Užitím obrázku 3.1, nakreslete graf a nalezněte s jeho pomocí hodnoty ω_1 a ω_2 v miliúhlových vteřinách za den (milli-arc-seconds per day = mas/d). Také určete numerické hodnoty $v'_{1,\perp}$ a $v'_{2,\perp}$. (Některými výsledky mohou být překvapivé.)

- b) (3 body) Za účelem rozřešení záhady vzniklé v části (a), uvažujme světelný zdroj pohybující se rychlostí $\vec{v}$ pod úhlem ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) směrem ke vzdálenému pozorovateli O . (Obr. 3.2) Rychlost lze psát jako $v = \beta c$, kde c je rychlost světla. Vzdálenost ke zdroji, měřená pozorovatelem, je R . Úhlová rychlost zdroje, jak ji vidí pozorovatel, je ω , a příslušná posuvná rychlost kolmá k čáře pohledu pozorovatele je $v'_\perp$.

Nalezněte ω a $v'_\perp$ v závislosti na β , R a ϕ .



Obr. 3.2

- c) (1 bod) Předpokládejme, že oba zářiče, popsané v úvodu a v části (a), se pohybují v opačných směrech se stejnou rychlostí $v = \beta c$. Poté výsledky z části (b) umožňují vypočítat β a ϕ z úhlových rychlostí ω_1 a ω_2 a vzdálenosti R . ϕ zde značí úhel definovaný v části (b); objektu nalevo přísluší index 1 v části (a).

Odvoďte vzorce pro β a ϕ v závislosti na známých veličinách a určete jejich numerické hodnoty z dat získaných v části (a).

- d) (2 body) Pro situaci s jediným tělesem v části (b) nalezněte podmínku, kdy je zdánlivá kolmá rychlost $v'_\perp$ větší než rychlost světla c .

Podmínku napište ve tvaru $\beta > f(\phi)$ a určete analytické vyjádření funkce f .

Vykreslete graficky fyzikálně relevantní oblast (β, ϕ) -roviny. Ukažte šrafováním, ve které části této roviny leží podmínka $v'_\perp > c$.

- e) (1 bod) Stále uvažujme situaci s jedním tělesem popsanou v části (b). Nalezněte výraz pro maximální hodnotu $(v'_\perp)_{max}$ zdánlivé kolmé rychlosti $v'_\perp$ pro dané β . Všimněte si, že tato rychlost roste bez omezení, když $\beta \rightarrow 1$.

- f) (1 bod) Odhad pro R daný v úvodu není příliš věrohodný. Vědci proto začali uvažovat o lepší a přímější metodě určení R . Jedna z idejí následuje. Předpokládejte, že můžeme určit a změřit Dopplerův posun vlnových délek λ_1 a λ_2 záření obou zářících objektů, příslušné stejné známé původní vlnové délce λ_0 v klidové vztažné soustavě vzhledem k oběma objektům.

Vyjdeme-li z rovnic pro relativistický Dopplerův efekt, $\lambda = \lambda_0(1 - \beta \cos \phi)(1 - \beta^2)^{-1/2}$, a za předpokladu, že oba objekty mají stejnou

rychlost v , ukažte, že neznámou $\beta = v/c$ lze vyjádřit v závislosti na λ_0 , λ_1 a λ_2 jako

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{\alpha \lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}$$

Určete číselnou hodnotu koeficientu α .

Můžete si všimnout, že navrhované měření vlnových délek v praxi vlastně poskytne nový odhad vzdálenosti.