

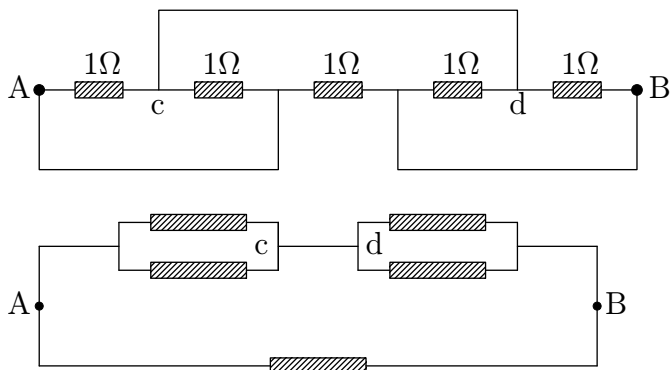
Úlohy z 28. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády 1996 Norway

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

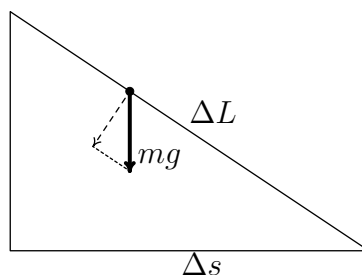
1. úloha

a) Systém odporů může být překreslen podle obrázku.



Ekvivalentní nákres obvodu ukazuje, že odpor mezi bodem c a bodem A je $0,5\ \Omega$ a to samé mezi body d a B. Odpor mezi body A a B se tak sestává ze dvou paralelních zapojení: přímého s odporem $1\ \Omega$ a spojení sestávajícího ze dvou $0,5\ \Omega$ odporů v sérii, jinými slovy dvou paralelních $1\ \Omega$ spojení. To dává

$$R = 0,5\ \Omega.$$



b) Pro dostatečně krátké horizontální posunutí Δs může být dráha považována za přímou. Pokud odpovídající je délka dráhového elementu ΔL , třecí síla je dána jako

$$\mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L}$$

a práce vykonaná třecí silou se rovná síla krát posunutí:

$$\mu mg \frac{\Delta s}{\Delta L} \cdot \Delta L = \mu mg \Delta s$$

Sečtením podél celé dráhy dostaneme, že celková práce vykonaná třecí silou je μmgs . Ze zákona zachování mechanické energie musí být rovna úbytku mgh potenciální energie lyžaře. Odtud plyne

$$h = \mu s.$$

- c) Nechť teplota vzroste a malý časový interval dt o dT . Během tohoto krátkého času kov přijme teplo $P dt$.

Tepelná kapacita je poměr mezi dodanou energií a vzrůstem teploty:

$$C_p = \frac{P dt}{dT} = P dT / dt$$

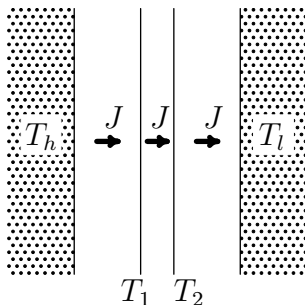
Experimentální výsledky odpovídají

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_0}{4} a [1 + a(t - t_0)]^{-3/4} = T_0 \frac{a}{4} \left(\frac{T_0}{T} \right)^3$$

Odtud

$$C_p = \frac{P}{dT/dt} = \frac{4P}{aT_0^4} T^3.$$

(*Komentář:* Při nízkých, ale ne extrémně nízkých, teplotách se tepelné kapacity kovů řídí podobným T^3 zákonem.)



d) Podle podmínky stacionárního stavu je tepelný tok všude stejný:

$$J = \sigma(T_h^4 - T_1^4)$$

$$J = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$J = \sigma(T_2^4 - T_l^4)$$

Sečtením těchto tří rovností dostaneme

$$3J = \sigma(T_h^4 - T_l^4) = J_0$$

kde J_0 je tepelný tok při absenci tepelného štítu. Pro $\xi = J/J_0$ dostáváme hodnotu

$$\xi = \frac{1}{3}$$

e) Magnetické pole může být určeno pomocí superpozice polí dvou válcových vodičů, protože efekty proudů v oblasti průniku se vyruší. Každý z válcových vodičů musí vést větší proud I' , určený tak, že jeho část I je vedena současným vodičem (tvaru srpku měsíce).

Poměr mezi proudy I a I' je roven poměru mezi obsahy ploch:

$$\frac{I}{I'} = \frac{\left(\frac{1}{12}\pi + \frac{1}{8}\sqrt{3}\right)D^2}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi}$$

Uvnitř jednoho válcového vodiče nesoucího proud I' podle Ampérova zákona budí ve vzdálenosti r od osy azimutální pole

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{I' \pi r^2}{\frac{\pi}{4}D^2} = \frac{2\mu_0 I' r}{\pi D^2}$$

Karteziánské složky jsou

$$B_x = -\frac{y}{r}B_\phi = -\frac{2\mu_0 I' y}{\pi D^2}, \quad B_y = \frac{x}{r}B_\phi = \frac{2\mu_0 I' x}{\pi D^2}$$

Pro superponovaná pole, příslušné proudy jsou $\pm I'$ a odpovídající válcové osy jsou umístěny v bodě $x = \mp \frac{D}{4}$.

Dvě x -ové složky se sečtou na nulu, zatímco y -ové složky dají

$$B_y = \frac{2\mu_0 I' [(x + D/4) - (x - D/4)]}{\pi D^2} = \frac{\mu_0 I'}{\pi D} = \frac{6\mu_0 I}{(2\pi + 3\sqrt{3})D},$$

což je konstantní hodnota a tudíž homogenní pole, jehož orientace je shodná s kladnou poloosou y .

2. úloha

- a) Získaná potenciální energie eV se přemění na kinetickou energii. Odtud

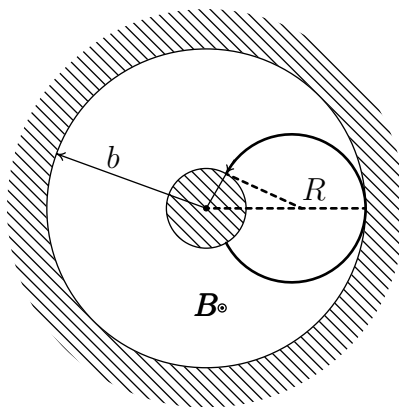
$$\frac{1}{2}mv^2 = eV, \quad (\text{nerelativisticky})$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = eV, \quad (\text{relativisticky})$$

Proto

$$v = \begin{cases} \sqrt{2eV/m} & (\text{nerelativisticky}) \\ c\sqrt{1 - (\frac{mc^2}{mc^2 + eV})^2} & (\text{relativisticky}) \end{cases} \quad (1)$$

- b) Pokud $V = 0$, elektron se pohybuje v homogenním magnetickém poli. Magnetická Lorentzova síla působí kolmo na směr rychlosti a elektron se pohybuje po kružnici. Počáteční rychlost je tečná ke kružnici.



Poloměr R této kružnice („cyclotronový poloměr“) je určen rovností dostředivé síly a Lorentzovy síly:

$$eBv_0 = \frac{mv_0^2}{R},$$

tj.

$$B = \frac{mv_0}{eR} \quad (2)$$

Z obrázku vidíme, že v kritickém případě poloměr R kružnice vyhovuje podmínce

$$\sqrt{a^2 + R^2} = b - R.$$

Umocněním dostaneme

$$a^2 + R^2 = b^2 - 2bR + R^2,$$

tj.

$$R = \frac{b^2 - a^2}{2b}.$$

Dosazením této hodnoty poloměru do vztahu (2) dostaneme hodnotu

$$B_c = \frac{mv_0}{eR} = \frac{2bmv_0}{(b^2 - a^2)e}.$$

- c) Změna momentu hybnosti s časem je způsobena momentem síly. Zde azimutální složka F_φ Lorentzovy síly $\vec{F} = (-e)\vec{B} \times \vec{v}$ působí momentem síly $F_\varphi r$. Je to pouze radiální složka $v_r = dr/dt$ rychlosti, která poskytuje Lorentzovu sílu. Z toho důvodu

$$\frac{dL}{dt} = eBr \frac{dr}{dt},$$

což lze psát jako

$$\frac{d}{dt} \left(L - \frac{eBr^2}{2} \right) = 0.$$

Proto veličina

$$C = L - \frac{1}{2}eBr^2 \tag{3}$$

je během pohybu konstantní. Bezrozměrné číslo k v zadání úlohy je tudíž $k = \frac{1}{2}$.

- d) Užijeme rovnice (3) pro konstantu C , nejprve na povrchu válce a v maximální vzdálenosti r_m :

$$0 - \frac{1}{2}eBa^2 = mvr_m - \frac{1}{2}eBr_m^2$$

což dává

$$v = \frac{eB(r_m^2 - a^2)}{2mr_m} \tag{4}$$

Jiné řešení: Někdo může nejprve určit elektrický potenciál $V(r)$ jako funkci radiální vzdálenosti. Ve válcové geometrii intenzita pole klesá nepřímě úměrně r , což vyžaduje logaritmický potenciál, $V(s) = c_1 \ln r + c_2$. Pokud jsou obě konstanty určeny podmínkami $V(a) = 0$ a $V(b) = V$, dostaneme

$$V(r) = V \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}.$$

Získaná potenciální energie $eV(r_m)$ se přemění na kinetickou energii:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}.$$

Odtud

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m} \frac{\ln(r_m/a)}{\ln(b/a)}}.$$

Rovnice (4) a (5) vypadají odlišně. Protože však r_m není nezávislý parametr, ale je určen B a V , jsou odpovědi totožné.

- e) Pro kritickou hodnotu indukce magnetického pole se r_m rovná b , poloměru vnějšího válce, a rychlost v bodě otáčení je pak

$$v = \frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb}.$$

Protože Lorentzova síla nekoná práci, odpovídající kinetická energie $\frac{1}{2}mv^2$ je rovna eV (otázka a):

$$v = \sqrt{2eV/m}.$$

Poslední dvě rovnice jsou konzistentní, pokud

$$\frac{eB(b^2 - a^2)}{2mb} = \sqrt{2eV/m}.$$

Kritická hodnota indukce magnetického pole je tudíž

$$B_c = \frac{2b}{(b^2 - a^2)} \sqrt{2mV/e}.$$

- f) Lorentzova síla nemá žádnou složku rovnoběžnou s magnetickým polem, a následkem toho je, že složka rychlosti v_B je během pohybu konstantní. Odpovídající posunutí rovnoběžné s válcovou osou nemá žádný vliv na problém dosažení anody.

Nechť v značí úplnou azimutální rychlost elektronu, který tak tak dosáhne anody. Ze zákona zachování energie vyplývá, že

$$\frac{1}{2}m(v_B^2 + v_\varphi^2 + v_r^2) + eV = \frac{1}{2}m(v_B^2 + v^2),$$

což dává

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + 2eV/m}. \quad (5)$$

Při uvážení platnosti konstanty C z (3) na oba válcové povrchy máme pro kritickou situaci

$$mv_\varphi a - \frac{1}{2}eBa^2 = m vb - \frac{1}{2}eBb^2$$

Dosazením hodnoty (6) za rychlost v dostaneme hodnotu

$$B_c = \frac{2m(vb - v_\varphi a)}{e(b^2 - a^2)} = \frac{2mb}{e(b^2 - a^2)} \left[\sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + 2eV/m} - v_\varphi a/b \right]$$

3. úloha

- a) Se středem Země v počátku, může být hmotný střed C určen vektorem $\vec{l}$. Vzdálenost l je určena vztahem

$$Ml = M_m(L - l),$$

což dává

$$l = \frac{M_m}{M + M_m}L = 4,63 \cdot 10^6 \text{ m} \quad (1)$$

to je méně než R , a proto je hmotný střed uvnitř Země.

Odstředivá síla musí být v rovnováze s gravitační přitažlivou silou mezi Zemí a Měsícem:

$$M\omega^2 l = G \frac{MM_m}{L^2},$$

což dává

$$\omega = \sqrt{\frac{GM_m}{L^2 l}} = \sqrt{\frac{G(M + M_m)}{L^3}} = 2,67 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (2)$$

(To odpovídá periodě $\frac{2\pi}{\omega} = 27,2$ dne.) Užili jsme rovnice (1) k eliminaci l .

- b) Potenciální energie hmotného bodu m se sestává ze tří příspěvků:

- 1) Potenciální energie způsobená rotací (v rotující vztažné soustavě, viz zadání úlohy)

$$-\frac{1}{2}m\omega^2 r_1^2,$$

kde r_1 je vzdálenost od C . To odpovídá odstředivé síle $m\omega^2 r_1$, mířící pryč od C .

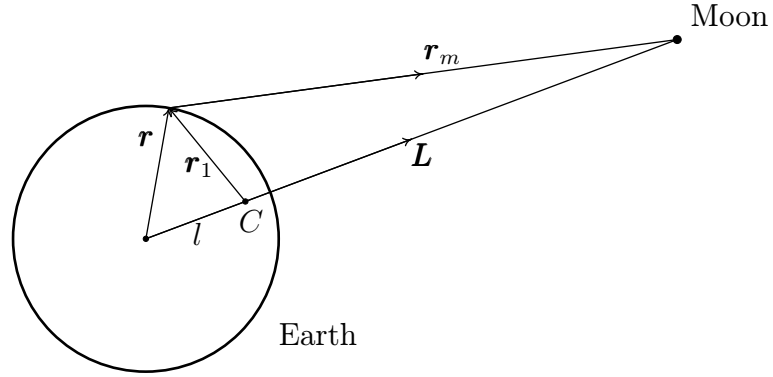
- 2) Gravitační přitahování k Zemi

$$-G \frac{mM}{r}.$$

- 3) Gravitační přitahování k Měsíci

$$-G \frac{m_m M}{r_m}.$$

kde r_m je vzdálenost od Měsíce.



Popisem pozice m pomocí polárních souřadnic r, φ v rovině kolmé na osu rotace (viz obrázek), dostaneme

$$r_1^2 = (\vec{r} - \vec{l})^2 = r^2 - 2rl \cos \varphi + l^2$$

Sečtením všech tří příspěvků dostaneme

$$V(\vec{r}) = -\frac{1}{2}m\omega^2(r^2 - 2rl \cos \varphi + l^2) - G\frac{mM}{r} - G\frac{mM_m}{\vec{L} - \vec{r}}. \quad (3)$$

Zde l je dáno vztahem (1) a

$$|\vec{r}_m| = \sqrt{(\vec{L} - \vec{r})^2} = \sqrt{(L^2 - 2\vec{L}\vec{r}) + r^2},$$

$$|\vec{r}_m| = L\sqrt{(1 + (r/L)^2 - 2(r/L)\cos \varphi)}.$$

c) Protože poměr $r/L = a$ je velmi malý, můžeme užít rozvoj

$$\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \varphi}} = 1 + a \cos \varphi + \frac{1}{2}a^2(3 \cos^2 \varphi - 1)$$

Dosazením do výrazu (3) pro potenciální energii dostaneme

$$V(r, \varphi)/m = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \frac{GM}{r} - \frac{GM_m r^2}{2L^3}(3\cos^2 \varphi - 1), \quad (4)$$

nehledě na konstantu. Použili jsme vztahu

$$m\omega^2 r l \cos \varphi - GmM_m \frac{r}{L^2} \cos \varphi = 0,$$

který platí, je-li dosazena hodnota ω^2 z rovnice (2).

Tvar vodního povrchu je takový, že hmotný bod má tu samou energii V *všude na povrchu*. (To je ekvivalentní požadavku žádné síly působící tangenciálně k povrchu.) Položením

$$r = R + h,$$

kde výška přílivu h je mnohem menší než R , dostaneme přibližně

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R} \frac{1}{1+h/R} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right) = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2},$$

právě tak jako je

$$r^2 = R^2 + 2Rh + h^2 \approx R^2 + 2Rh.$$

Dosazením těchto vztahů a vztahu (2) do (4) dostaneme

$$V(r, \varphi)/m = -\frac{G(M+M_m)R}{L^3}h + \frac{GM}{R^2}h - \frac{GM_m r^2}{2L^3}(3\cos^2 \varphi - 1), \quad (5)$$

znovu kromě konstanty.

Velikost prvního členu na pravé straně (5) je faktor

$$\frac{(M+M_m)}{M} \left(\frac{R}{L}\right)^3 \cong 10^{-5}$$

mnohem menší než druhý člen, a proto zanedbatelný. Pokud zbylé dva členy v rovnici (5) kompenzují jeden druhého, pak

$$h = \frac{M_m r^2 R^2}{2ML^3}(3\cos^2 \varphi - 1),$$

a hmotný bod m má tudíž tu samou energii všude na povrchu. Protože zde může být r^2 lehce aproximováno R^2 , dostaneme pro vydutí přílivem vztah

$$h = \frac{M_m R^4}{2ML^3} (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Nejvyšší hodnota $h_{max} = M_m R^4 / ML^3$ nastává pro $\varphi = 0$ nebo π , ve směru k měsíci nebo v opačném směru, zatímco nejmenší hodnota $h_{min} = -M_m R^4 / 2ML^3$ odpovídá $\varphi = \pi/2$ nebo $3\pi/2$. Rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší hladinou je tudíž

$$h_{max} - h_{min} = \frac{3M_m R^4}{2ML^3} = 0,54 \text{ m}.$$

(Hodnoty pro nejvyšší a nejnižší výšku jsou určeny až na aditivní konstantu, avšak rozdíl je na ni pochopitelně nezávislý.)