

Úlohy z 29. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 1998 Reykjavík - Island

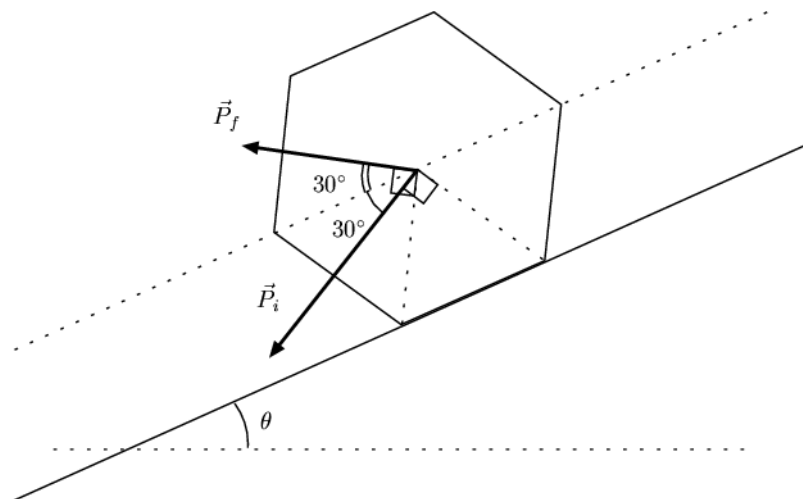
Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

a) Metoda řešení 1

Při dopadu začne hranol rotovat kolem nové osy, tj. kolem rohu, na který dopadl. Síla reakce desky nemá žádný moment vzhledem k této ose, tudíž se vzhledem k této ose zachovává moment hybnosti během krátkého intervalu dopadu. Hybnost hranolu jako celku má ten samý směr jako rychlost hmotného středu ($\vec{P} = M\vec{v}_C$, kde se index C vztahuje k hmotnému středu), a tento směr snadno určíme, pokud známe osu rotace v daném čase. Těsně před dopadem je $\vec{P}$ orientována 30° dolů vzhledem k desce, zatímco po dopadu je orientována 30° nad desku (viz obrázek 1.3).



Obr. 1.3

Abychom našli moment hybnosti vzhledem k rohu dopadu chvíli před dopadem, použijeme rovnice pro moment hybnosti vzhledem k libovolné ose vztažené k momentu hybnosti $\vec{L}_C$ kolem osy procházející hmotným středem (obě osy jsou rovnoběžné):

$$\vec{L} = \vec{L}_C + M\vec{r}_C \times \vec{v}_C$$

kde se index C vztahuje k hmotnému středu tělesa. Pokud rovnici píšeme pro bod dopadu, míří vektor $\vec{r}_c$ z bodu dopadu do hmotného středu tělesa. Vektory na pravé straně rovnice mají oba ten samý směr. Z toho důvodu dostaneme pro velikosti těsně před dopadem ¹

$$|\vec{r}_C \times \vec{v}_C| = r_C v_{Ci} \sin 30^\circ = a^2 \omega_i / 2$$

$$L_i = I \omega_i = \frac{1}{2} M a^2 \omega_i = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \right) M a^2 \omega_i = \frac{11}{12} M a^2 \omega_i$$

Na druhou stranu, moment hybnosti vzhledem k rohu určíme po dopadu pomocí vztahu ²

$$L_f = I' \omega_f = \frac{17}{12} M a^2 \omega_f$$

kde se index f vždy vztahuje vzhledem k situaci těsně po dopadu. Můžeme poznamenat, že rozdíl je způsoben rozdílnými směry vektorů $\vec{v}_{Ci}$ a $\vec{v}_{Cf}$. Nzní, když uvažíme zákon zachování momentu hybnosti, $L_i = L_f$, dostaneme vztah mezi úhlovými rychlostmi:

$$\omega_f = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{17}{12}} \omega_i = \frac{11}{17} \omega_i$$

Odtud ihned vyplývá, že $s = \frac{11}{17}$ a že je tento koeficient nezávislý na veličinách a , ω_i a θ .

Metoda řešení 2

Při dopadu hranol přijme impuls $\vec{P}$ [N . s] od desky v rohu, kde dopadu proběhl. Není žádná reakce v rohu, který opouští desku. Impuls má složku $P_{\parallel}$ rovnoběžnou s nakloněnou rovinou (kladný směr bereme vzhůru podél nakloněné roviny (viz obr. 1.3)) a složku $P_{\perp}$ kolmou vzhledem k rovině (vzhledem k desce kladnou vzhůru - viz stejný obr.).

¹Stejný výsledek lze dostat dvojím užitím Steinerovy věty od předchozí osy ke středu a od nové osy ke středu

²Nebo také jinak: $L_f = I \omega_f + M |\vec{r}_C \times \vec{v}_{Cf}| = I \omega_f + M a^2 \omega_f \sin 90^\circ$

$$L_f = \left(\frac{5}{12} + 1 \right) M a^2 \omega_f = \frac{17}{12} M a^2 \omega_f$$

Můžeme stanovit tři rovnice, které obsahují tři neznámé $P_{\parallel}$, $P_{\perp}$ a poměr $s = \frac{\omega_f}{\omega_i}$. Veličina $P_{\parallel}$ je vlastně změna rovnoběžné složky hybnosti hranolu a $P_{\perp}$ je odpovídající změna kolmé složky hybnosti hranolu. Tudíž:

$$P_{\parallel} = M(\omega_i - \omega_f)a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P_{\perp} = M(\omega_i + \omega_f)a\frac{1}{2}$$

Nakonec dostáváme:

$$P_{\perp}a\frac{1}{2} - P_{\parallel}a\frac{\sqrt{3}}{2} = I(\omega_i - \omega_f)$$

neboť pravá strana je změna momentu hybnosti vzhledem k centrální ose. Z těchto tří rovnic určíme hodnotu s , pochopitelně stejnou jako při použití předchozí metody.

- b) Posuvná rychlost hmotného středu těsně před dopadem je $a\omega_i$ a těsně po dopadu $a\omega_f$. Víme, že můžeme vždy psát kinetickou energii rotujícího tuhého tělesa jako sumu „vnitřní“ a „vnější“ kinetické energie:

$$K_{celk} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_C^2$$

Odtud vidíme, že pro náš případ je celková kinetická energie K_{celk} přímo úměrná ω^2 , a proto dostáváme

$$K_f = rK_i = \left(\frac{11}{17}\right)^2 K_i = \frac{121}{289}K_i$$

a tedy je $r = \frac{121}{289} \approx 0,419$.

- c) Kinetická energie K_f po dopadu musí být schopna vyzdvihnout hmotný střed do jeho nejvyšší polohy, přímo nad bod dotyku. Úhel, o který se posune $\vec{r}_C$ je

$$x = \frac{\alpha}{2} - \theta$$

kde $\alpha = 60^\circ$ je úhel při vrcholu trojúhelníka dotýkajícího se středu hranolu³. Energie potřebná pro tot zdvihnutí středu je

$$E_0 = Mga(1 - \cos x) = Mga(1 - \cos(30^\circ - \theta))$$

³Obecně je $\alpha = 2\pi/N$

a my dostáváme podmínku

$$K_f = rK_i > E_0 = Mga(1 - \cos(30^\circ - \theta))$$

tudíž

$$\delta = \frac{1}{r}(1 - \cos(30^\circ - \theta))$$

(Lze uvážit, že $\cos(30^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta$).

- d) Nechť $K_{i,n}$ a $K_{f,n}$ jsou kinetické energie před a po n -tém dopadu. Ukázali jsme, že platí vztah

$$K_{f,n} = rK_{i,n}$$

kde $r = \frac{121}{289}$ pro šestiboký hranol. Mezi následujícími dopady výška hmotného středu hranolu klesne o $a \sin \theta$ a jeho kinetická energie vzroste z tohoto důvodu

$$\Delta = Mga \sin \theta$$

Tudíž máme

$$K_{i,n+1} = rK_{i,n} + \Delta$$

Nemusíme psát kompletní výraz pro $K_{i,n}$ jako funkci $K_{i,1}$ a n , abychom našli limitu. To by byl skutečný důkaz, že limita existuje (viz dole), avšak to je již dáno v zadání. Tudíž můžeme psát $K_{i,n+1} \approx K_{i,n}$ s libovolnou přesností pro dostatečně vysoké n . Limita $K_{i,0}$ musí splňovat tuto iterační podmínku, tj.

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + \Delta$$

a řešením dostaneme

$$K_{i,0} = \frac{\Delta}{1 - r}$$

Odtud

$$\kappa = \frac{\sin \theta}{1 - r}$$

Můžeme taky vyřešit problém explicitně, pokud sepíšeme úplnou soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} K_{i,2} &= rK_{i,1} + \Delta, \\ K_{i,3} &= rK_{i,2} + \Delta = r^2K_{i,1} + (1+r)\Delta, \\ &\dots \\ K_{i,n} &= r^{n-1}K_{i,1} + (1+r+\dots+r^{n-2})\Delta, \\ K_{i,n} &= r^{n-1}K_{i,1} + \frac{1-r^{n-1}}{1-r}\Delta \end{aligned}$$

Pokud píšeme limitu pro $n \rightarrow \infty$, dostaneme

$$K_{i,n} \rightarrow K_{i,0} = \frac{\Delta}{1-r}$$

což je ten samý výsledek jako předchozí.

Pokud vypočteme změnu kinetické energie během celého cyklu, tj. těsně po předchozím dopadu číslo n těsně před následující dopad $n+1$, dostaneme

$$\Delta K_{i,n} = K_{i,n+1} - K_{i,n} = (r-1)r^{n-1}K_{i,1} + r^{n-1}\Delta = r^{n-1}(\Delta - (1-r)K_{i,1})$$

Tato změna je kladná, pokud počáteční hodnota $K_{i,1} < K_{i,0}$, takže $K_{i,n}$ bude stoupat k limitní hodnotě $K_{i,0}$. Jestliže na druhou stranu je $K_{i,1} > K_{i,0}$, kinetická energie $K_{i,n}$ těsně před dopadem bude klesat k limitě $K_{i,0}$.

Všechny tyto úvahy připomínají pohyb se třením, které se zvětšuje s rychlostí. Matematicky řečeno, hlavní rozdíl je, že zde počítáme s diferenciálními rovnicemi namísto diferenciálních.

- e) Aby hranol stále pokračoval v pohybu, musí být limitní hodnota K_i v části (d) větší než minimální hodnota pro pokračování pohybu nalezená v části (c):

$$\frac{1}{1-r}\Delta = \frac{1}{1-r}Mga \sin \theta > Mga(1 - \cos(30^\circ - \theta))/r$$

Položíme $A = \frac{r}{1-r} = \frac{121}{168}$:

$$A \sin \theta > 1 - \cos 30^\circ \cos \theta - \sin 30^\circ \sin \theta$$

$$(A + 1/2) \sin \theta + \sqrt{3}/2 \cos \theta > 1$$

Abychom vyřešili tuto nerovnici položíme ⁴

$$u = \arccos \left(\frac{A + 1/2}{\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}} \right) \approx 35,36^\circ$$

a obdržíme

$$\cos u \sin \theta + \sin u \sin \theta > 1/\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}$$

$$\sin(u + \theta) > 1/\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}$$

$$\theta > \arcsin\{1/\sqrt{(A + 1/2)^2 + 3/4}\} - u \approx 41,94^\circ - 35,36^\circ = 6,58^\circ.$$

Odtud tedy

$$\theta_0 \approx 6,58^\circ$$

Pokud $\theta > \theta_0$ a kinetická energie před prvním dopadem je vyhovující výsledkům části (c), nastane neurčitě dlouhý valivý pohyb.

⁴Můžete samozřejmě vyřešit jakoukoliv rovnost čistě numerickou cestou, nebo postupným odhadováním, nebo užitím aproximací $\sin \phi \approx \phi$ a $\cos \phi \approx 1 - \phi^2/2$.

2. úloha

a) Na základě zákona zachování energie máme

$$J_Q \cdot 1 \text{ rok} = L_i \rho_i d,$$

$$d = \frac{J_Q \cdot 1 \text{ rok}}{L_i \rho_i} = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

b) Nechť p_a je atmosférický tlak a považujeme ho za konstantní. V hloubce z uvnitř ledové čepičky je tlak dán jako

$$p = \rho_i g z + p_a.$$

Tudíž na spodu ledové čepičky, kde $z = y_2 - y_1$:

$$p = \rho_i g (y_2 - y_1) + p_a = \rho_i g x (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) + \rho_i g h_0 + p_a.$$

Aby se voda pod ledovou čepičkou nepohybovala, tlak musí být hydrostatický (triviálně, ale může být dokázáno z Bernoulliho rovnice), tj.

$$p = \textit{konstanta} - \rho_w g y_1 = \textit{konstanta} - \rho_w g x \operatorname{tg} \alpha.$$

Tudíž

$$\rho_i g x (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) = \rho_w g x \operatorname{tg} \alpha,$$

což vede k

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\rho_w - \rho_i}{\rho_i} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\Delta \rho}{\rho_i} \operatorname{tg} \alpha \approx -0,091 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$s = -\frac{\Delta \rho}{\rho_i} = -0,091.$$

(Znaménko minus je důležité.)

Tento výsledek může být získán různými úvahami o hmotném elementu vody pod ledem při požadavku rovnováhy. Nyní pokračujeme v řešení.

Pro $\operatorname{tg} \alpha = 0,8$ dostaneme $\operatorname{tg} \beta = -0,073$ a tudíž funkci

$$y_2 = 2 \text{ km} - 0,073x.$$

- c) Jestliže se led přizpůsobuje pouze vertikálním pohybem, nalezneme, že kuželová proláklina v povrchu má ten samý poloměr 1,0 km jako vniklé magma. Podle (b) má hloubku

$$h = |r \operatorname{tg} \beta| = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} r \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} H$$

Číselně $h = 91$ m.

- d) Objem rotačního kužele je $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Předpokládáme, že výška kužele vniklého magmatu je h_1 . Můžeme říci, že nejprve odtaje ledový kužel tohoto objemu $V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1$. Tlaková rovnováha však ještě nebyla dosažena. Tudíž voda odtéká pryč a led stále udržuje kontak s povrchem vniklého magmatu a činí tak horní povrch ledu znovu horizontálním. Působením magmatu pak roztaje objem ekvivalentní kuželi výšky $h_2 = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} h_1$, čímž je dosažena rovnováha tlaků (podle části (c)). Během této druhé fáze roztátá voda také odtéká pryč. Za předpokladu, že vniklé magma stále není ochlazené na 0°C , pokračuje tání a roztaje objem ekvivalentní kuželi výšky h_3 , tato voda se akumuluje na místě, vytvoří kužel výšky $h'_3 = \frac{\rho_i}{\rho_w} h_3$ vzhledem k vrcholu kužele vniklého magmatu. Celková výška odtátého ledového kužele je

$$h_{tot} = h_1 + h_2 + h_3.$$

Hloubka prolákliny na povrchu je dána jako

$$h = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} (h_1 + h'_3),$$

kterou lze dostat nejsnáze uvažováním tlakové rovnováhy v konečné situaci (znovu podle části (c)). Tudíž, požadovaná výška vrcholu vodního kužele je

$$H = h_1 + h'_3 = \frac{\rho_i}{\Delta \rho} h = 1,1 \cdot 10^3 \text{ m.}$$

Tepelná rovnováha dává

$$\frac{1}{3} \pi r^2 \{ \rho_r h_1 (L_r + c_r \Delta T) - \rho_i L_i h_{tot} \} = 0,$$

kde $\Delta T = 1200^\circ\text{C}$ je změna teploty vniklého magmatu. Pomocí vztahu pro h_{tot} a užitím faktů, že $h_2 = \frac{\Delta \rho}{\rho_i} h_1$ a $h_3 = \frac{\rho_w}{\rho_i} h'_3$ dostaneme

$$h_{tot} = h_1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_i} h_1 + \frac{\rho_w}{\rho_i} h'_3 = \frac{\rho_w}{\rho_i} (h_1 + h'_3).$$

Tudíž

$$h_{tot} = \frac{\rho_w}{\rho_i}(h_1 + h'_3) = \frac{\rho_w}{\rho_i}H = \frac{\rho_w}{\Delta\rho}h = 1,20 \cdot 10^3 \text{ m}$$

To znamená, že kužel nedosáhne povrchu ledové čepičky. Pomocí této hodnoty můžeme vyřešit rovnici pro h_1 :

$$\rho_r h_1 (L_r + c_r \Delta T) = \frac{\rho_i \rho_w L_i h}{\Delta \rho}$$

$$h_1 = \frac{\rho_i \rho_w L_i h}{\Delta \rho \rho_r (L_r + c_r \Delta T)}$$

Číselně vychází $h_1 = 103 \text{ m}$. Celková hmotnost vody je samozřejmě rovna celkové hmotnosti roztátého ledu a je

$$m_{tot} = \frac{1}{3} \rho_i \pi r^2 h_{tot} = 2,9 \cdot 10^{11} \text{ kg},$$

hmotnost vody, která otekla pryč, je

$$m' = \frac{h_1 + h_2}{h_{tot}} m_{tot} = \frac{\rho_w h_1}{\rho_i h_{tot}} m_{tot} = 2,9 \cdot 10^{11} \text{ kg}.$$

3. úloha

- a) Na obrázku 3.1 označíme středy zdrojů tak pečlivě, jak můžeme. Nechť $\theta_1(t)$ je úhlová vzdálenost levého středu od křížku (jako funkce času) a $\theta_2(t)$ je úhlová vzdálenost pravého středu. Změříme na obrázku tyto veličiny v daných časech pomocí pravítka a převedeme podle uvedené stupnice na úhlové vteřiny (as). Výsledky poskytují tato numerická data:

čas [den]	θ_1 [as]	θ_2 [as]
0	0,139	0,076
7	0,253	0,139
13	0,354	0,190
20	0,468	0,253
27	0,601	0,316
34	0,709	0,367

Neurčitost při odečítání pravítkem odhadneme na $\pm 0,5$ mm, což dává chybu $\pm 0,013$ as v hodnotách θ . Vykreslíme získaná data do grafu (obr. 3.3).

Proložením přímky skrz získaná data obdržíme tyto výsledky:

$$\omega_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = (17,0 \pm 1,0)\text{mas/d} = 9,54 \cdot 10^{-13} \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = (8,7 \pm 1,0)\text{mas/d} = 4,88 \cdot 10^{-13} \text{ rad/s}$$

$$v'_{1,\perp} = \omega_1 R = 3,68 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx (1,23 \pm 0,07)c$$

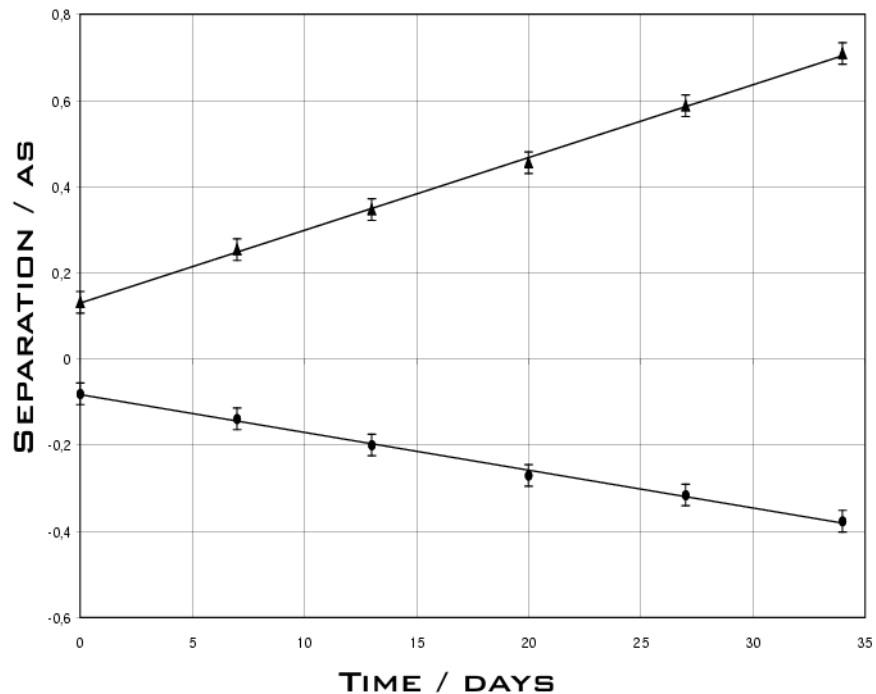
$$v'_{2,\perp} = \omega_2 R = 1,89 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx (0,63 \pm 0,07)c$$

- b) Uvažujme pohyb zdroje během časového intervalu Δt z bodu A do bodu A' (viz obr. 3.4). Pak máme

$$\vec{r}_{AA'} = \vec{r}_{A'} - \vec{r}_A = \vec{v} \cdot \Delta t.$$

Nyní nechť $\Delta t'$ značí rozdíl příchozích časů signálů z A a A' . Kvůli rozdílným vzdálenostem A a A' a konečné rychlosti světla, c , máme

$$\Delta t' = \Delta t + (r_{A'} - r_A)/c.$$



Obr. 3.3

Pro malá Δt , taková, že $v\Delta t \ll r_A = R$, máme

$$r_{A'} - r_A \approx -v\Delta t \cos \phi$$

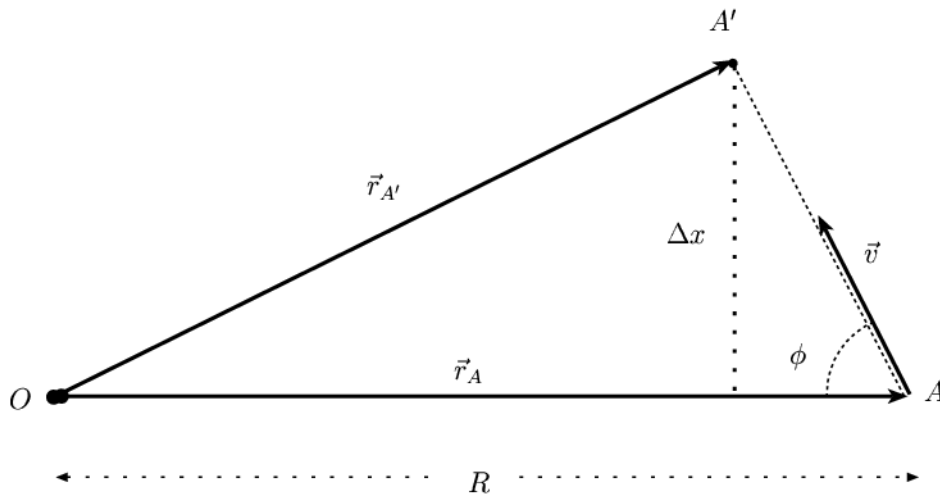
a tudíž

$$\Delta t' \approx \Delta t(1 - \beta \cos \phi); \quad \beta = v/c.$$

To znamená, že pozorovatel v bodě O pozoruje zdánlivou posuvnou rychlost zdroje

$$v'_\perp = \frac{\Delta x}{\Delta t'} = \frac{\Delta x}{\Delta t(1 - \beta \cos \phi)} = \frac{c\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi},$$

kde jsme užili vztahu, že skutečná rychlost ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem je $v_\perp = \Delta x / \Delta t = c\beta \sin \phi$.



Obr. 3.4

Úhlová rychlost pozorovaná v bodě O je

$$\omega = \frac{v'_\perp}{R} = \frac{c\beta \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)}.$$

- c) Obr. 3.5 ukazuje situaci v našem případě. Uvažme vztahy dané v zadání (jest $v_1 = v_2 = v$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ a $\phi_2 = \pi - \phi_1$). Položme $\phi = \phi_1$, pak máme $\sin \phi_2 = \sin \phi$ a $\cos \phi_2 = -\cos \phi$. Pak poslední rovnice dává:

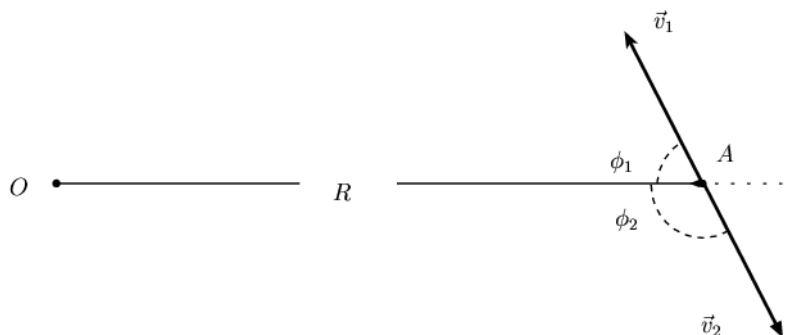
$$\omega_1 = \frac{c\beta \sin \phi}{R(1 - \beta \cos \phi)},$$

$$\omega_2 = \frac{c\beta \sin \phi}{R(1 + \beta \cos \phi)}.$$

Veličiny ω_1 , ω_2 a R jsou dány, ale β a ϕ je nutné určit. Pomocí jednoduché algebry dostaneme:

$$(1 - \beta \cos \phi)\omega_1\omega_2 = \beta c \sin \phi \omega_2 / R,$$

$$(1 + \beta \cos \phi)\omega_2\omega_1 = \beta c \sin \phi \omega_1 / R,$$



Obr. 3.5

Odečtením dostaneme

$$2\beta \cos \phi \omega_2 \omega_1 = \beta c \sin \phi (\omega_1 - \omega_2) / R,$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{2R\omega_2\omega_1}{c(\omega_1 - \omega_2)},$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{2R\omega_2\omega_1}{c(\omega_1 - \omega_2)} \right).$$

Vydělením předchozích rovnic dostaneme

$$\omega_1(1 - \beta \cos \phi) = \omega_2(1 + \beta \cos \phi)$$

$$\beta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\cos \phi (\omega_1 + \omega_2)}.$$

Dosazením vyjde: $\phi = 68,8^\circ \pm 2^\circ$, $\beta = 0,892 \pm 0,08$.

- d) Vztah pro $v'_\perp$ ukazuje, že pozorovatel zjistí zdánlivou posuvnou rychlost větší nebo rovnou rychlosti světla tehdy a jen tehdy, když:

$$\frac{\beta \sin \phi}{1 - \beta \cos \phi} > 1.$$

Pokud $\beta < 1$, je podmínka ekvivalentní zápisu:

$$\beta \sin \phi \geq 1 - \beta \cos \phi,$$

$$\begin{aligned}\beta(\sin \phi + \cos \phi) &\geq 1, \\ \beta\sqrt{2}(\sin \phi \cos \frac{\pi}{4} + \cos \phi \sin \frac{\pi}{4}) &\geq 1, \\ \sin(\phi + \frac{\pi}{4}) &\geq \frac{1}{\beta\sqrt{2}},\end{aligned}$$

a tudíž je podmínka splněna tehdy, když

$$\beta > f(\phi) = \left(\sqrt{2} \sin(\phi + \pi/4) \right)^{-1}.$$

Fyzikální význam má pouze oblast (β, ϕ) -roviny

$$(\beta, \phi) \in [0, 1] \times [0, \pi].$$

Je zřejmé, že podmínka může být splněna pouze pro $\phi \in [0, \pi/2]$ a z konečného vztahu je zřejmé, že poskytuje pro ϕ řešení pouze pro $\beta \geq 1/\sqrt{2}$.

Proto můžeme zúžit naši pozornost na oblast

$$(\beta, \phi) \in [2^{-1/2}, 1] \times [0, \pi/2].$$

Zobrazení

$$(\beta, \phi) \rightarrow \beta \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right)$$

je v této oblasti spojitě. Postačí proto nalézt hranici této oblasti, definované rovností

$$\beta \sin \left(\phi + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Toto určuje β jako funkci ϕ , která je narysována na obr. 3.6 jako křivka ohraničující šrafovanou část, kde $v'_\perp > c$.

- e) K nalezení extrému $v'_\perp$ jako funkce ϕ derivujeme vztah získaný v části (b) a dostaneme

$$\frac{d}{d\phi} \left(\frac{v'_\perp}{c} \right) = \frac{\beta(\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^2}.$$

Tento výraz je nulový pro $\phi = \phi_m$, kde

$$\cos \phi_m = \beta; \quad \phi_m = \arccos \beta \in [0, \pi/2]$$

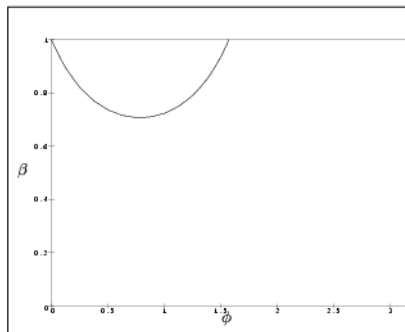


Figure 3.6: The region between the horizontal line and the curve in the upper left hand corner shows where $v'_{\perp}/c > 1$.

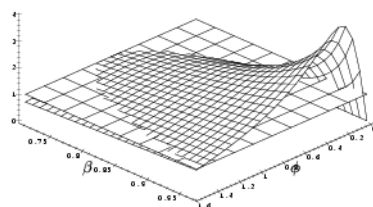


Figure 3.7: The curved surface is $v'_{\perp}/c$ as a function of β and ϕ . The plane represents the constant function $\beta = 1$.

Obr. 3.6

Abychom dokázali, že jde opravdu o maximum, derivujeme znovu a dostáváme

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) = -\beta \left(\frac{\sin \phi}{(1 - \beta \cos \phi)^2} + 2 \frac{\beta \sin \phi (\cos \phi - \beta)}{(1 - \beta \cos \phi)^3} \right)$$

V extrému

$$\left. \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{v'_{\perp}}{c} \right) \right|_{\phi_m} = -\frac{\beta \sin \phi_m}{(1 - \beta^2)^2} < 0,$$

což ukazuje, že pro ϕ_m opravdu nastává maximum. Odtud dostaneme (s využitím původně derivovaného vztahu)

$$(v'_{\perp})_{max} = \frac{\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Odtud přímo vyplývá, že pro

$$\phi_m \rightarrow 0 \leftrightarrow \beta \rightarrow 1; \quad (v'_{\perp})_{max} \rightarrow \infty.$$

Obrázek 3.7 ukazuje $v'_{\perp}/c$ jako funkci β a ϕ v oblasti $(\beta, \phi) \in [2^{-1/2}, 1] \times [0, \pi/2]$.

f) Máme rovnice pro relativistický Dopplerův efekt:

$$\frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_0} = \frac{1 \mp \beta \cos \phi}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Sečteme je, definujeme pomocný koeficient ρ a vyřešíme pro neznámou β :

$$\begin{aligned}\rho &:= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\lambda_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \rho^2(1 - \beta^2) &= 1, \\ \beta &= \sqrt{1 - 1/\rho^2} = \sqrt{1 - \frac{4\lambda_0^2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}}.\end{aligned}$$

To dává pro koeficient

$$\alpha = 4.$$

Pokud přidáme poslední získanou rovnici k rovnicím pro $\tan \phi$ a β získaným v části (c), máme soustavu 3 rovnic, z nichž lze určit neznámé β , ϕ a R . Například lze vypočítat β z poslední rovnice, vyřešit rovnici pro ϕ a vypočítat pak pomocí této hodnoty R . Za předpokladu, že ω_1 a ω_2 jsou známé veličiny, poskytuje nám měření Dopplerova posuvu dobrý odhad vzdálenosti zdroje záření.