

Úlohy 28. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - Sudbury, Canada

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha – Scaling

- (a) Malé závaží visí na konce nehmotné ideální pružiny a kmitá nahoru a dolů vlastní frekvencí f . Když je pružina rozpůlena a závaží znovu přichyceno na konec, jaká je nová frekvence f' ? (1,5 bodu)
- (b) Poloměr atomu vodíku v jeho základním stavu je $a_0 = 0,0529$ nm (Bohrův poloměr). Jaký je poloměr a' „mion-vodíkového“ atomu, ve kterém je elektron nahrazen identicky nabitým mionem, jehož hmotnost je 207 krát větší než hmotnost elektronu?

Předpokládejte, že hmotnost protonu je mnohem větší než hmotnost mionu a elektronu. (2 body)

- (c) Střední teplota Země je $T = 287$ K. Jaká by byla nová střední teplota T' , kdyby se střední vzdálenost Země - Slunce zmenšila o 1% ? (2 body)
- (d) V daný den byl vzduch suchý a měl hustotu $\rho = 1,2500$ kg/m³. Druhý den vlhkost vzrostla a ve vzduchu byla 2% vodní páry. Tlak a teplota jsou ty samé jako předchozí den. Jaká je nyní hustota ρ' vzduchu? (2 body)

Střední molekulová hmotnost suchého vzduchu: 28,8 (g/mol)

Střední molekulová hmotnost vody: 18 (g/mol)

Předpokládejte, že vzduch i vodní pára se chovají jako ideální plyn.

- (e) Jistý typ helikoptéry se může vznášet, pokud mechanický výkon jeho motorů je P . Je-li jiná helikoptéra vyrobena jako přesně poloviční replika (ve všech lineárních rozměrech) předchozí helikoptéry, jaký je mechanický výkon P' nutný k jejímu vznášení? (2,5 bodu)

Řešení:

- (a) Nechť původní pružina má délku l a tuhost k . Frekvence f kmitání závaží hmotnosti m na konci pružiny je dána jako

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Tuhost pružiny k znamená, že je nutno vyvinout sílu F , abychom ji prodloužili o Δx :

$$k = \frac{F}{\Delta x}.$$

Uvažte středový bod pružiny během protažení; pohnul se pouze o vzdálenost $x/2$, zatímco vyvíjíme stejnou sílu F . Tudíž tuhost pružiny zkrácené na polovinu je dána jako

$$k' = \frac{F}{\Delta x/2} = 2k$$

a frekvence vlastních kmitů poloviční pružiny je pak

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = \sqrt{2}f.$$

- (b) **Metoda 1: kvantování momentu hybnosti**

De Broglieova vlnová délka částice je

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Podle de Broglieova principu (základního stavu):

$$2\pi r = \lambda,$$

což dává výsledek

$$pr = mvr = \hbar.$$

(Toto lze konstatovat přímo jako kvantování momentu hybnosti.) Podle Bohrova modelu můžeme považovat elektrostatickou přitažlivou sílu za sílu dostředivou:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{ke^2}{r^2}, \quad v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}},$$

$$\sqrt{ke^2mr} = \hbar, \quad \text{tj.} \quad r \sim \frac{1}{m}.$$

Poloměr mion-vodíkového atomu je pak dán jako

$$a_\mu = \frac{a_0}{207} = 0,256 \text{ pm.}$$

Metoda 2: užití rozměrové analýzy

Poloměr r vodíkového atomu v základním stavu závisí na následujících veličinách:

- Hmotnost m obíhající částice. (Jestliže hmotnost jádra pokládáme za mnohokrát větší než hmotnost obíhající částice, jádro můžeme považovat za nehybné a tudíž poloměr atomu nezávisí na hmotnosti jádra.)
- Elektrická síla mezi obíhající částicí a jádrem. To záleží na náboji jádra q_n , náboji obíhající částice q a konstantě ε_0 .
- Veličina $\hbar$, kvůli kvantování momentu hybnosti, jak bylo ukázáno dříve.

Tudíž:

$$r = A\hbar^\alpha m^\beta q_n^{\gamma_1} q^{\gamma_2} \varepsilon_0^\delta,$$

kde A , α , β , γ_1 , γ_2 a δ jsou bezrozměrné konstanty. Rozměrová rovnice (rozměrová zkouška) vychází takto:

$$[D] = [M]^{\alpha+\beta-\delta} [D]^{2\alpha-3\delta} [Q]^{\gamma_1+\gamma_2+2\delta} [T]^{2\delta-\alpha},$$

kde $[D]$ jsou rozměry délky, $[M]$ rozměry hmotnosti, $[Q]$ rozměry nábojů a $[T]$ časové rozměry (dimenze).

Čili získáme tuto soustavu rovnic:

$$\alpha + \beta - \delta = 0,$$

$$2\alpha - 3\delta = 1,$$

$$\gamma + 2\delta = 0,$$

$$2\delta - \alpha = 0.$$

Řešením dostaneme $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = -2$, $\delta = 1$. To naznačuje, že platí

$$r \sim \frac{1}{m}$$

a dále jako v předchozí metodě.

- (c) Pokud je světelný výkon na výstupu P a poloměr orbity Země R , pak je T dáno rovností přicházejícího a odcházejícího záření:

$$(1 - r) \frac{P}{4\pi R^2} \cdot \pi R_Z^2 = 4\pi R_Z^2 \varepsilon \sigma T^4,$$

kde r je odrazivost Země vzhledem k slunečnímu záření (albedo), R_Z je poloměr Země, ε je zářivost (emisivita) a σ Stefanova-Boltzmannova konstanta. Solární výkon P a střední orbitální poloměr Země R . Emisivita je funkcí teploty (což není nutné a priori předpokládat), ale změnu teploty považujeme za malou.

Jednoduše,

$$T \sim \sqrt{\frac{1}{R}},$$

a tudíž 1% redukce poloměr R dává 0,5% nárůst teploty, tj. asi 1,4 K, tedy

$$T' = 288,4 \text{ K}.$$

- (d) Stavová rovnice pro ideální plyn s N molekulami: $pV = NkT$. Dva identické objemy plynu toho samého tlaku a teploty obsahují ten samý počet molekul; tudíž hustota každého je přímo úměrná střední molekulové hmotnosti příslušného plynu.

Zde užijeme indexy d , m a w k označení „dry“ (suchý), „moist“ (vlhký) a „water“ (voda).

Pro suchý vzduch se střední molekulovou hmotností m_d platí:

$$\rho = \rho_d = m_d \frac{N_d}{V} = \frac{m_d p}{kT}.$$

Pro vlhký vzduch se střední molekulovou hmotností m_m platí:

$$\rho_m = m_m \frac{N_m}{V} = \frac{m_m p}{kT}.$$

Pro hmotnost M suchého vzduchu platí:

$$N_d \sim \frac{M}{28,8},$$

pro hmotnost M' vlhkého vzduchu

$$N_m \sim 0,02 \frac{M'}{18} + 0,98 \frac{M'}{28,8}.$$

Jelikož

$$N_m = N_d,$$

pak

$$\frac{\rho_m}{\rho_d} = \frac{M'}{M} = \frac{1}{28,8 \left(\frac{0,02}{18} + \frac{0,98}{28,8} \right)} = 0,9881$$

$$\rho' = \rho_m = 0,9881 \rho_d = 1,2352 \text{ kg/m}^3$$

- (e) Mechanický výkon P nutný, aby se helikoptéra vznášela, je úměrný tahu T rotoru dolů (úměrný své váze W) krát střední rychlost v dolů se pohybujícího sloupce vzduchu pod rotorem:

$$P = Tv$$

Listy (rotoru) udělují rychlost v vzduchu tekoucímu kolem úměrně k poměru dm/dt , a zdvihový objem listů vrtule je A :

$$T = v \frac{dm}{dt}; \quad \frac{dm}{dt} = \rho A v; \quad W = T = \rho A v^2.$$

Pokud je velikost helikoptéry charakterizována lineárním rozměrem L , pak:

$$W \sim L^3,$$

a protože tím pádem je také $T \sim L^3$ a $A \sim L^2$, musí být

$$v^2 \sim L,$$

$$v \sim \sqrt{L}.$$

Tudíž

$$P = Wv \sim L^{3,5}$$

a odtud přímo vyplývá, že nutný výkon pro poloviční helikoptéru je $P' = (1/2)^{3,5} P = 0,0884 P$.

2. úloha – Nuclear Masses and Stability

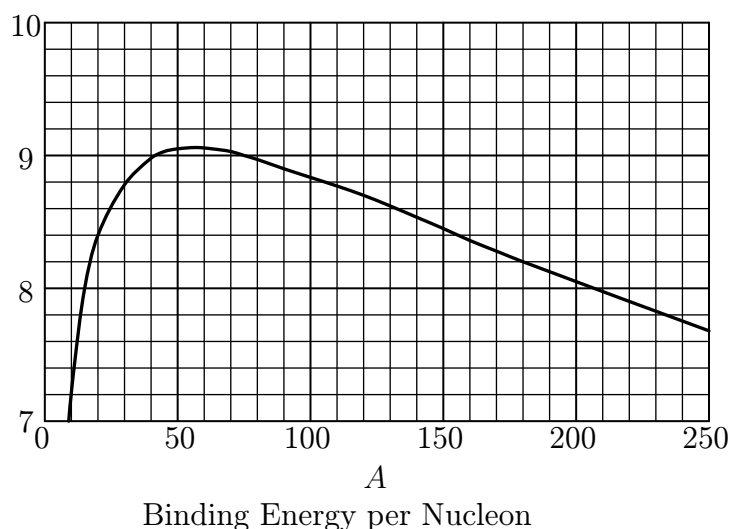
Všechny energie jsou v této úloze vyjádřeny v MeV. $1 \text{ MeV} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, nicméně tento údaj není nutný k řešení úlohy.

Hmotnost M atomového jádra se Z protony a N neutrony (tj. s nukleonovým číslem $A = N + Z$) je součet hmotností volných nukleonů (protonů a neutronů) minus vazebná energie B/c^2 .

$$Mc^2 = Zm_p c^2 + Nm_n c^2 - B$$

Graf nakreslený níže ukazuje maximální hodnotu B/A pro danou hodnotu A . Čím větší je hodnota B/A , tím více stabilní je jádro.

B/A (MeV)



- (a) Nad jistým nukleonovým číslem A mají jádra vazebné energie vždy dostatečně malé, aby mohla emitovat alfa-částice ($A = 4$). Užijte lineární aproximace křivky nad $A = 100$ pro odhad A . (3 body)

Pro tento model předpokládejte následující:

- Počáteční i konečné jádro jsou přítomny na křivce.
- Celková vazebná energie částice alfa je $B_4 = 25,0 \text{ MeV}$ (což nelze vyčíst z grafu!).

- (b) Vazebná energie atomového jádra se Z protony a N neutrony

$$A = N + Z$$

je dána poloempirickým vzorcem

$$B = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - a_a \frac{(N - Z)^2}{A} - \delta.$$

Jsou dány následující hodnoty δ :

$$\begin{array}{ll} +a_p A^{-\frac{3}{4}} & \text{pro jádro s lichým } N \text{ a lichým } Z \\ 0 & \text{pro jádro se sudým } N \text{ a lichým } Z \text{ nebo} \\ & \text{lichým } N \text{ a sudým } Z \\ -a_p A^{-\frac{3}{4}} & \text{pro jádro se sudým } N \text{ a sudým } Z \end{array}$$

Hodnoty koeficientů jsou: $a_v = 15,8$ MeV; $a_s = 16,8$ MeV; $a_c = 0,72$ MeV; $a_a = 23,5$ MeV; $a_p = 33,5$ MeV.

- (i) Odvoďte vztah pro protonové číslo Z_{max} jádra s největší vazebnou energií pro dané nukleonové číslo A . V této části zanedbejte δ člen. (2 body)
- (ii) Jaká je hodnota Z pro jádro $A = 200$ s největším poměrem B/A ? Zahrňte též efekt δ členu. (2 body)
- (iii) Uvažte tři jádra s nukleonovým číslem $A = 128$ (${}^{128}_{53}\text{I}$, ${}^{128}_{54}\text{Xe}$, ${}^{128}_{55}\text{Cs}$). Určete, které z nich je energeticky stabilní a která mají dostatečnou energii, aby se rozložili pomocí procesů uvedených níže. Určete Z_{max} jak je definováno v části (i). Při řešení označte procesy, které jsou energeticky možné a které nejsou. Uvažte pouze přechody mezi těmito třemi jádry.

Procesy rozpadu:

- (1) β^- -rozpad: emise elektronu z jádra
- (2) β^+ -rozpad: emise pozitronu z jádra
- (3) $\beta^-\beta^-$ -rozpad: emise dvou elektronů současně z jádra
- (4) Elektronový záchyt: zachycení elektronu jádrem.

Klidová energie elektronu (a pozitronu) je $m_e c^2 = 0,51$ MeV; klidová energie protonu je $m_p c^2 = 938,27$ MeV; klidová energie neutronu je $m_n c^2 = 939,57$ MeV. (3 body)

Řešení:

- (a) Proces α -rozpadu probíhá tímto způsobem: z prvku s nukleonovým číslem A vzniká nový prvek s nukleonovým číslem $A - 4$ a alfa-částice s nukleonovým číslem 4. Tudíž energetické kritérium je

$$m_A - m_{A-4} - m_4 > 0.$$

Počet a typ nukleonů se při rozpadu zachovává, proto stačí uvažovat pouze vazebné energie:

$$-B_A + B_{A-4} + B_4 > 0.$$

Pokud píšeme $B/A = a + bA$, kde a a b jsou konstanty (které lze odečíst z grafu), pak dostáváme nerovnost

$$-A(a + bA) + (A - 4)(a + b(A - 4)) + B_4 > 0,$$

$$-8bA - 4a + 16b + B_4 > 0.$$

Vyšetřováním grafu nalezneme dobrou lineární aproximaci pro B/A pro $A > 100$:

$$B/A = (9,6 - 0,0080A)\text{MeV},$$

tj. $a = 9,6$ MeV, $b = 0,0080$ MeV a podmínka dostává tvar:

$$-0,064A - 38,4 - 0,1 + 25,0 > 0,$$

$$A > 13,5/0,064 = 211.$$

- (b) (i) Poněvadž A je pevně dáno, potřebujeme uvažovat pouze předposlední dva členy, které závisí na Z .

$$\frac{dB}{dZ} = -2Za_c A^{-1/3} - \frac{a_a}{A}(-4A + 8Z),$$

$$Z_{max} = \frac{4a_a}{2a_c A^{-1/3} + 8a_a/A} = \frac{A}{2} \frac{1}{\left(1 + \frac{a_c A^{\frac{2}{3}}}{4a_a}\right)}$$

$$Z_{max} = 79,25$$

(ii) Úplný výraz pro diferenciální rovnici v (i) je:

$$\frac{dB}{dZ} = -2Za_cA^{-1/3} - \frac{a_a}{A}(-4A + 8Z) \pm a_pA^{-3/4}.$$

Poslední člen je kladný, pokud změna v Z o $+1$ změni jádro z typu sudý-sudý na typ lichý-lichý, a je záporný pro opačný případ. Poznamenejme, že A je v tomto případě kladné.

Jak naložíme s posledním členem?

Číslo Z_{max} musí být celé; a sudá čísla jsou preferovaná před lichými (neboť koeficient δ je pak kladný a B je tím pádem větší); vyjádřením dostaneme vztah podobný poslednímu v minulé části, takže zkusíme odhadnout $Z_{max} = 80$. K ověření odhadu vypočteme poslední tři členy pro různé hodnoty Z a vyjde nám skutečně, že pro $Z_{max} = 80$ je hodnota B největší (je nutné nezapomenout střídat znaménka u δ koeficientu). Pokud je A pevné číslo, pak je pro největší B největší také poměr B/A , čímž je tato část úlohy vyřešena.

(iii) Uvažujte pouze poslední tři členy v zadané rovnici; zbytek je konstantní, pokud je A konstantní. Nazvěme součet těchto veličin X . K nalezení, které z těchto jader je stabilní, potřebujeme najít rozdíly v X mezi nejbližšími druhy (sousedy) a porovnat tyto rozdíly s energetickými požadavky pro každý možný proces rozpadu.

1. β^- rozpad: $n \rightarrow p + e^-$, je tedy třeba $X > -1,30 + 0,51 = -0,79$ MeV.
2. β^+ rozpad: $p \rightarrow n + e^+$, je tedy třeba $X > 1,30 + 0,51 = 1,81$ MeV.
3. $\beta^-\beta^-$ rozpad: $2n \rightarrow 2p + 2e^-$, je tedy třeba $X > 2(-1,30 + 0,51) = -1,58$ MeV.
4. elektronový záchyt: $e^- + p \rightarrow n$, je tedy třeba $X > 1,30 - 0,51 = 0,79$ MeV.

Jádro	X (MeV)
$^{128}_{51}Sb$	496,59
$^{128}_{52}Te$	491,19
$^{128}_{53}I$	491,06
$^{128}_{54}Xe$	489,16
$^{128}_{55}Cs$	492,54

Z těchto údajů můžeme provést následující sumarizaci:

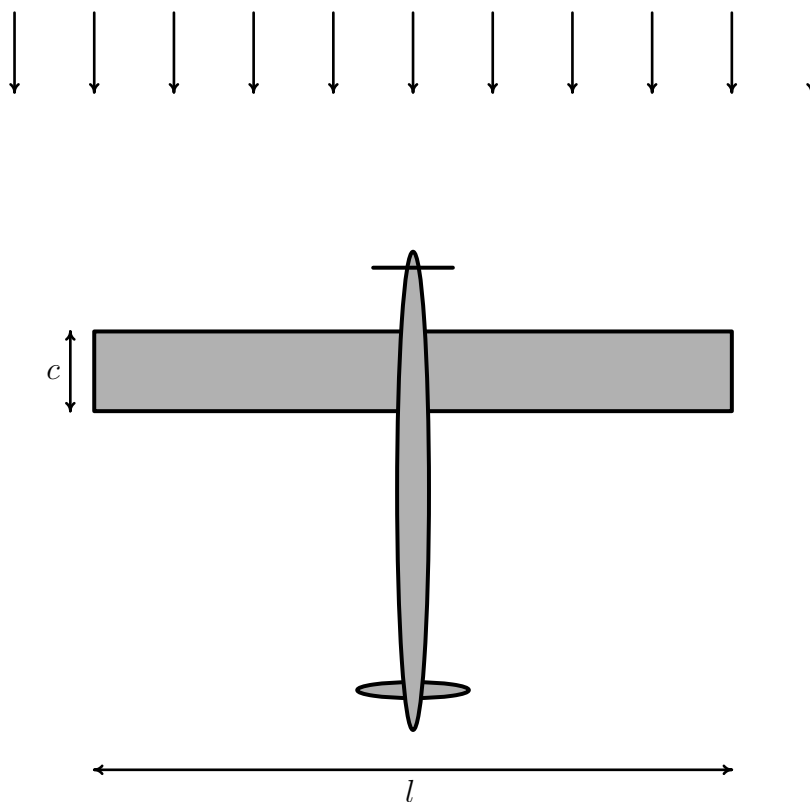
Jádro/Proces	β^- -roz.	β^+ -roz.	e^- záchyt	$\beta^-\beta^-$ -roz.
$^{128}_{53}\text{I}$		0	0	
$^{128}_{54}\text{Xe}$	0	0	0	0
$^{128}_{55}\text{Cs}$	0			0

3. úloha – Solar-Powered Aircraft

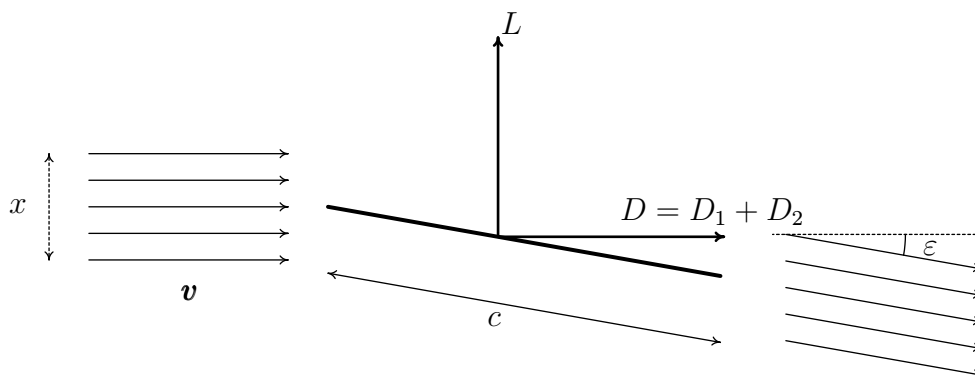
Přáli bychom si navrhnout letadlo, které zůstane ve vzduchu užitím samotné sluneční energie. Nejefektivnější typ návrhu je s křídly, jejichž horní strana je kompletně pokryta solárními bateriemi. Baterie dodávají elektrickou energii, se kterou motor pohání vrtuli.

Uvažujte obdélníková rovinná křídla s rozpětím l , šířkou (chord) c ; obsah křídel je $S = cl$ a poměr stran $A = l : c$. Můžeme vyjít z přibližné ideje o výkonu křídel úvahou o tenkém plátku vzduchu výšky x a délky l odkloněném dolů o malý úhel s velmi malou změnou rychlosti. Kontrolní povrch lze užít k výběru optimální hodnoty pro let. Tento jednoduchý model je blízký realitě, pokud $x = \pi l/4$ a my toto můžeme předpokládat. Celková hmotnost letadla je M a letí vodorovně rychlostí $\vec{v}$ vzhledem k okolnímu vzduchu. V následujících výpočtech uvažujte pouze vzduch plující kolem křídel.

Zanedbejte změny toku vzduchu kolem letadla kvůli vrtuli.



- (a) Uvažujte změnu v hybnosti vzduchu pohybujícím se kolem křídla, s žádnou změnou v rychlosti, jakmile obteče křídlo. Odvoďte vztahy pro vertikální vztlakovou sílu L a horizontální unášecí sílu D_1 působící na křídla v závislosti na rozměrech křídla, v a hustotě vzduchu. Předpokládejte, že směr vzduchu je vždy rovnoběžný s rovinou diagramu, znázorňujícím pohled ze strany na letadlo. (3 body)



- (b) Dále je zde přítomna dodatečná vodorovná odporová síla D_2 způsobená třením vzduchu o povrch křidel. Vzduch zpomalí jen lehce, se změnou rychlosti Δv ($\ll 1\% v$) a je dáno

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{f}{A}.$$

Hodnota f je nezávislá na v .

Nalezněte vztah (v závislosti na M , f , A , S a g - tíhovém zrychlení) pro rychlost letu v_0 odpovídající minimálnímu výkon potřebnému k udržení letadla ve vzduchu při konstantní výšce a rychlosti. Zanedbejte členy s druhou nebo vyšší mocninou u f . (3 body)

Může se vám hodit následující aproximace platná pro malé úhly:

$$1 - \cos \epsilon \approx \frac{\sin^2 \epsilon}{2}$$

- (c) Načrtněte graf výkonu P v závislosti na rychlosti letu v . Ukažte odděleně příspěvky k výkonu potřebné kvůli dvěma zdrojům odporových sil. Nalezněte výraz (v závislosti na M , f , A , S a g) pro minimální výkon P_{min} . (2 body)

- (d) Pokud solární baterie mohou dodávat dostatečnou energii k tomu, že elektrické motory a vrtule generují mechanický výkon $I = 10$ wattů na metr čtverečný plochy křídel, vypočtete maximální specifické zatížení (křídel) Mg/S (N/m^2) pro tento výkon a rychlost letu v_0 (m/s). Předpokládejte $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$, $f = 0,004$, $A = 10$. (2 body)

Řešení:

- (a) Síla $\vec{F}$ nutná ke změně rychlosti $\Delta\vec{v}$ tekutiny, jejíž průtokové množství je $\frac{dm}{dt}$, je dána jako

$$\vec{F} = \Delta\vec{v} \frac{dm}{dt}.$$

V tomto případě platí pro průtokové množství tekutiny:

$$\frac{dm}{dt} = xl\rho v = \frac{\pi}{4}l^2\rho v.$$

Vertikální složka $\Delta\vec{v}$ je

$$\Delta v_V = v \sin \varepsilon,$$

horizontální složka $\Delta\vec{v}$ je

$$\Delta v_H = v(1 - \cos \varepsilon).$$

Nyní můžeme tedy psát výrazy pro vztlak L a odpor D_1

$$L = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 \sin \varepsilon,$$

$$D_1 = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 (1 - \cos \varepsilon).$$

(Pozn.: aproximace nahrazující ε místo $\sin \varepsilon$ není chybou.)

- (b) Výkon nutný k udržení letadla v letu konstantní rychlostí a ve stále výšce je

$$P = Dv = (D_1 + D_2)v.$$

Horizontální odporová síla D_2 (tření) je dána poměrem změny hybnosti vzduchu (plujícího kolem křídel) kvůli tření:

$$D_2 = v_1 \frac{dm_1}{dt} - v_2 \frac{dm_2}{dt}.$$

Protože křídlo vzduch nevyrábí ani nespotřebovává, musí být průtokové množství vzduchu kolem křídla stále stejné a je tedy

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{dm_2}{dt} = \frac{dm}{dt} = xl\rho v.$$

Substitucí $v_1 = v$ a $v_2 = v - \Delta v$:

$$D_2 = vxl\rho v - (v - \Delta v)xl\rho v = xl\rho v\Delta v = \frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2.$$

(Tento odpor je bezpodmínečně orientován podél povrchu křídel; když je křídlo skloněné o nějaký úhel, horizontální složka této veličiny je námi nalezená hodnota násobená $\cos$ úhlu sklonu):

$$\frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2 \cos \varepsilon \approx \frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) \approx \frac{\pi f}{4A}\rho v^2 l^2 + O(\varepsilon^2 f).$$

(vzhledem k tomu, že druhý člen lze zanedbat, nemusíme zde sklon vůbec uvažovat)

Celková odporová síla $D = D_1 + D_2$ je tedy závislá na odchýlení ε a koeficientu odporu f :

$$D = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 \left((1 - \cos \varepsilon) + \frac{f}{A} \right) \approx \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 \cos \varepsilon \left(\frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon + \frac{f}{A} \right).$$

Při provedení aproximace může být D vyjádřeno pomocí hmotnosti, rychlosti a rozměrů křídel letadla. Poznamenejme, že pro let v konstantní výšce musí být vztlak roven hmotnosti letadla.

$$L = Mg = \frac{\pi}{4}\rho v^2 l^2 \sin \varepsilon; \quad \sin \varepsilon = \frac{4Mg}{\pi\rho v^2 l^2}.$$

Nyní můžeme určit minimální výkon pomocí v .

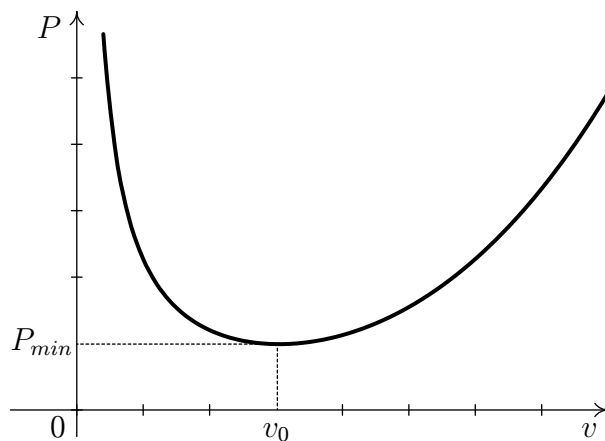
$$P = Dv = \frac{\pi}{4}\rho v^3 l^2 \left(\frac{f}{A} + \frac{1}{2} \frac{(4Mg)^2}{(\pi\rho v^2 l^2)^2} \right) = \frac{\pi}{4}\rho v^3 l^2 \frac{f}{A} + \frac{2(Mg)^2}{\pi\rho v l^2}$$

$$\frac{dP}{dv} = \frac{3\pi}{4}\rho v^2 l^2 \frac{f}{A} - \frac{2(Mg)^2}{\pi\rho v^2 l^2} = 0$$

a tedy rychlost letu při minimálním výkonu je dána jako

$$v_0^4 = \frac{8(Mg)^2 A}{3\pi^2 \rho^2 l^4 f} = \frac{8}{3Af} \left(\frac{Mg}{\pi\rho S} \right)^2$$

(c) Graf závislosti výkonu na rychlosti následuje:



Pro minimální výkon máme

$$\begin{aligned}
 P_{min} &= \frac{\pi}{4} \rho v_0^3 l^2 \left(\frac{f}{A} + \frac{1}{2} \frac{(4Mg)^2}{(\pi \rho v_0^2 l^2)^2} \right) = \\
 &= \frac{\pi}{4} \rho v_0^3 l^2 \left(\frac{f}{A} + \frac{(4Mg)^2}{(\pi \rho l^2)^2} \frac{3\pi^2 \rho^2 l^4 f}{8(Mg)^2 A} \right) = \\
 &= \pi \rho v_0^3 l^2 \frac{f}{A} = \pi \rho v_0^3 S f
 \end{aligned}$$

Dosazením za v_0 dostáváme

$$P_{min} = \pi \rho S f \frac{8^{\frac{3}{4}} (Mg)^{\frac{3}{2}}}{(3A f)^{\frac{3}{4}} (\pi \rho S)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{8}{3A} \right)^{\frac{3}{4}} f^{\frac{1}{4}} \frac{(Mg)^{\frac{3}{2}}}{(\pi \rho S)^{\frac{1}{2}}}$$

(d) Z rovnosti minimálního a dosažitelného výkonu

$$P_{avail} = IS = P_{min}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{Mg}{S} \right)^{\frac{3}{2}} &= I \left(\frac{3A}{8} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{(\pi \rho)^{\frac{1}{2}}}{f^{\frac{1}{4}}} \\
 \frac{Mg}{S} &= I^{\frac{2}{3}} \left(\frac{3A}{8} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(\pi \rho)^{\frac{1}{3}}}{f^{\frac{1}{6}}}
 \end{aligned}$$

Numericky vychází: $\frac{Mg}{S} = 35,6 \text{ N/m}^2$, $v_0 = 8,60 \text{ m/s}$.