

Úlohy 26. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - Camberra, Austrálie

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

Gravitační rudý posuv a měření hmotnosti hvězdy

- a) (3 body) Foton frekvence f má efektivní setrvačnou hmotnost m , která je určena jeho energií. Předpokládejte, že jeho gravitační hmotnost je rovna jeho setrvačné hmotnosti. Tudíž energie fotonu emitovaného z povrchu hvězdy se změní, když se foton dostane z dosahu gravitačního pole hvězdy. Ukažte, že relativní posuv frekvence Δf fotonu způsobený jeho oddálením z povrchu hvězdy do nekonečna je dán pro $\Delta f \ll f$ výrazem

$$\frac{\Delta f}{f} \approx -\frac{GM}{Rc^2},$$

kde G je gravitační konstanta, R poloměr hvězdy, c rychlost světla ve vakuu, M hmotnost hvězdy. Tudíž rudý posuv určité spektrální čáry, měřený ve velké vzdálenosti od hvězdy, může být použit k měření poměru M/R . Znalost poloměru R hvězdy umožní určit její hmotnost.

- b) (12 bodů) Automatická kosmická sonda je vypuštěna s cílem měřit jak hmotnost M , tak poloměr R hvězdy v naší Galaxii. Při přibližování kosmické sondy k objektu radiálně jsou fotony, emitované ionty He^+ z povrchu hvězdy, indikovány prostřednictvím rezonanční excitace svazku iontů He^+ v testovací komůrce umístěné uvnitř kosmické sondy. Rezananční absorpce nastává jen tehdy, když ionty He^+ mají rychlost ve směru střed hvězdy – sonda. Jen tímto způsobem je možné přesně určit rudý posuv. Rychlost ($v = \beta c$) iontů He^+ v kosmické sondě vzhledem k hvězdě (při rezonanční absorpci) je měřena jako funkce vzdálenosti d k nejbližšímu povrchu hvězdy. Experimentální údaje jsou uvedeny v následující tabulce. Tato data plně využijte ke grafickému určení hmotnosti M a poloměru R hvězdy. Výpočet chyb měření neprovádějte.

Rychlostní parametr $\beta = v/c \cdot 10^{-5}$	3,352	3,279	3,195	3,077	2,955
Vzdálenost od povrchu hvězdy $d \cdot 10^8$ m	38,90	19,98	13,32	8,99	6,67

- c) K určení R a M při takovém experimentu je obvyklé provést opravu frekvence na odraz emitujících atomů. (Tepelný pohyb je příčinou toho,

že se zvětší šířka emisních čar, aniž by se přemístilo jejich maximum. Proto můžete předpokládat, že tepelné efekty jsou započteny).

- i) (4 body) Nechť E je rozdíl energií dvou hladin atomu v jeho klidovém stavu. Předpokládejte, že atom vyzařuje ve stavu klidu, přičemž se rozpadá na foton a na odlétající (odrážející se) atom. Odvoďte relativistický výraz pro energii hf emitovaného fotonu v závislosti na energii E a počáteční klidové hmotnosti m_0 atomu.
- ii) (1 bod) Proveďte numerický výpočet (číselný odhad) relativistického posuvu frekvence

$$\left(\frac{\Delta f}{f}\right)_{recoil}, \quad (\text{odraz})$$

pro případ iontů He^+ . Váš výsledek musí být výrazně menší než gravitační rudý posuv vypočtený v části b).

Dané hodnoty:

rychlost světla $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$,

klidová energie atomu He $m_0 c^2 = 4 \cdot 938 \text{ MeV}$,

Bohrova energie $E_n = -13,6 \frac{Z^2}{n^2} \text{ (eV)}$,

gravitační konstanta $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

Řešení:

Úvod

Toto je v podstatě úloha na speciální teorii relativity. Podstata úlohy je část (b), která zahrnuje simulovaný experiment. Požaduje po studentech, aby zkombinovali gravitační rudý posuv, rezonanční absorpci, Dopplerův efekt a grafickou interpretaci dat.

Celkově úloha vypadá tak, že vyhověla cíli umožnit téměř všem studentům získat několik bodů z části (a). Překvapivě velký počet studentů byl schopen dosáhnout v podstatě správného řešení části (b) použitím grafu vhodné přímky. V části (c) se také vyskytlo mnoho v zásadě správných řešení, několik nejlepších studentů svá řešení výrazně zjednodušilo. Jeden student se pokusil obdržet správné řešení za užití čtyř hybností. Nejlepší řešení v této úloze byly téměř bezchybné a demonstrovaly vysokou úroveň pochopení pojmů a schopnost syntetizovat myšlenky z množství rozdílných oblastí.

Gravitační rudý posuv a měření hmotnosti hvězdy

- (a) Pokud má foton efektivní setrvačnou hmotnost m určenou svojí energií, můžeme psát

$$mc^2 = hf, \quad m = \frac{hf}{c^2}.$$

Nyní předpokládejme, že gravitační hmotnost se rovná setrvačné hmotnosti a uvažujme foton o energii hf emitovaný vzhůru ve vzdálenosti r od středu hvězdy. Foton ztratí při úniku z gravitačního pole energii. Podle zákona zachování energie:

změna energie fotonu $(hf_i - hf_f) =$ změna grav. potenciální energie,

kde index i znamená initial = počáteční a f = final = konečný stav fotonu.

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{\infty} - \left[-\frac{GMm_i}{r} \right],$$

$$hf_f = hf_i - \frac{GMm_i}{r}.$$

Protože je změna v energii fotonu malá ($\Delta f \ll f$)

$$m_f \approx m_i = \frac{hf_i}{c^2}$$

$$\begin{aligned}
hf_f &\approx hf_i - \frac{GM \left(\frac{hf_i}{c^2} \right)}{r} \\
hf_f &\approx hf_i \left[1 - \frac{GM}{rc^2} \right] \\
\frac{f_f}{f_i} &\approx \left(1 - \frac{GM}{rc^2} \right) \\
\frac{\Delta f}{f} &= \frac{f_f - f_i}{f_i} \approx - \frac{GM}{rc^2}
\end{aligned}$$

Záporné znaménko značí rudý posuv, tj. pokles frekvence, a vzrůst vlnové délky.

Z toho důvodu platí pro foton emitovaný z povrchu hvězdy poloměru R

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{Rc^2}$$

(b) Změna v energii fotonu při stoupání z r_i do r_f je dána jako

$$hf_i - hf_f = -\frac{GMm_f}{r_f} + \frac{GMm_f}{r_i} \approx \frac{GM(hf_i)}{c^2} \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

za předpokladu, že $m_f \approx m_i = \frac{hf_i}{c^2}$ a odtud

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

V experimentu, R je poloměr hvězdy, d je vzdálenost od povrchu hvězdy k raketě a podle výše uvedené rovnice dostáváme:

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d} \right]$$

U frekvence fotonu musí nastat Dopplerův posuv z f_f na f_i aby mohl způsobit rezonanční excitaci He^+ iontů v raketě.

Tudíž aplikujeme relativistický Dopplerův princip a obdržíme:

$$\frac{f'}{f_f} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}},$$

kde f' je frekvence přijatá ionty He^+ v raketě, a $\beta = v/c$.

To znamená, že gravitací redukována frekvence f_f vzrostla na f' kvůli rychlosti iontů v raketě orientované směrem k hvězdě.

Protože $\beta \ll 1$:

$$\frac{f_f}{f'} = (1 - \beta)^{1/2}(1 + \beta)^{-1/2} \approx 1 - \beta.$$

Eventuelně protože je $\beta \ll 1$, lze užít klasický Dopplerův efekt přímo.

Tudíž

$$f' = \frac{f_f}{1 - \beta},$$

neboli

$$\frac{f_f}{f'} = 1 - \beta.$$

Protože f' musí být rovna f_i , aby nastala rezonanční absorpce, máme

$$\frac{f_f}{f_i} = 1 - \beta.$$

Dosazením tohoto vztahu do vztahu odvozeného v úvodu této části úlohy dostaneme

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R + d} \right]$$

Daná experimentální data využijeme k efektivnímu grafickému řešení. Požadujeme lineární závislost mezi experimentálními údaji vyjádřenými pomocí β a d .

Přepíšeme-li rovnici jako

$$\beta = \frac{GM}{c^2} \left[\frac{d}{(R + d)R} \right]$$

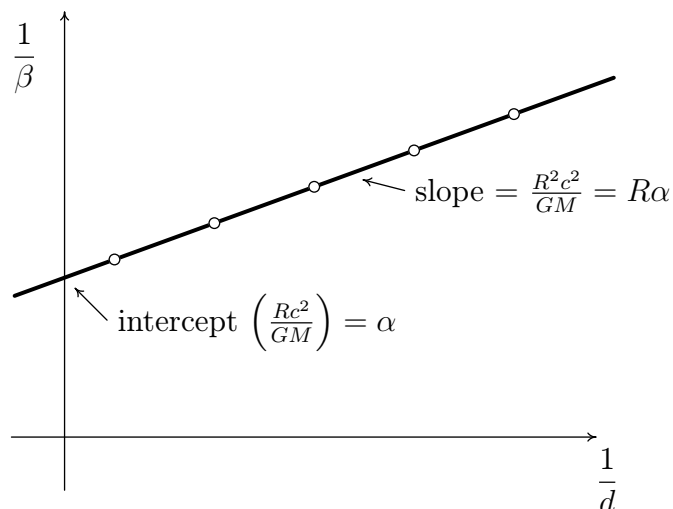
a převrácením dostaneme

$$\frac{1}{\beta} = \left(\frac{Rc^2}{GM} \right) \left[\frac{R}{d} + 1 \right],$$

neboli

$$\frac{1}{\beta} = \left(\frac{R^2c^2}{GM} \right) \frac{1}{d} + \frac{Rc^2}{GM}.$$

Graficky vykreslíme závislost $\frac{1}{\beta}$ na $\frac{1}{d}$.



Směrnice je $\left(\frac{Rc^2}{GM}\right) R = \alpha R$,

dále $\frac{1}{\beta}$ — úsek na ose y je $\left(\frac{Rc^2}{GM}\right) = \alpha$

a dále $\frac{1}{d}$ — úsek na ose x je $-\frac{1}{R}$.

Veličiny R a M mohou být určeny obyčejně z prvních dvou vztahů, třetí vztah je přebytečný. Nicméně ho můžeme užít pro korekci, pokud je toho třeba.

Z daných údajů plyne $R = 1,11 \cdot 10^8$ m, $M = 5,2 \cdot 10^{30}$ kg.

Z grafu: směrnice $\alpha R = 3,2 \cdot 10^{12}$ m. Velikost α je rovna úseku na ose y , $\alpha = 0,29 \cdot 10^5$. Vydělením těchto dvou údajů dostaneme

$$R = 1,104 \cdot 10^8 \text{ m.}$$

Dosazením této hodnoty zpět do druhého z užitých vztahů dostaneme

$$M = \frac{Rc^2}{G\alpha} = 5,11 \cdot 10^{30} \text{ kg.}$$

(c) (i) Pro foton platí:

$$\text{hybnost fotonu} \quad p = \frac{hf}{c},$$

$$\text{energie fotonu} \quad E = hf.$$

Užitím ekvivalence hmotnosti a energie dle vztahu $E = mc^2$ vyjádříme změnu vnitřní energie atomu pomocí změny klidové energie.

Tudíž:

$$\Delta E = (m_0 - m'_0)c^2$$

V laboratorní vztažné soustavě

$$\text{Energie před vyzářením fotonu} \quad E = m_0c^2.$$

Použitím relativistického vztahu

$$E^2 = p^2c^2 + m_0'^2c^4$$

vyjádříme energii atomu po vyzáření fotonu

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m_0'^2c^4} + hf,$$

kde je $p = hf/c$, což plyne ze zachování hybnosti (hybnost atomu musí být rovna hybnosti vyzářeného fotonu).

Z uvedených vztahů plyne (zákon zachování energie soustavy před a po vyzáření fotonu):

$$m_0c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0'^2c^4} + hf,$$

$$(m_0c^2 - hf)^2 = (hf)^2 + m_0'^2c^4,$$

$$(m_0c^2)^2 - 2hfm_0c^2 = m_0'^2c^4.$$

Jednoduchými úpravami a užitím vztahu $\Delta E = (m_0 - m'_0)c^2$:

$$\begin{aligned} hf(2m_0c^2) &= (m_0^2 - m_0'^2)c^4 = \\ &= (m_0 - m'_0)c^2(m_0 + m'_0)c^2 = \\ &= \Delta E[2m_0 - (m_0 - m'_0)]c^2 = \\ &= \Delta E[2m_0c^2 - \Delta E] \end{aligned}$$

Odtud pak vyplývá

$$hf = \Delta E \left[1 - \frac{\Delta E}{2m_0c^2} \right].$$

(ii) Pro emitovaný foton máme

$$hf = \Delta E \left[1 - \frac{\Delta E}{2m_0 c^2} \right].$$

Pokud ignorujeme relativistické efekty, pak:

$$hf_0 = \Delta E,$$

tudíž relativistický frekvenční posuv $\frac{\Delta f}{f_0}$ je dán jako

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{\Delta E}{2m_0 c^2}.$$

Pro přechod iontu He^+ ($n = 2 \rightarrow 1$) a užitím Bohrovy teorie na heliovy ion (podobný vodíku) dostaneme:

$$\Delta E = 13,6 \cdot (2)^2 \cdot \left[\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right] \doteq 40,8 \text{ eV}.$$

Jest také $m_0 c^2 = 3\,752 \cdot 10^6 \text{ eV}$. Frekvenční posuv kvůli odrazu dává

$$\frac{\Delta f}{f_0} \doteq 5,44 \cdot 10^{-9}.$$

To je velmi malá hodnota v porovnání s gravitačním rudým posuvem ($\frac{\Delta f}{f} \sim 10^{-5}$) a může být v experimentu s gravitačním rudým posuvem zanedbán.

2. úloha

Šíření zvuku

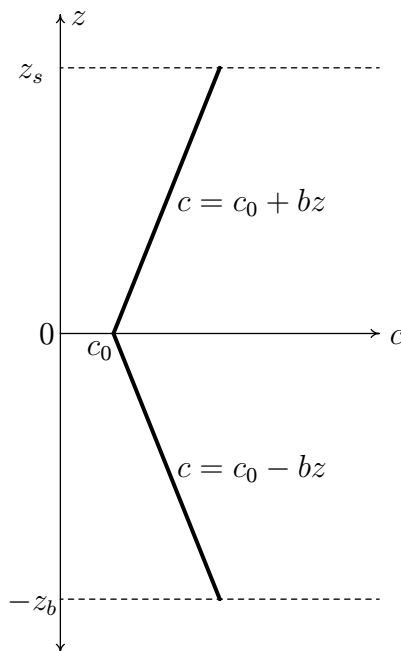
Rychlost šíření zvuku v oceánu se mění s hloubkou, teplotou a koncentrací soli. Na obr. 1a) je znázorněna závislost rychlosti c na hloubce z pro případ, kdy minimální rychlost c_0 nastává uprostřed mezi povrchem (hladinou) oceánu a jeho dnem. Dohodněme se, že v hloubce o souřadnici $z = 0$ bude mít rychlost zvuku minimum, že souřadnici $z = z_s$ bude mít povrch a souřadnici $z = -z_b$ dno moře. Rychlost c je pro $z \geq 0$ dána rovnicí

$$c = c_0 + bz$$

a pro $z \leq 0$ rovnicí

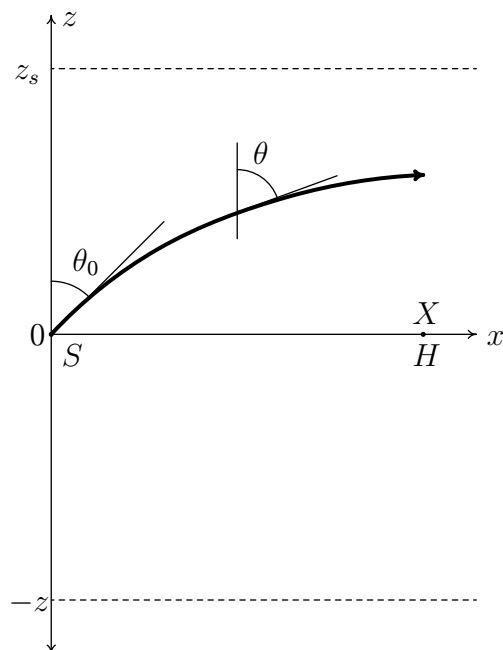
$$c = c_0 - bz.$$

V obou případech $b = |dc/dz|$ (tj. velikost gradientu rychlosti zvuku v závislosti na hloubce) předpokládejte konstantní.



Obr. 1b) ukazuje řez oceánem rovinou $x - z$, přičemž x má horizontální směr. Ve všech bodech roviny $z - x$ má rychlost zvuku funkční závislost $c(z)$ podle obr. 1a). Zdroj zvuku S je lokalizován v bodě $z = 0$, $x = 0$. Část výstupu

zvuku z tohoto zdroje je znázorněna jako zvukový paprsek vystupující z S s počátečním úhlem θ_0 , jak je znázorněno na obr. Protože rychlost zvuku se mění v závislosti na z , bude se paprsek spojitě lámat (či spíše ohýbat), což způsobí změnu velikosti θ podél trajektorie paprsku.



- a) (6 bodů) Ukažte, že počáteční trajektorii paprsku opouštějícího zdroj a ležícího v rovině $z - x$, je oblouk kružnice o poloměru R , kde pro $0 \leq \theta_0 < \pi/2$ je

$$R = \frac{c_0}{b \sin \theta_0}.$$

- b) (3 body) Odvoďte výraz obsahující z_s , c_0 , b a dávající nejmenší hodnotu úhlu θ_0 pro svislý směr paprsků, které mohou být vyslány, aniž by se zvukové vlny odrazely od hladiny moře.
- c) (4 body) Obr. 1b) znázorňuje polohu přijímače H zvuku o souřadnicích $z = 0$, $x = X$. Odvoďte výraz obsahující b , X , c_0 a dávající sérii hodnot úhlu θ_0 , jež způsobí, že zvukový paprsek, vystupující z S , dosáhne přijímače H . Předpokládejte, že z_s a z_b jsou dostatečně velké, aby nedopustily odraz od povrchu a dna moře.

- d) (2 body) Vypočtete čtyři nejmenší hodnoty θ_0 , při kterých lomené paprsky vystupující ze zdroje S dosáhnou přijímače H , pokud je dáno $X = 10\,000$ m, $c_0 = 1\,500$ m/s, $b = 0,02000$ s⁻¹.
- e) (5 bodů) Odvodte výraz pro dobu potřebnou k rozšíření zvuku z S do H podél trajektorie paprsku, odpovídající minimální hodnotě úhlu θ_0 , určené v části c). Vypočtete hodnotu této doby šíření pro podmínky dané v části d). Může vám pomoci výpočet

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Vypočtete dobu, při níž se přímý paprsek šíří z S do H podél $z = 0$. Který ze dvou paprsků dorazí jako první: paprsek, pro nějž je $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, nebo paprsek s nejmenší hodnotou θ_0 vypočtenou v části d)?

Řešení:

Úvod

Tato úloha se týká šíření vln v prostředí s proměnlivým indexem lomu a různými způsoby šíření, které se tu vyskytují. Odezvu na tuto úlohu zrcadlí udělené body. Množství studentů získalo téměř perfektní bodové ohodnocení, zatímco ekvivalentní množství studentů získalo bodů velmi málo. Nejzajímavější část hodnocení vyvstala v souvislosti s částí (a), kde bylo nutné najít poloměr kružnice R specifikovaný v zadání. Bodovací tým narazil na čtyři odlišitelné a oprávněné postupy k získání výsledku pro poloměr R .

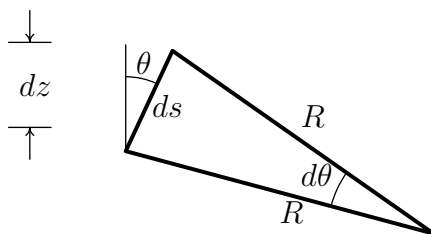
Část (c) se ukázala být užitečným rozlišovačem mezi těmi studenty, kteří ji buď udělali nebo nikoliv. Bylo nutné si uvědomit, že existuje série cest nebo způsobů, jak se dostat od zdroje k přijímači. Numerické odhady v části (d), určené k pomoci opravovatelům, požadovaly jistou péči v hodnocení podle způsobu, kterým studenti nakládali s výsledky různých tvarů během výpočtu. Část (e), která vedla k závěru, že paprsek s nejmenší hodnotou počátečního úhlu dorazí první, byla užitečným rozlišovačem.

Šíření zvuku

(a) Snellův zákon lze vyjádřit jako

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} = \frac{c}{c_0},$$

kde c je rychlost zvuku.



Uvažujte element dráhy paprsku ds a lokálně jej považujte za oblouk kružnice poloměru R . Uvažte, že R může nabývat kterékoliv hodnoty mezi $-\infty$ a $+\infty$. Uvažujte dále složku paprsku, která zpočátku míří přímo nahoru z bodu S .

Dle obrázku vidíme, že platí

$$ds = R d\theta,$$

neboli

$$\frac{ds}{d\theta} = R.$$

Ze Snellova zákona lomu máme pro malou změnu rychlosti dc :

$$\cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta_0}{c_0} dc.$$

Pro paprsek orientovaný vzhůru platí

$$c = c_0 + bz,$$

takže

$$dc = b dz$$

a

$$\frac{\sin \theta_0}{c_0} b dz = \cos \theta d\theta.$$

Tudíž

$$dz = \frac{c_0}{\sin \theta_0} \frac{1}{b} \cos \theta d\theta.$$

Můžeme ale také psát (vezmeme-li ds jako malou úsečku)

$$dz = ds \cos \theta,$$

takže

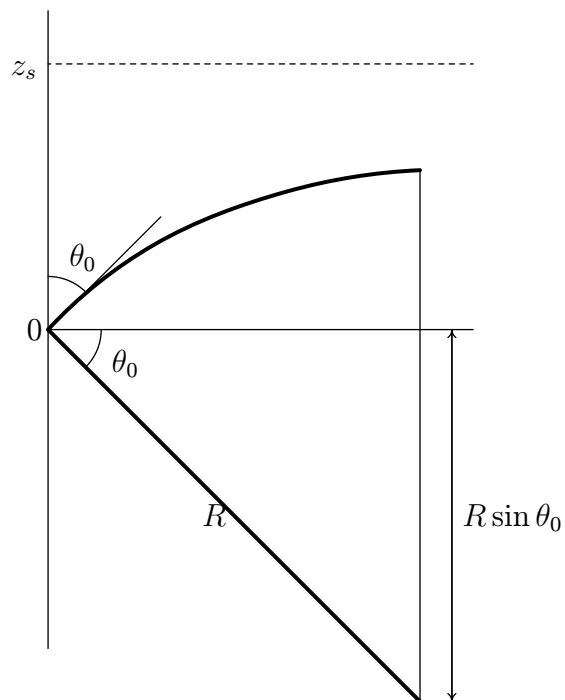
$$ds = \frac{c_0}{\sin \theta_0} \frac{1}{b} d\theta.$$

Tudíž

$$\frac{ds}{d\theta} = R = \frac{c_0}{\sin \theta_0} \frac{1}{b}.$$

Tento výsledek platí přesně pro malý kruhový oblouk ds . Všimněte si však, že ze Snellova zákona nicméně platí pro všechna θ , tj. ve všech bodech trajektorie, které tudíž vytváří oblouk kružnice s poloměrem R , do chvíle než paprsek vstoupí do oblasti $z < 0$.

(b) Viz obr.



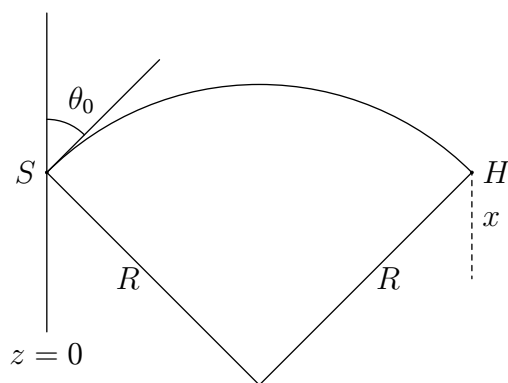
Zde

$$z_s = R - R \sin \theta_0 = R(1 - \sin \theta_0) = \frac{c_0}{b \sin \theta_0} (1 - \sin \theta_0),$$

odkud dostáváme

$$\theta_0 = \arcsin \left[\frac{c_0}{b z_s + c_0} \right].$$

(c) Viz obr.

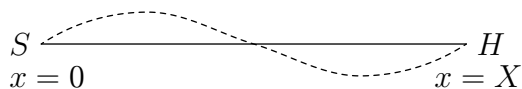


Nejjednodušší cestou mezi S a H je jednoduchý kruhový oblouk procházející skrz tyto body. Pro tuto cestu máme:

$$X = 2R \cos \theta_0 = \frac{2c_0}{b \sin \theta_0} \cos \theta_0 = \frac{2c_0}{b} \cotg \theta_0.$$

Z toho důvodu

$$\cotg \theta_0 = \frac{bX}{2c_0}.$$



Další možnost se skládá z dvou kružnicových oblouků nakreslených na obrázku (jdoucí nad a pod hraniční čarou $z = 0$). Pro tuto cestu platí:

$$\frac{x}{2} = 2R \cos \theta_0 = \frac{2c_0}{b} \cotg \theta_0,$$

tj.

$$\cotg \theta_0 = \frac{bX}{4c_0}.$$

Obecně, pro hodnotu $\theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ paprsky z S dosáhnou bodu H po n obloucích, takže pro počáteční úhel platí:

$$\theta_0 = \operatorname{arccotg} \left[\frac{bX}{2nc_0} \right] = \operatorname{arctg} \left[\frac{2nc_0}{bX} \right],$$

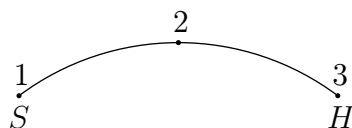
kde $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Všimněte si, že pro $n \rightarrow \infty$ je $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, jak lze očekávat pro osový paprsek.

- (d) S danými hodnotami platí pro čtyři nejmenší hodnoty počátečního úhlu:

n	θ_0 (ve stupních)
1	86,19
2	88,09
3	88,73
4	89,04

- (e) Trajektorie paprsku spojená s nejmenším počátečním úhlem se skládá z jednoduchého kruhového oblouku, jak je naznačeno na obr.



Hledáme:

$$\int_1^3 dt = \int_1^3 \frac{ds}{c}.$$

Nejprve zkusíme

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{ds}{c} = \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{Rd\theta}{c}.$$

Použitím vzorce

$$R = \frac{c}{b \sin \theta}$$

dostaneme:

$$t_{12} = \frac{1}{b} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta},$$

z čehož vyplývá

$$t_{12} = \frac{1}{b} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_{\theta_0}^{\pi/2} = -\frac{1}{b} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Uvažíme-li, že $t_{13} = 2t_{12}$, dostaneme

$$t_{13} = -\frac{2}{b} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

Pro dané b tak získáváme čas dráhy paprsku s nejmenším počátečním úhlem nalezeným v části (d): $t_{13} = 6,6546$ s.

Osový paprsek se pohybuje po dobu

$$t = \frac{X}{c_0},$$

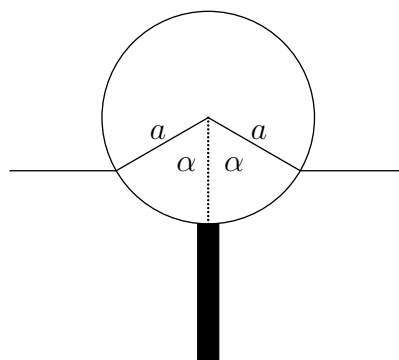
a tedy pro zadané hodnoty $t_{13} = 6,6666$ s.

Z toho vyplývá, že osový paprsek se pohybuje pomaleji, než paprsek pohybující se po kružnicovém oblouku. Tudíž paprsek (pro který platí $n = 1$) dorazí jako první.

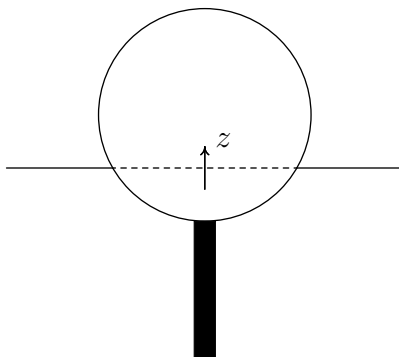
3. úloha

Válcová bóje

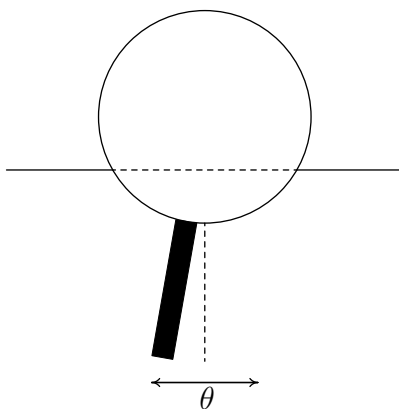
- a) (3 body) Bóje se skládá z pevného válce o poloměru a a délky l , který je vyroben z lehkého materiálu stálé hustoty d . V polovině délky válce vyčuhuje homogenní přímá tyč ze dna bóje (viz obr.). Hmotnost tyče je rovna hmotnosti válce, její délka je stejná jako průměr válce a hustota materiálu tyče je větší než hustota mořské vody. Tato bóje plove na mořské vodě hustoty ρ . Je-li bóje ve stavu rovnováhy, odvoďte výraz, který dává do vztahu úhel α dle obrázku a poměr d/ρ . Objem tyče zanedbejte.



- b) (4 body) Když tato bóje, díky určitému proudění, je zatlačena ve svislém směru dolů o malou hodnotu z , bude podle zkušenosti vytlačována vzhůru, což vyvolá kmity nahoru a dolů kolem rovnovážné polohy plovoucí bóje. Určete frekvenci těchto vertikálních kmitů v závislosti na hodnotách α , g , a , kde g je tíhové zrychlení. Předpokládejte, že vliv pohybu vody na dynamiku bóje je takový, že způsobí zvětšení efektivní hmotnosti bóje o jednu třetinu. Můžete předpokládat, že úhel α není malý.



- c) (8 bodů) V prvním přiblížení předpokládejte, že válec kolébá kolem své vodorovné centrální osy. Určete frekvenci kolébání v závislosti na g , a . Zanedbejte v tomto případě dynamiku vody a její viskozitu. Úhel kolébání předpokládejte malý.



- d) (5 bodů) Bóje obsahuje citlivé akceleromtery, které mohou měřit svislé kmity a kolébání bóje. Tyto informace mohou být předávány na pobřeží rádiovým spojením. V relativně klidných vodách je zaznamenáno, že vertikální kmity mají periodu asi 1 s a perioda kolébání je asi 1,5 s. Z těchto informací ukažte, že úhel α je roven asi 90° a z toho určete poloměr bóje a její celkovou hmotnost, přičemž délka l válce je rovna a . (Můžete vzít hustotu vody 1000 kg/m^3 , $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.)

Řešení:

Úvod

Tato úloha je v podstatě úlohou z mechaniky s několika prvky z hydrostatiky. Zahrnuje pojmy Archimédova zákona, malých kmitů a rotační dynamiky aplikované na zajímavou geometrii.

Jedna společná chyba v řešení zaznamenaná opravovateli byla, že délka tyče byla psána za rovnou poloměru a ne průměru válce. V souladu se způsoby hodnocení byli studenti penalizováni pouze za tuto chybu, za předpokladu, že zbytek jejich analýzy byl konzistentní s touto prognózou. Chytrý aspekt úlohy byl v části (d), kde se někteří studenti pokusili najít řešení transcendentální rovnice $\alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 1,61 \sin \alpha$, spíše než by jednoduše ověřili, že $\alpha = 1,57 \doteq \pi/2$ dává rozumný výsledek. Studenti dvou týmů užili numerických metod k nalezení přesnější hodnoty α . Jeden student, který korektně aplikoval Newtonovu metodu k řešení této rovnice obdržel speciální cenu za matematiku.

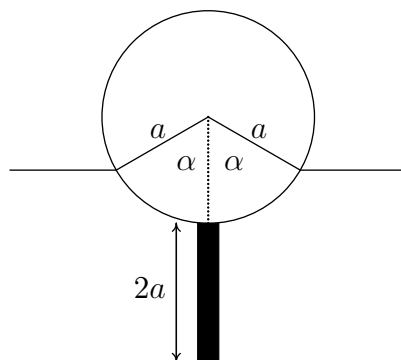
Válcová bóje

- (a) Hmotnost tyče je rovná hmotnosti válce M , kterého hmotnost je $\pi a^2 l d$. Tudíž je celková hmotnost rovna $2M = 2\pi a^2 l d$. Hmotnost vytlačené vody je určitě menší než $\pi a^2 l \rho$ (to pokud je bóje na pokraji plavání). Užitím Archimédova zákona můžeme očekávat, že

$$2\pi a^2 l d < \pi a^2 l \rho$$

neboli

$$d < \rho/2.$$



Ve skutečnosti, zavedeme-li plovoucí úhel $\alpha < \pi$, jak je naznačeno na obr., objem vytlačené vody obdržíme jednoduchou geometrickou úvahou:

$$V = la^2\alpha - la^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Z Archimédova zákona plyne, že hmotnost bóje musí být rovna hmotnosti vytlačené vody. Tudíž

$$2\pi a^2 l d = la^2 \rho (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha),$$

tj. α je určeno vztahem

$$\alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 2\pi \frac{d}{\rho}.$$

- (b) Pokud je válec zatlačen o malou délku z svisle dolů z rovnovážné polohy, působí na něj nahoru působící vratná síla, která je úměrná váze nadbytečně vytlačené vody, neboli

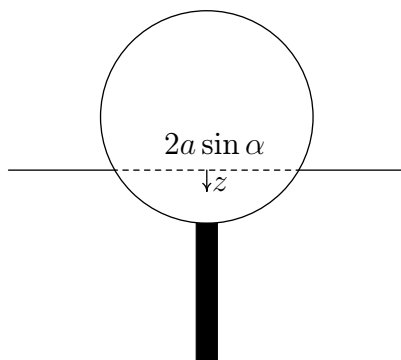
$$g\rho \cdot 2a \sin \alpha \cdot lz$$

orientovaná opačně k výchylce z . To je charakteristické pro jednoduchý harmonický pohyb a tudíž Newtonova pohybová rovnice je (pokud uvážíme zvětšení efektivní hmotnosti bóje o jednu třetinu, tj. o $2/3 M$)

$$8M\ddot{z}/3 = -2\rho g l z a \sin \alpha$$

neboli

$$\ddot{z} + \frac{3\rho g \sin \alpha}{4\pi d a} z = 0.$$

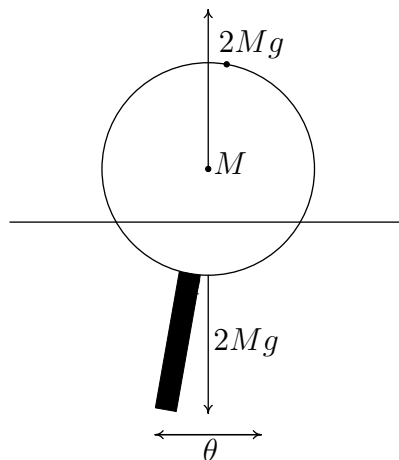


To je rovnice standardního sinusového oscilátoru (jako je jednoduché kyvadlo). Řešení je typu $z = z_0 \sin(\omega_z t)$ s úhlovou frekvencí

$$\omega_z = \sqrt{\frac{3\rho g \sin \alpha}{4\pi da}} = \sqrt{\frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \cos \alpha \sin \alpha)}},$$

kde jsme užili vztahu odvozeného na konci první části úlohy.

- (c) Bez ohledu na torzi a při věnování pozornosti pouze vertikálním silám, jestliže se bóje kolébá pod nějakým úhlem tak, že její váha je nadnášena tlakovou silou okolní vody, objem vytlačené vody je ten samý jako v rovnováze. Tudíž působíště vztlakové síly zůstává v té samé vzdálenosti od středu válce. Důsledkem toho je, že metacentrum M kolébatvého pohybu je právě v centru válce. De fakto tato úloha předpokládá.



Měli bychom také poznamenat, že hmotný střed G bóje je v bodě, kde se tyč dotýká válce, protože hmotnosti tyče a válce se rovnají. Samozřejmě na válec působí moment síly, když je tyč odkloněna ze svislé polohy. K nalezení periody kolébání nejprve potřebujeme určit moment setrvačnosti vzhledem k metacentru M . Začneme nalezením momentu setrvačnosti pevného válce vzhledem k jeho středové ose. Je stejný jako moment setrvačnosti disku vzhledem k centrální ose. Z toho důvodu, je-li M hmotnost válce,

$$I_0 = Ma^2/2 (= \int_0^a r^2 dm) = \int_0^a r^2 \cdot 2Mr/a dr).$$

Další krok je nalezení momentu setrvačnosti tyče vzhledem k jejímu středu:

$$I_{ty} = \int_{-a}^a (Mdx/2a) \cdot x^2 = Ma^2/3.$$

Konečně, užijeme Steinerovu větu k nalezení momentu setrvačnosti celé bóje vzhledem k metacentru M :

$$I_M = Ma^2/2 + [Ma^2/3 + M(2a)^2] = 29/6 Ma^2.$$

(V této části zanedbáváme malý horizontální posun hmotného středu; voda je pouze zprostředkovatel, který může tuto sílu podpořit!) Když se bóje kolébá pod úhlem θ kolem rovnovážné polohy, vratný moment síly je $2Mga \sin \theta \approx 2Mga\theta$ pro malé úhly, což reprezentuje jednoduchý harmonický pohyb (podobný jednoduchému kyvadlu). Tudíž Newtonova pohybová rovnice má tvar

$$I_M \ddot{\theta} = -2Mga\theta,$$

neboli

$$\ddot{\theta} + \frac{12g}{29a} = 0.$$

Řešením je sinusová funkce, $\theta \sim \sin(\omega_\theta t)$, s úhlovou frekvencí

$$\omega_\theta = \sqrt{12g/29a}.$$

(d) Akcelerometry naměřili hodnoty

$$T_\theta/T_z = 1,5$$

čili

$$(\omega_z/\omega_\theta)^2 = 9/4 = 2,25.$$

Tudíž máme

$$2,25 = \frac{3g \sin \alpha}{2a(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \cdot \frac{29a}{12g},$$

z čehož dostaneme (transcendentální) rovnici

$$\alpha - \sin \alpha \cos \alpha = 1,61 \sin \alpha.$$

Protože 1,61 není příliš vzdálené od 1,57, snadno odhalíme fyzikálně akceptovatelné řešení $\alpha = \pi/2$, což bylo ukázati. (De fakto preciznějším

řešením této rovnice může být numericky nalezena hodnota $\alpha = 1,591$.)
 Položením $\alpha = \pi/2$ vede ke zjednodušení ostatních algebraických výrazů: $\omega_z^2 = 3g/\pi a$ a $4d/\rho = 1$ se ukazují být dobrými aproximacemi.
 Protože perioda vertikálního pohybu je 1,0 s, je

$$1,0 = (2\pi/\omega_z)^2 = 4\pi^3 a/3g,$$

což dává poloměr $a = 0,237$ m.

Pro váhu bóje tak vypočteme

$$2M = 2\pi a^2 l d = 2\pi a^2 \cdot a \cdot \rho/4 = \pi a^3 \rho/2$$

a to dává číselně $M \doteq 20,9$ kg.