

Úlohy 25. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - Beijing, Čína

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

Relativistická částice

Ve speciální teorii relativity platí vztah mezi energií E a hybností p volné částice s klidovou hmotností m_0

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} = mc^2.$$

Když na takovou částici působí konzervativní síla, celková energie částice, která je součtem $\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}$ a potenciální energie, se zachovává. Pokud je energie částice velmi vysoká, klidová energie částice může být zanedbána (takovou částici nazýváme ultrarelativistickou částicí).

- 1) Uvažujte jednorozměrný pohyb částice s velmi vysokou energií (u které lze zanedbat klidovou energii), která je předmětem přitažlivé centrální síly konstantní velikosti f . Předpokládejte, že částice se nachází v čase $t = 0$ v bodě s nulovým potenciálem s počáteční hybností p_0 . Popište pohyb částice nejméně pro jednu periodu pohybu: x v závislosti na čase t a hybnost p v závislosti na prostorové souřadnici x . Blíže určete souřadnice „bodů otáčení“ v závislosti na daných parametrech p_0 a f . Naznačte šipkami v (p, x) diagramu, jak se bude pohyb dále vyvíjet. Mohou zde být krátké časové intervaly, v nichž částice není ultrarelativistická, nicméně mohou být zanedbány.
- 2) Mezon je částice složená ze dvou kvarků. Klidová hmotnost M mezonu je rovna celkové energii dvoukvarkového systému děleno c^2 .

Uvažte jednorozměrný model pro mezon v klidu, ve kterém u obou kvarků předpokládáme pohyb podél osy x a přitažlivou sílu mezi nimi o konstantní velikosti f . Předpokládáme, že mohou skrz sebe volně procházet. Pro analýzu vysokoenergetického pohybu kvarků může být klidová hmotnost kvarků zanedbána. V čase $t = 0$ jsou oba kvarky na souřadnici $x = 0$. Znázorněte odděleně pohyb obou kvarků graficky v (x, t) diagramu a (p, x) diagramu, určete souřadnice „bodů otáčení“ v závislosti na M a f , označte v diagramu (p, x) směr pohybu a určete maximální vzdálenost mezi oběma kvarky.

- 3) Vztažnou soustavu užitou v části 2) označme jako soustavu S , laboratorní vztažnou soustavu označme S' . Tato vztažná soustava se pohybuje

ve směru záporné poloosy x konstantní rychlostí $v = 0,6c$. Souřadnice ve druhé vztažné soustavě volíme tak, že bod $x = 0$ v soustavě S splývá s bodem $x' = 0$ v S' v čase $t' = t = 0$. Nakreslete graf pohybu obou kvarků v (x', t') diagramu. Určete souřadnice bodů otáčení v závislosti na M , f a c , a určete maximální vzdálenost mezi kvarky pozorovanou v soustavě S' .

Souřadnice částice pozorované ve vztažných soustavách S a S' jsou dány Lorentzovými transformacemi

$$x' = \gamma(x + \beta ct),$$

$$t' = \gamma \left(t + \beta \frac{x}{c} \right),$$

kde $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ a v je rychlost vztažné soustavy S' vzhledem k soustavě S .

- 4) Pro mezon s klidovou energií $Mc^2 = 140 \text{ MeV}$ a rychlost $0,60c$ vzhledem k soustavě S' , určete jeho energii E' v laboratorní vztažné soustavě S' .

Řešení:

- 1) 1a) Vezměme centrum působící síly jako počátek osy x a nulový potenciálový bod, pak je potenciální energie částice

$$U(x) = f|x|$$

a celková energie je

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} + f|x|.$$

- 1b) Pokud zanedbáme klidovou energii, dostaneme

$$W = |p|c + f|x|.$$

Protože W se během pohybu zachovává, máme

$$W = |p|c + f|x| = p_0 c.$$

Nechť osa x je ve směru počáteční hybnosti částice,

$$pc + fx = p_0 c, \quad \text{když } x > 0, p > 0;$$

$$-pc + fx = p_0 c, \quad \text{když } x > 0, p < 0;$$

$$pc - fx = p_0 c, \quad \text{když } x < 0, p > 0;$$

$$-pc - fx = p_0 c, \quad \text{když } x < 0, p < 0;$$

Maximální vzdálenost částice od počátku, označme ji L , odpovídá hybnosti $p = 0$. To je

$$L = p_0 c / f.$$

- 1c) Podle II. Newtonova zákona

$$\frac{dp}{dt} = F = \begin{cases} -f, & x > 0; \\ f, & x < 0. \end{cases}$$

Rychlost částice můžeme vyjádřit jako (derivováním vztahu pro energii)

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{c}{f} \left| \frac{dp}{dt} \right| = c,$$

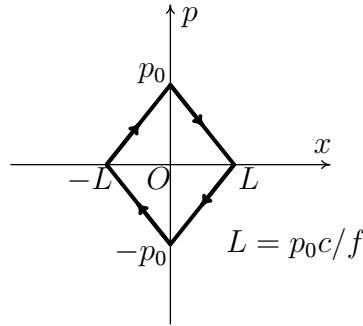
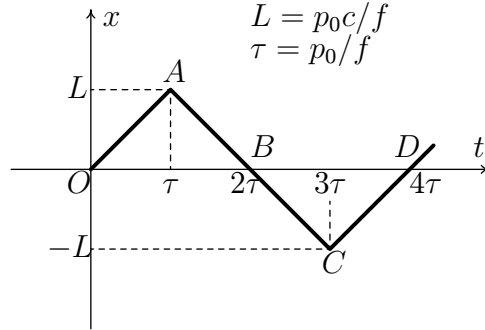
tj. částice s velmi vysokou energií se pohybuje stále rychlostí světla, kromě okamžiků, kdy je extrémně blízko bodům $x = \pm L$. Čas, ve kterém se částice pohybuje od počátku do bodu $x = L$, označme τ a platí

$$\tau = \frac{L}{c} = \frac{p_0}{f}.$$

Částice se tedy pohybuje tam a zpět mezi $x = L$ a $x = -L$ rychlostí c a s periodou $4\tau = 4p_0/f$. Vztah mezi x a t je

$$\left. \begin{array}{lcl} x = ct, & 0 & \leq t \leq \tau, \\ x = 2L - ct, & \tau & \leq t \leq 2\tau, \\ x = -2L + ct, & 2\tau & \leq t \leq 3\tau, \\ x = ct - 4L, & 3\tau & \leq t \leq 4\tau, \end{array} \right\}$$

Odpovídající grafy jsou na obr. 1 a 2.



2) Celková energie dvoukvarkového systému může být vyjádřena jako

$$Mc^2 = |p_1|c + |p_2|c + f|x_1 - x_2|,$$

kde x_1 a x_2 jsou polohové souřadnice a p_1 , p_2 jsou hybnosti kvarků 1 a 2. Pro klidný mezon je celková hybnost kvarků nulová a dva kvarky se pohybují symetricky v opačných směrech, máme tedy

$$p = p_1 + p_2 = 0, \quad p_1 = -p_2, \quad x_1 = -x_2.$$

Nechť p_0 udává hybnost kvarku 1, když je v bodě $x = 0$, pak máme

$$Mc^2 = 2p_0c, \quad \text{neboli} \quad p_0 = Mc/2.$$

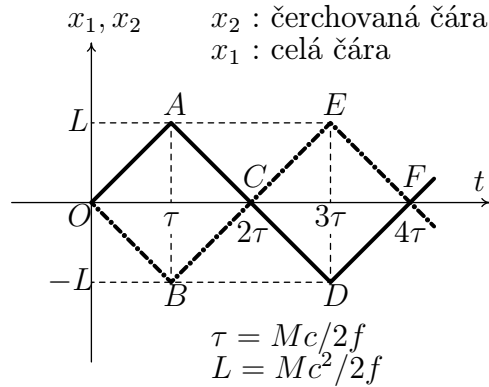
Z těchto tří vztahů lze získat, že polovina celkové energie může být vyjádřena pomocí hybnosti p_1 a souřadnice x_1 kvarku 1:

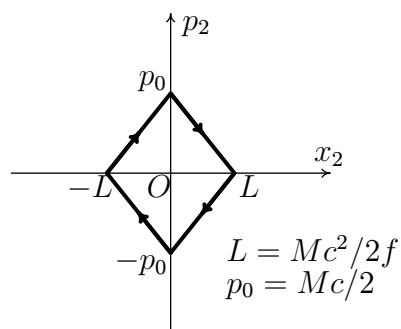
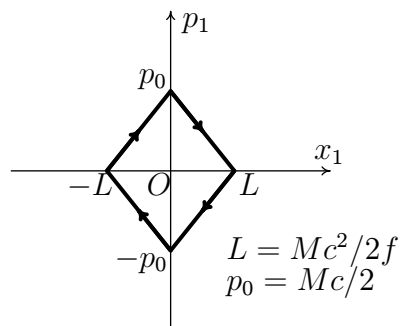
$$p_0c = |p_1|c + f|x_1|,$$

právě tak jako v části 1) pro jednu částici. Z části 1) pak dostáváme také diagramy (x, t) a (p, x) pro kvark 1 (viz obr. 3 a 4). Pro kvark 2 je situace podobná, kromě toho, že jsou ve všech výrazech obrácená znaménka x a p . Diagramy příslušné kvarku 2 jsou také na obr. 3 a 4.

Maximální vzdálenost mezi oběma kvarky je

$$d = 2L = 2p_0c/f = Mc^2/f.$$





- 3) Vztažná soustava S se pohybuje konstantní rychlostí $V = 0,6c$ vzhledem k laboratorní soustavě S' podél osy x' , a počátky obou soustav v čase $t = t' = 0$ splývají. Lorentzovy transformace mezi těmito dvěma soustavami jsou dány

$$x' = \gamma(x + \beta ct),$$

$$t' = \gamma\left(t + \beta \frac{x}{c}\right),$$

kde $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Pro $V = 0,6c$ máme $\beta = 3/5$ a $\gamma = 5/4$. Protože Lorentzovy transformace jsou lineární, přímka v (x, t) diagramu se transformuje na přímku v (x', t') diagramu, tudíž potřebujeme pouze propočítat souřadnice bodů obracení v soustavě S' .

Pro kvark 1 jsou souřadnice bodů obratu v soustavě S a S' následující:

Vztažná soustava S Vztažná soustava S'

x_1	t_1	$x'_1 = \gamma(x_1 + \beta ct_1)$ $= \frac{5}{4}x_1 + \frac{3}{4}ct_1$	$t'_1 = \gamma(t_1 + \beta x_1/c)$ $= \frac{5}{4}t_1 + \frac{3}{4}x_1/c$
0	0	0	0
L	τ	$\gamma(1 + \beta)L = 2L$	$\gamma(1 + \beta)\tau = 2\tau$
0	2τ	$2\gamma\beta L = \frac{3}{2}L$	$2\gamma\tau = \frac{5}{2}\tau$
$-L$	3τ	$\gamma(3\beta - 1)L = L$	$\gamma(3 - \beta)\tau = 3\tau$
0	4τ	$4\gamma\beta L = 3L$	$4\gamma\tau = 5\tau$

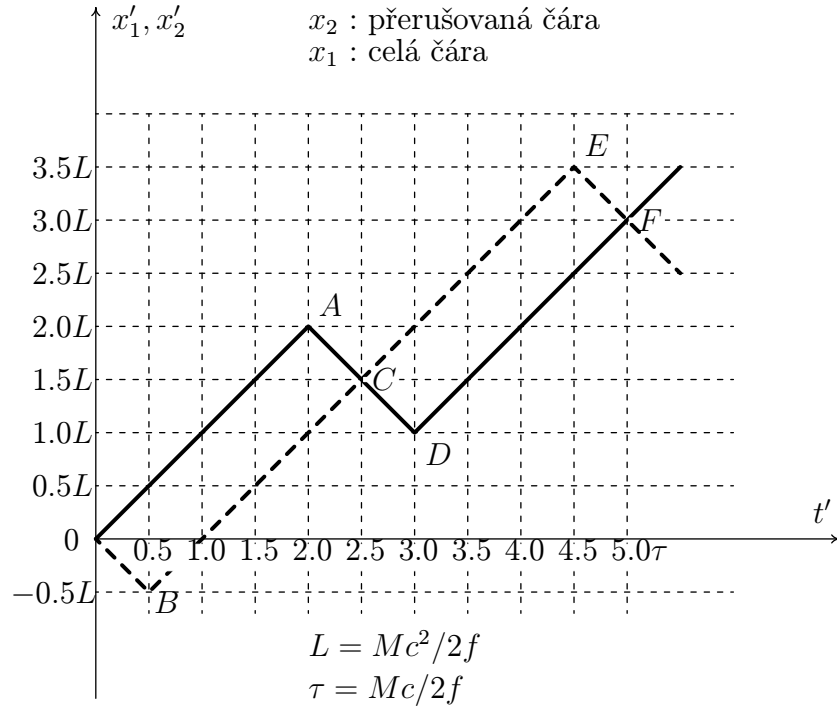
kde $L = p_0c/f = Mc^2/2f$, $\tau = p_0/f = Mc/2f$.

Pro kvark 2 máme

Vztažná soustava S Vztažná soustava S'

x_2	t_2	$x'_2 = \gamma(x_2 + \beta ct_2)$ $= \frac{5}{4}x_2 + \frac{3}{4}ct_2$	$t'_2 = \gamma(t_2 + \beta x_2/c)$ $= \frac{5}{4}t_2 + \frac{3}{4}x_2/c$
0	0	0	0
$-L$	τ	$-\gamma(1 - \beta)L = -\frac{1}{2}L$	$\gamma(1 - \beta)\tau = \frac{1}{2}\tau$
0	2τ	$2\gamma\beta L = \frac{3}{2}L$	$2\gamma\tau = \frac{5}{2}\tau$
L	3τ	$\gamma(3\beta + 1)L = \frac{7}{2}L$	$\gamma(3 + \beta)\tau = \frac{9}{2}\tau$
0	4τ	$4\gamma\beta L = 3L$	$4\gamma\tau = 5\tau$

S užitím výsledků shrnutých výše, (x', t') diagram systému dvou kvarků je znázorněn na obr. 5.



Rovnice přímk OA a OB jsou:

$$\begin{aligned}
 x'_1(t') &= ct'; & 0 &\leq t' \leq \gamma(1+\beta)\tau = 2\tau; \\
 x'_2(t') &= -ct'; & 0 &\leq t' \leq \gamma(1-\beta)\tau = \frac{1}{2}\tau;
 \end{aligned}$$

Vzdálenost mezi dvěma kvarky dosáhne maxima d' , když je $t' = \frac{1}{2}\tau$, tudíž máme pro maximální vzdálenost

$$d' = 2c\gamma(1-\beta)\tau = 2\gamma(1-\beta)L = \frac{Mc^2}{2f}.$$

4) Z daných hodnot a transformace energie vypočteme

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

a to dává číselně $E' = 175 \text{ MeV}$.

2. úloha

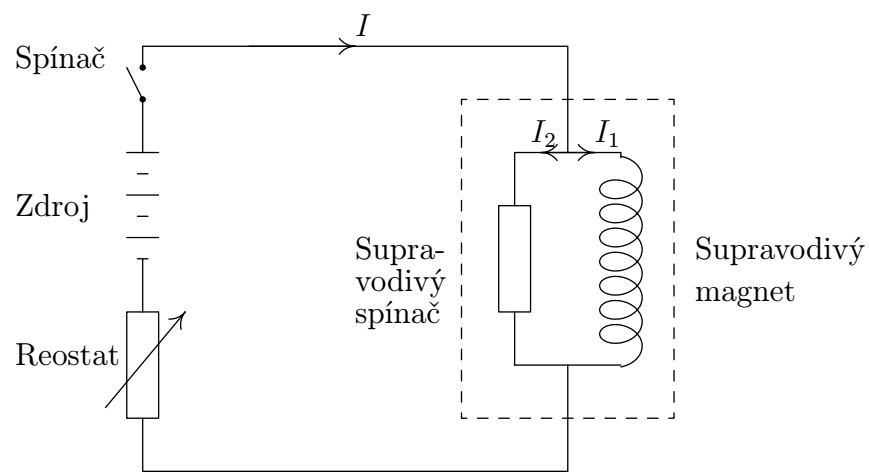
Supravodivý magnet

Supravodivé magnety jsou široce užívány v laboratořích. Nejběžnější forma supravodivého magnetu je solenoid vyrobený ze supravodivého drátu. Podivuhodná vlastnost supravodivých magnetů je, že produkují silné magnetické pole bez energie ztracené kvůli Jouleovu teplu, protože elektrický odpor supravodivého drátu klesá k nule, když je magnet ponořen do kapalného helia teploty 4,2 K. Obvykle je magnet poskytován se speciálně vyrobeným supravodivým spínačem (viz obr. 1). Odpor r spínače může být nastaven: buď na $r = 0$ pro supravodivý stav, nebo $r = r_n$ pro normální stav. Když je odpor v supravodivém stavu, magnet může fungovat v trvalém nastavení, s proudem cirkulujícím mezi magnetem a supravodivým spínačem po neurčitou dobu. Stálé nastavení umožňuje stacionární magnetické pole udržitelné po dlouhou dobu s odpojeným externím zdrojem.

Detaily supravodivého spínače nejsou na obr. 1 zakresleny. Je to obvykle supravodivý drát malé délky zabalený s ohřívacím vláknem a vhodně termálně izolovaný od lázně kapalného helia. Při zahřívání jeho teplota roste a odpor se vrátí do normálního stavu. Typická hodnota r_n je několik ohmů. Zde předpokládáme, že to je $5\ \Omega$. Induktance supravodivého magnetu závisí na jeho velikosti, zde předpokládáme 10 H pro magnet na obr. 1. Celkový proud I se může měnit regulací odporu R .

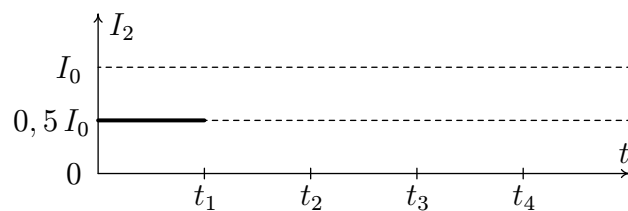
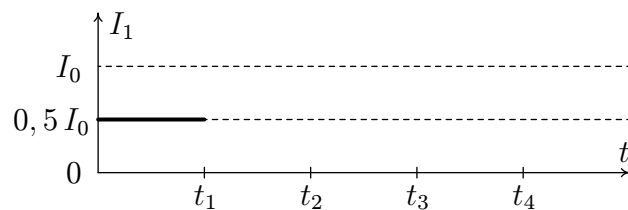
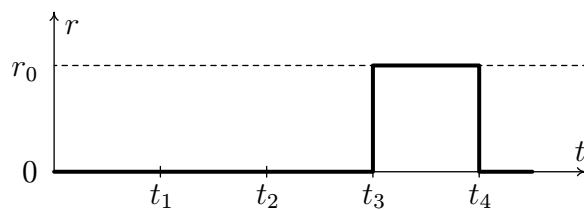
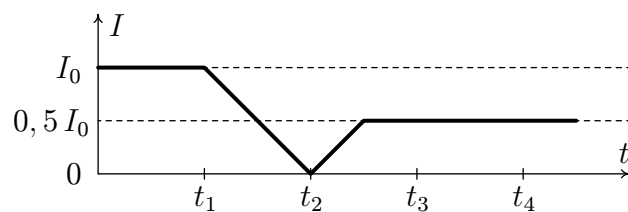
Tento problém se řeší pouze užitím grafů!

Šipky udávají kladný směr proudů I , I_1 a I_2 .

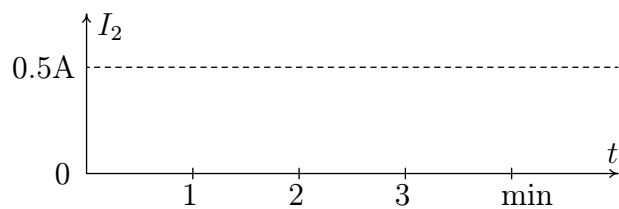
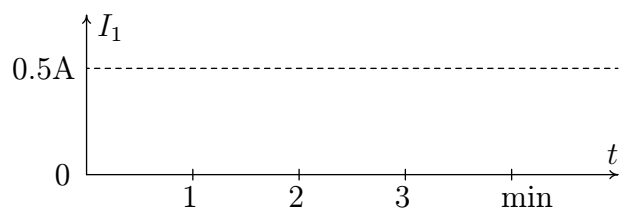
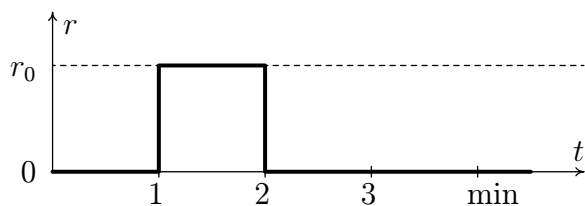
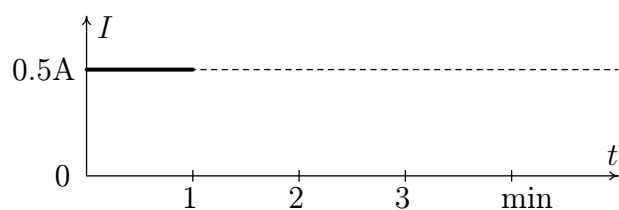


Tato část uzavřená přerušovanou čarou
je umístěna v lázni kapalného helia
o teplotě 4,2 K.

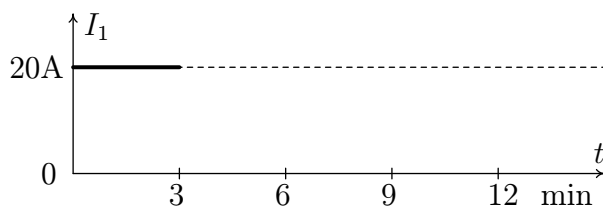
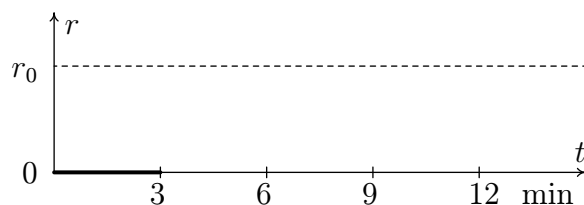
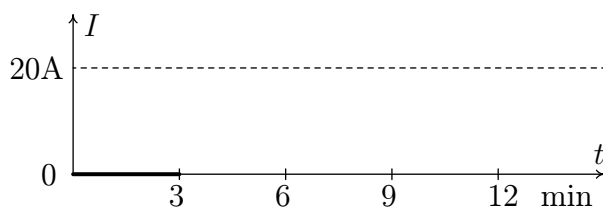
- 1) Je-li celkový proud I a odpor r supravodivého spínače měněn v závislosti na čase podle obr. 2a a 2b, a za předpokladu, že proudy I_1 a I_2 protékající magnetem a spínačem jsou si na počátku rovny (obr. 2c a 2d), jak se mění s časem od t_1 do t_4 ? Nakreslete příslušné grafy.

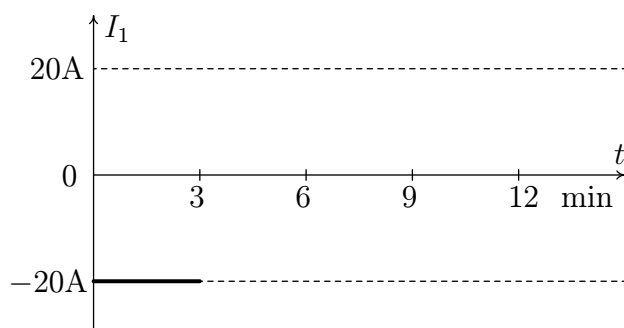


- 2) Předpokládejte, že spínač K je sepnut v čase $t = 0$, když je $r = 0$, $I_1 = 0$, $R = 7,5 \Omega$ a celkový proud $I = 0,5 \text{ A}$. Držíme-li spínač zavřený, odpor r supravodivého spínače se mění podle obr. 3b. Nakreslete grafy závislostí proudů I , I_1 a I_2 na čase.

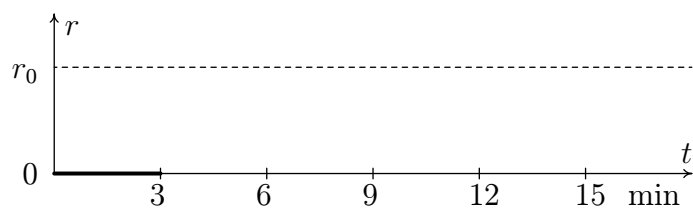
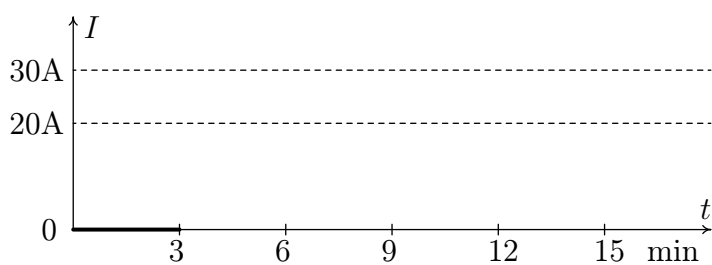


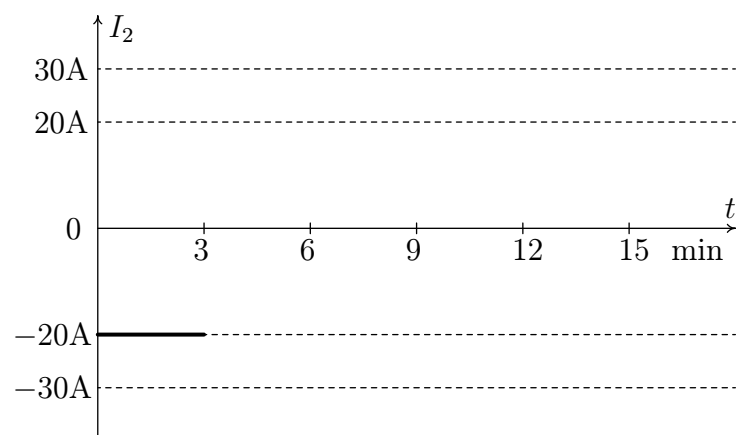
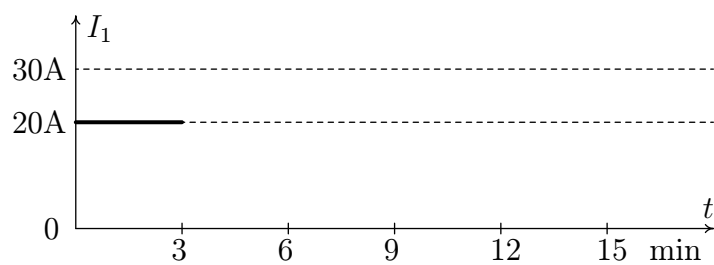
- 3) Pouze malé proudy, menší než 0,5 A, mohou téci skrz supravodivý spínač, když je v normálním stavu, při větších proudcích by se spínač spálil. Předpokládejte, že supravodivý magnet pracuje ve stálém nastavení, tj. $I = 0$ a $I_1 = i_1$ (např. 20 A), $I_2 = -i_1$, jak je naznačeno na obr. 4, od $t = 0$ do $t = 3$ min. Jestliže má být experiment zastaven snížením proudu procházejícím magnetem na nulu, jak byste to provedli? Musí to být provedeno v několika různých krocích. Graficky znázorněte příslušné změny I , r , I_1 a I_2 .





- 4) Předpokládejte, že magnet pracuje ve stálém modu se stálým proudem 20 A (od $t = 0$ do $t = 3$ min, viz obr. 5). Jak byste změnili nastavení magnetu na trvalý mod při proudu 30 A? Graficky nakreslete svoji odpověď.





Řešení:

1) Pro $t = t_1$ do t_3 :

Protože $r = 0$, napětí na magnetu je $V_M = LdI_1/dt = 0$, tudíž

$$I_1 = I_1(t_1) = \frac{1}{2}I_0;$$

$$I_2 = I - I_1 = I - \frac{1}{2}I_0.$$

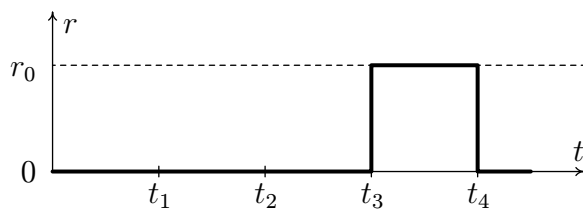
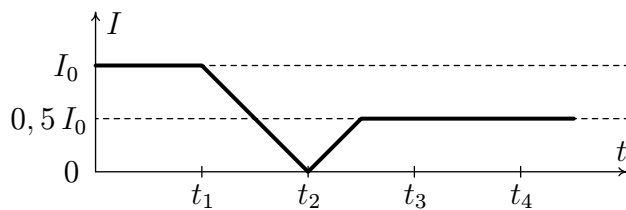
Pro $t = t_3$ do t_4 :

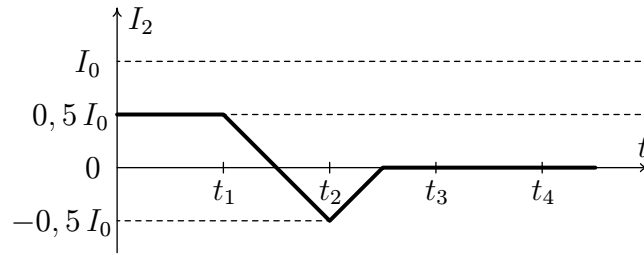
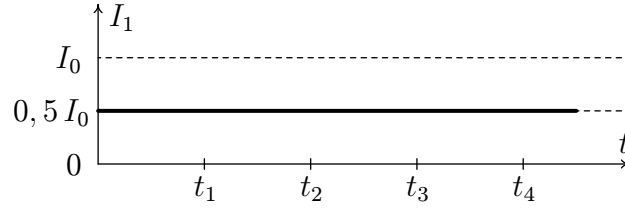
Protože v čase $t = t_3$ je $I_2 = 0$ a I se drží na hodnotě $\frac{1}{2}I_0$, pak v čase $t = t_3$ je $V_M = I_2r_n = 0$, a tedy I_1 a I_2 se nebudou měnit.

$$I_1 = \frac{1}{2}I_0;$$

$$I_2 = 0.$$

Výsledky jsou znázorněny na obr. 6.





2) Pro $t = 0$ do $t = 1$ min:

Protože $r = 0$, $V_M = LdI_1/dt = 0$, a tedy

$$I_1 = I_1(0) = 0,$$

$$I_2 = I - I_1 = 0,5 \text{ A}.$$

V čase $t = 1$ min se r náhle zvedne z 0 na r_n , I okamžitě klesne z E/R na $E/(R + r_n)$, protože I_1 se nemůže náhle změnit kvůli indukanci vinutí magnetu. Pro $E/R = 0,5 \text{ A}$, $R = 7,5 \Omega$ a $r_n = 5 \Omega$ klesne I na $0,3 \text{ A}$.

Pro $t = 1$ min až 2 min:

I , I_1 a I_2 pozvolna dosáhnou svých stálých hodnot:

$$I = \frac{E}{R} = 0,5 \text{ A},$$

$$I_1 = I = 0,5 \text{ A},$$

$$I_2 = 0.$$

Časová konstanta je

$$\tau = \frac{L(R + r_n)}{Rr_n}.$$

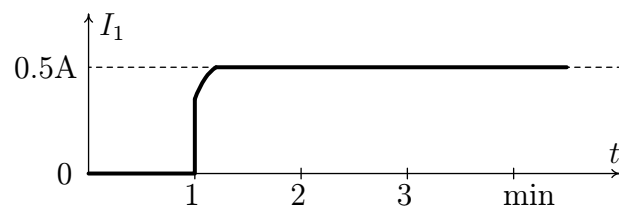
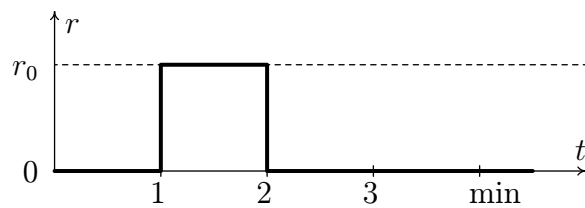
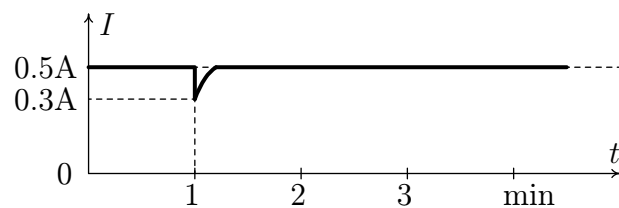
Je-li $L = 10 \text{ H}$, $R = 7,5 \text{ } \Omega$ a $r_n = 5 \text{ } \Omega$, je $\tau = 3 \text{ s}$.

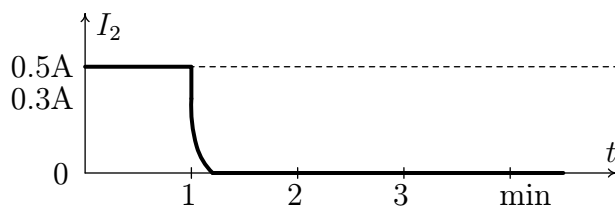
Pro $t = 2 \text{ min}$ až 3 min :

Protože $r = 0$, I_1 a I_2 se nezmění, a je tedy

$$I_1 = 0,5 \text{ A.}$$

$$I_1 = 0 \text{ A.}$$





3) Prováděcí kroky jsou následující:

První krok

Zapneme spínač K a zvýšíme celkový proud I na 20 A, tj. aby byl roven proudu I_1 . Protože supravodivý spínač je ve stavu $r = 0$, takže $V_M = LdI_1/dt = 0$, znamená to, že I_1 se nemůže změnit a I_2 vzroste o 20 A, tj. I_2 se změní z -20A na nulu.

Druhý krok

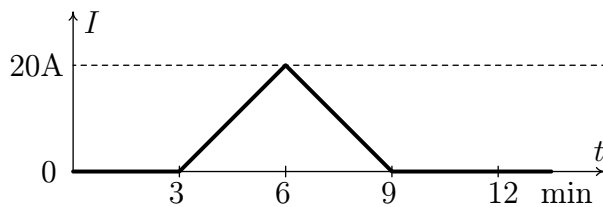
Sepneme r z 0 na r_n .

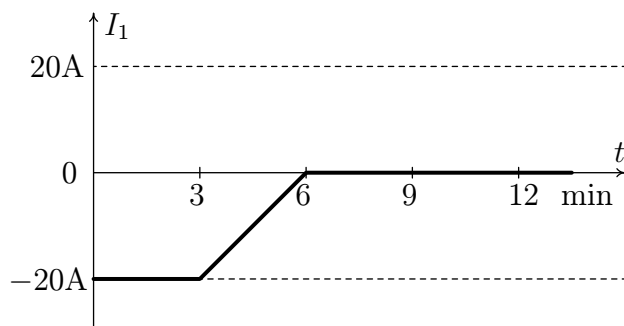
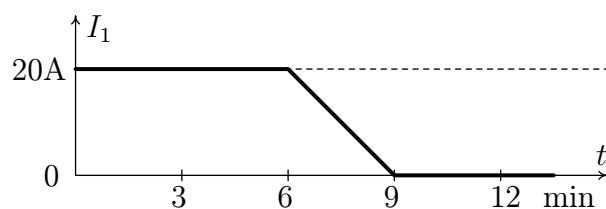
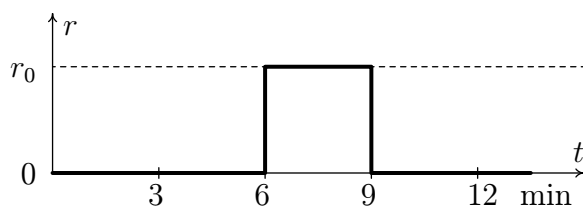
Třetí krok

Postupně snižujeme I na nulu, zatímco udržujeme $I_2 < 0,5$ A; protože $I_2 = V_M/r_n$ a $V_M = LdI_1/dt$, kde $L = 10$ H, $r_n = 5 \Omega$, pak požadavek $I_2 < 0,5$ A odpovídá změně $dI_1/dt < 0,25$ A/s, tj. pokles menší než 15 A za minutu. Na obr. 8 je znázorněn pokles dI/dt zhruba 0,1 A/s a pokles dI_1/dt se také pohybuje kolem této hodnoty, takže je tento požadavek splněn.

Čtvrtý krok

Přepnutí r na nulu, když $V_M = 0$ a vypnutí spínače K . Výsledky jsou ukázány na obr. 8.





- 4) První a druhý krok jsou stejné jako v části 3), výsledkem je $I_2 = 0$.

Třetí krok

Zvýšíme I z 10 A na 30 A tak, abychom splnili podmínku $I_2 < 0,5$ A.

Čtvrtý krok

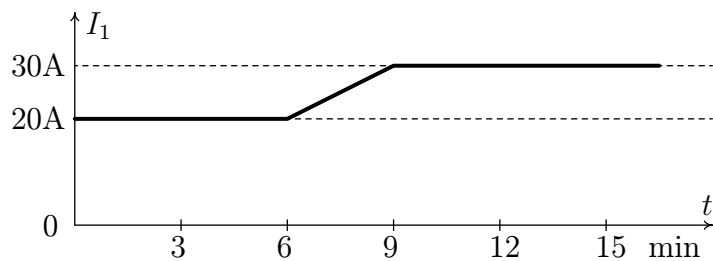
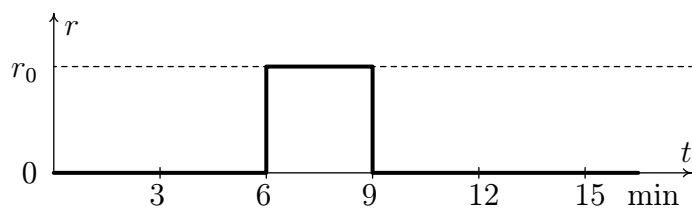
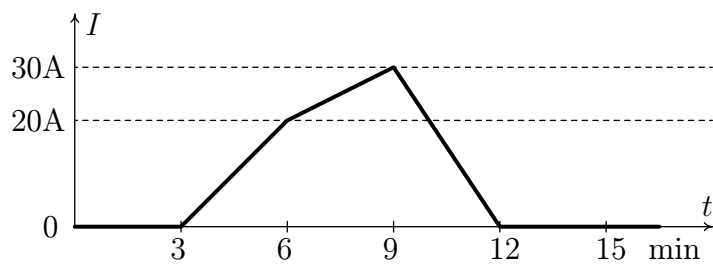
Sepneme r na nulu, když je $V_M = 0$.

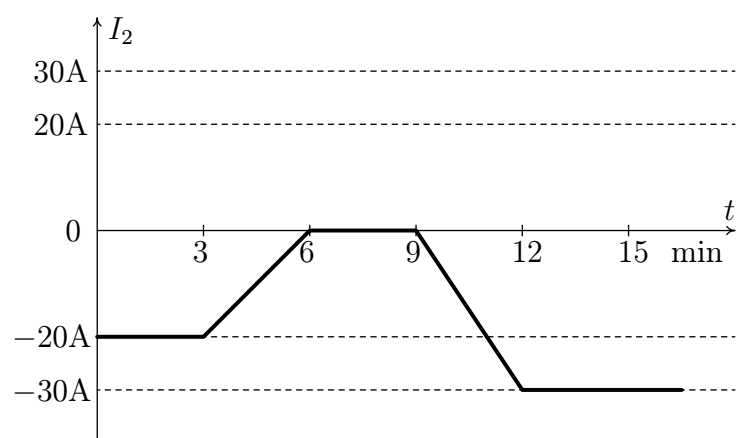
Pátý krok

Snížíme I na nulu, $I_1 = 30$ A se nezmění, neboť $V_M = 0$. $I_2 = I - I_1$ se sníží na -30 A. Proud tekoucí magnetem je tudíž uzavřen supravodivým spínačem.

Poslední krok

Vypneme spínač K . Magnet tak pracuje v trvalém modu. Výsledky jsou ukázány na obr. 9.



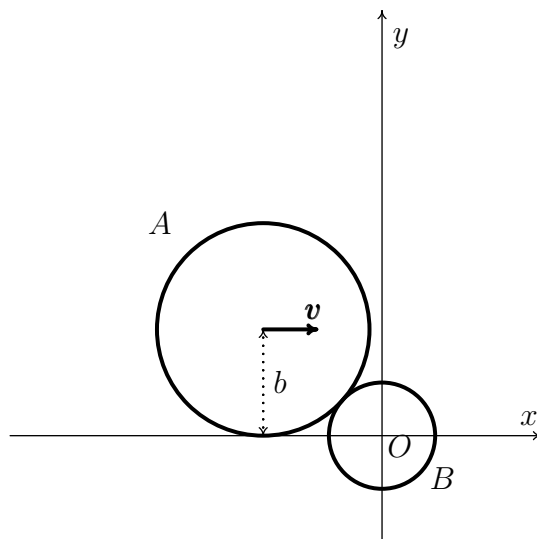


3. úloha

Srážka disků s povrchovým třením

Homogenní disk A hmotnosti m a poloměru R_A se pohybuje posuvným pohybem po hladké vodorovné $x - y$ rovině ve směru kladné poloosy x s rychlostí V (viz obrázek). Střed disku je ve vzdálenosti b od osy x . Srazí se s nehybným homogenním diskem B , jehož střed je zpočátku umístěn v počátku souřadnicové soustavy. Disk B má tu samou hmotnost a tu samou tloušťku jako A , ale jeho poloměr je R_B . Předpokládáme, že rychlosti disků v bodě kontaktu, ve směru kolmém k přímce spojující jejich středy, jsou po kolizi stejně veliké. Také předpokládáme, že velikosti vzájemných rychlostí disků podél přímky spojující jejich středy jsou stejné před a po srážce.

- 1) Pro takovou srážku určete X a Y složku rychlostí obou disků po srážce, tj. V'_{AX} , V'_{AY} , V'_{BX} a V'_{BY} , v závislosti na m , R_A , R_B , V a b .
- 2) Určete kinetické energie E'_A disku A a E'_B disku B po srážce pomocí m , R_A , R_B , V a b .



Řešení:

- 1) Když se disk A srazí s diskem B , nechť $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor podél normály k povrchům v bodě dotyku a $\mathbf{t}$ buď tangenciální jednotkový vektor (viz obr.). Nechť φ je úhel mezi $\mathbf{n}$ a osou x . Pak máme

$$b = (R_A + R_B) \sin \varphi.$$

Složky hybnosti disků A a B podél $\mathbf{n}$ a $\mathbf{t}$ před kolizí jsou:

$$mV_{An} = mV \cos \varphi, \quad mV_{Bn} = 0,$$

$$mV_{At} = mV \sin \varphi, \quad mV_{Bt} = 0.$$

Označme odpovídající složky hybnosti disků A a B po srážce jako mV'_{An} , mV'_{Bn} , mV'_{At} a mV'_{Bt} . Nechť ω_A a ω_B jsou úhlové rychlosti disků A a B vzhledem k osám jdoucím jejich středy po kolizi a I_A a I_B ať jsou příslušné momenty setrvačnosti. Pak,

$$I_A = \frac{1}{2}mR_A^2, \quad I_B = \frac{1}{2}mR_B^2.$$

Zákon zachování hybnosti dává

$$mV \cos \varphi = mV'_{An} + mV'_{Bn}, \quad (1)$$

$$mV \sin \varphi = mV'_{At} + mV'_{Bt}. \quad (2)$$

Zákon zachování momentu hybnosti vzhledem k počátku O dává

$$mVb = mV'_{At}(R_A + R_B) + I_A\omega_A + I_B\omega_B. \quad (3)$$

Impuls třecí síly působící na B během srážky způsobí změnu hybnosti mV'_{Bt} podél $\mathbf{t}$ a vytvoří zároveň moment hybnosti $I_B\omega_B$. Je tedy

$$mV'_{Bt}R_B = I_B\omega_B. \quad (4)$$

Během srážky nabudou v bodě dotyku oba disky A a B stejné tečné rychlosti, takže máme

$$V'_{At} - \omega_A R_A = V'_{Bt} - \omega_B R_B \quad (5)$$

Je dáno, že velikosti relativních rychlostí v normálového směru obou disků se před a po kolizi rovnají, tj.

$$V \cos \phi = V'_{Bn} - V'_{An} \quad (6)$$

Z rovnic (1) a (6) dostáváme

$$\begin{aligned} V'_{An} &= 0, \\ V'_{Bn} &= V \cos \varphi. \end{aligned}$$

Z rovnic (2) až (5) dostáváme

$$\begin{aligned} V'_{At} &= \frac{5}{6}V \sin \varphi, \\ V'_{Bt} &= \frac{1}{6}V \sin \varphi, \\ \omega_A &= \frac{V \sin \varphi}{3R_A}, \\ \omega_B &= \frac{V \sin \varphi}{3R_B}. \end{aligned}$$

Po kolizi jsou x a y složky rychlostí následující:

$$V'_{Ax} = V'_{An} \cos \varphi + V'_{At} \sin \varphi = \frac{5Vb^2}{6(R_A + R_B)^2}, \quad (7)$$

$$V'_{Ay} = V'_{An} \sin \varphi + V'_{At} \cos \varphi = \frac{5Vb\sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{6(R_A + R_B)^2}, \quad (8)$$

$$V'_{Bx} = V'_{Bn} \cos \varphi + V'_{Bt} \sin \varphi = V \left[1 - \frac{5b^2}{6(R_A + R_B)^2} \right], \quad (9)$$

$$V'_{By} = V'_{Bn} \sin \varphi + V'_{Bt} \cos \varphi = \frac{5Vb\sqrt{(R_A + R_B)^2 - b^2}}{6(R_A + R_B)^2}, \quad (10)$$

2) Po srážce je kinetická energie disku A rovna

$$E'_A = \frac{1}{2}m(V'^2_{Ax} + V'^2_{Ay}) + \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 = \frac{3mV^2b^2}{8(R_A + R_B)^2}, \quad (11)$$

zatímco kinetická energie disku B je

$$\begin{aligned} E'_B &= \frac{1}{2}m(V'^2_{Bx} + V'^2_{By}) + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2 = \\ &= \frac{1}{2}mV^2 \left[1 - \frac{11b^2}{12(R_A + R_B)^2} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Hodnotící schéma 1. úlohy

Část 1. je celkem za 2 body, rozdělené následovně (body v závorce se udělují při částečně správném výsledku):

- 0,4 bodu za tvar křivky $x(t)$ v obr. 1
- 0,3 bodu za 4 stejné intervaly v obr. 1
- (0,3 bodu za korektní odvození vzorce)
- 0,1 bodu za každou souřadnici bodů otáčení A a C , celkem 0,4 bodu
- 0,4 bodu za tvar křivky $p(x)$ v obr. 2
- (0,2 bodu za korektní odvození)
- 0,1 bodu za každé určení p_0 , $L = p_0 c/f$, $-p_0$, $-L$ a šipky, celkem 0,5 bodu.
- (0,05 bodu za každý správný výpočet souřadnice bodů otáčení)

Část 2. je celkem za 4 body:

- 0,6 bodu za každou křivku $x_1(t)$ a $x_2(t)$, celkem 1,2 bodu
- 0,1 bodu za každou souřadnici bodů otáčení A , B , D a E v obr. 3, celkem 0,8 bodu
- 0,3 bodu za každou křivku $p_1(x_1)$ a $p_2(x_2)$, celkem 0,6 bodu
- 0,1 bodu za určení $p_0 = Mc/2$, $L = Mc^2/2f$, $-p_0$, $-L$ a šipky v obr. 4a a 4b, celkem 1 bod
- 0,4 bodu za odvození $d = Mc^2/f$.

Část 3. je celkem za 3 body:

- 0,8 bodu za každou křivku $x'_1(t')$ a $x'_2(t')$, celkem 1,6 bodu
- 0,1 bodu za každou souřadnici bodů otáčení A , B , D a E v obr. 5, celkem 0,8 bodu (příp. 0,05 za každý správný výpočet)
- 0,6 bodu za odvození $d = Mc^2/2f$

Část 4. je za 1 bod:

- 0,5 bodu za určení vzorce
- 0,5 bodu za numerickou hodnotu a jednotky

Hodnoticí schéma 2. úlohy

Část 1. za 2 body:

- 0,5 bodu za určení každé z veličin: I_1, I_2 od $t = t_1$ do t_3 a I_1, I_2 od $t = t_3$ do t_4

Část 2. za 3 body:

- 0,3 bodu za určení každé z veličin: I_1, I_2 od $t = 0$ do 1 min, I, I_1, I_2 v $t = 1$ min, a I_0, I_1, I_2 od $t = 1$ min do $t = 2$ min

Část 3. za 2 body:

- 0,25 bodu za každý úsek v obr. 8 od 3 do 9 min, celkem 8 sekci

Část 4. za 3 body:

- 0,25 bodu za každý úsek v obr. 9 od 3 do 12 min, celkem 12 sekci

Hodnoticí schéma 3. úlohy

1. Rychlosti částí disků A a B po srážce jsou určeny v rovnicích (7) až (10). Celkový počet bodů této části je 8. Pokud nebylo dosaženo korektního výsledku, přiděľujte body podle následujících pravidel:

- 0,8 bodu za každou správnou složku rychlosti
- 0,8 bodu za korektní popis toho, že velikosti relativních rychlostí disků podél přímky procházejících jejich středy jsou stejné před a po srážce
- 0,8 bodu za správný popis zachování momentu hybnosti
- 0,8 bodu za správný popis rovnosti tangenciálních složek rychlostí v bodě dotyku
- 0,8 bodu za správný popis vztahu mezi impulsem síly a momentem hybnosti

2. Kinetické energie disků A a B po srážce jsou určeny vzorci (11) a (12).

Celkový počet bodů za tuto část je 2. Bodujte takto:

- 1 bod za správné určení kinetické energie disku A
- 1 bod za správné určení kinetické energie disku B