

Úlohy 24. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - Williamsburg, Virginia, USA

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

Tabulka všeobecných dat

Veličina	Značka	Hodnota
Střední poloměr Země	R_E	$6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$
Tíhové zrychlení	g	$9,8 \text{ m s}^{-2}$
Gravitační konstanta	G	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
Permitivita vakua	ϵ_0	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
Permeabilita vakua	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$
Rychlost světla ve vakuu	c	$3,00 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
elementární náboj	e	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
hmotnost elektronu	m_e	$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
hmotnost protonu	m_p	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Planckova konstanta	h	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Avogadrova konstanta	N_A	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	k	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Molární plynová konstanta	R	$8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

1. úloha

Atmosférická elektřina

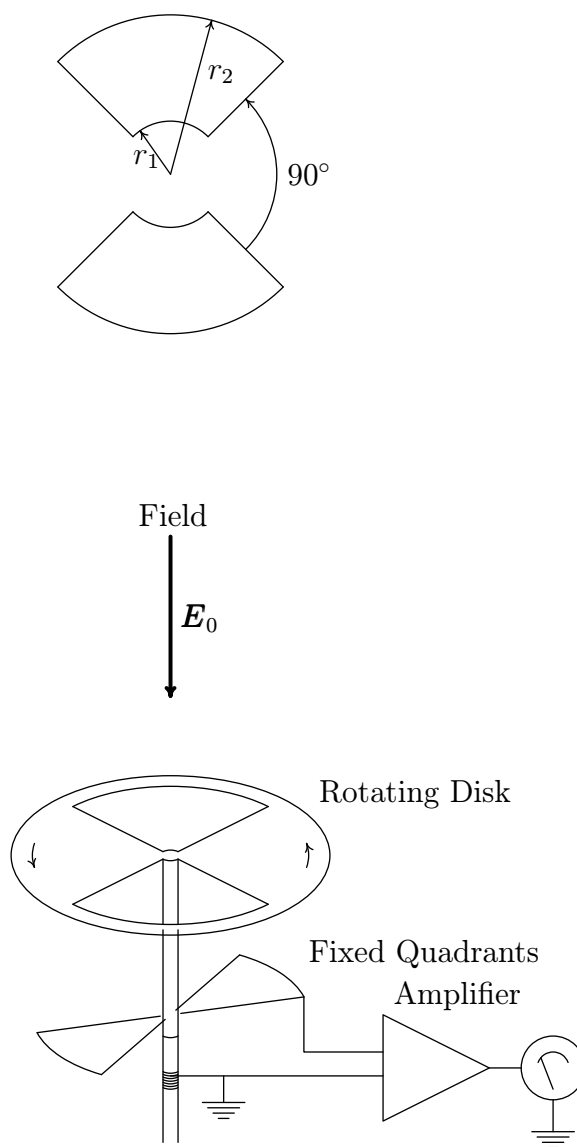
Z hlediska elektrostatiky, povrch Země lze považovat za dobrý vodič. Nese jistý celkový náboj Q_0 a průměrná povrchová hustota náboje je σ_0 .

- 1) Za podmínky pěkného počasí je na zemském povrchu přítomno dolů mířící elektrické pole intenzity E_0 velikosti asi 150 V/m. Odvoďte velikost hustoty náboje na zemském povrchu a celkový náboj rozptýlený na zemském povrchu.
- 2) Velikost intenzity elektrického pole klesá s výškou a ve výšce 100 m je okolo 100 V/m. Vypočítejte průměrnou velikost náboje na m^3 atmosféry mezi zemským povrchem a výškou 100 m.
- 3) Výsledná hustota náboje, kterou jste spočítali v (2) je vlastně výsledkem přítomnosti téměř stejného počtu kladných a záporných iontů (s nábojem e a $-e$) v jednotce objemu (n_+ a n_-). Blízko zemskému povrchu, když je dobré počasí, $n_+ = n_- \approx 6 \cdot 10^8 \text{ m}^{-3}$. Tyto ionty se pohybuje vlivem vertikálního elektrického pole. Jejich rychlost je úměrná intenzitě pole:

$$v \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \cdot E,$$

kde v je rychlost v m/s a E je ve V/m. Jak dlouho bude trvat pohyb atmosférických iontů než neutralizuje polovinu zemského povrchového náboje, pokud se jiné procesy (např. blesky) nevyskytnou, aby jej udržely?

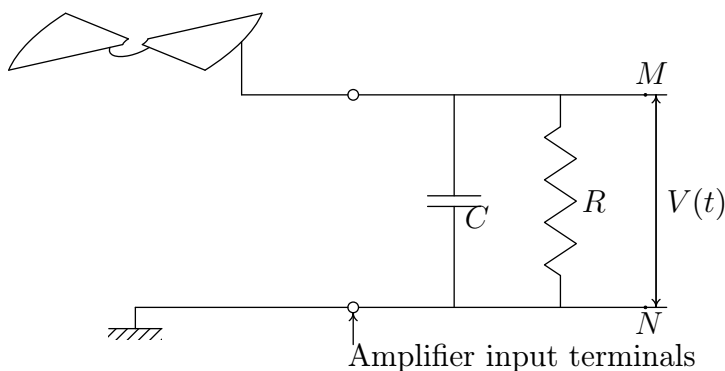
- 4) Jeden způsob měření atmosférického elektrického pole, a tudíž i σ_0 , je pomocí systému na obrázku. Dva kovové kvadranty, izolované od země, ale spojené mezi sebou, jsou namontované přesně vespod uzemněného rotačního disku s dvěma vyřezanými dírami stejného tvaru. (Na obrázku je prostor mezi nimi přehnaný, aby bylo vidět uspořádání.) Dvakrát za každý oběh jsou izolované kvadranty kompletně vystaveny poli a pak (o 1/4 periody později) kompletně odstíněny. Nechť T je perioda otáčení a nechť vnitřní a vnější poloměr izolovaných kvadrantů je r_1 a r_2 .



Vezměme $t = 0$ jako okamžik, kdy jsou izolované kvadranty kompletně odstíněny.

Nalezněte vztahy, které dávají celkový náboj $q(t)$ indukovaný na horním povrchu izolovaných kvadrantů jako funkci času mezi $t = 0$ a $t = T/2$, a načrtněte graf této závislosti.

(Efekty atmosférického iontového proudu mohou být zanedbány.)



- 5) Systém popsany v (4) je spojen se zesilovačem, jehož vstupní obvod ke ekvivalentní kondenzátoru C a rezistoru R zapojených paralelně. (Můžete předpokládat, že kapacitance systému kvadrantů je zanedbatelná v porovnání s kapacitou C .) Načrtněte graf závislosti potenciálového rozdílu V mezi body M a N jako funkci času t během jednoho otočení disku, je-li dána doba rotace T a dále je-li:

a) $T = T_a \ll CR$;

b) $T = T_b \gg CR$.

(Předpokládáme, že C a R jsou konstantní; jenom T se mění v situacích (a) a (b)). Nalezněte výraz pro přibližnou hodnotu poměru V_a/V_b , největších hodnot $V(t)$ v případech (a) a (b).

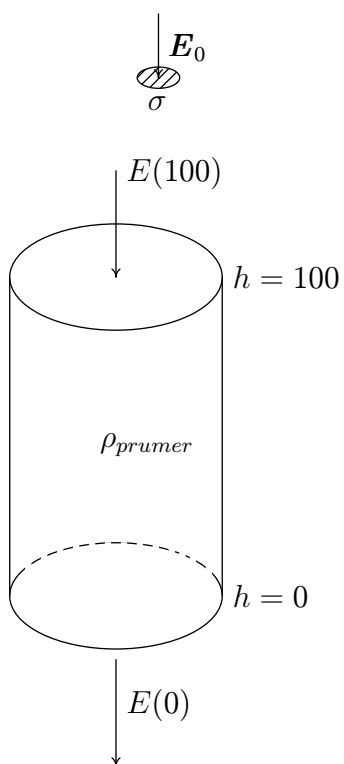
- 6) Předpokládejte, že $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $r_1 = 1 \text{ cm}$, $r_2 = 7 \text{ cm}$, $C = 0,01 \text{ }\mu\text{F}$, $R = 20 \text{ M}\Omega$ a předpokládejte, že disk vykoná 50 obrátek za sekundu. Jaká je přibližně největší hodnota V během jedné otočky v tomto případě?

Řešení:

1) Podle Gaussovy věty

$$\sigma = \epsilon_0 E_0 = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2.$$

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = -6,7 \cdot 10^5 \text{ C}.$$



2) Uvažujte válec o průřezu A s podstavami ve výškách 0 a 100 m.

Podle Gaussova zákona,

$$E(0)A - E(100)A = q_{uvnitr}/\epsilon_0 = \rho_{prumer} \cdot (100A)/\epsilon_0.$$

$$\rho_{prumer} = \frac{\epsilon_0[E(0) - E(100)]}{100} = 4,4 \cdot 10^{-12} \text{ C/m}^3.$$

- 3) Pokud vodič obsahuje n nábojů na jednotku objemu, každý s nábojem q a pohybující se rychlostí v , proud na jednotku plochy je dán jako

$$j = nqv.$$

Zde máme jak kladné, tak záporné náboje ($\pm e$). Nepochybně, při dolů mířící intenzitě elektrického pole, se kladné náboje budou pohybovat dolů a záporné nahoru. V popsané situaci, pouze kladné náboje mohou přispívat k neutralizaci náboje na zemském povrchu. Tudíž máme (bereme-li směr dolů za tímto účelem kladně):

$$j = n_+ev = 1,44 \cdot 10^{-14} E.$$

Nyní j vezměme jako poměr změny ($d\sigma/dt$) hustoty povrchového náboje σ a položíme intenzitu E (branou ve směru dolů kladně) rovnou $-\sigma/\epsilon_0$. Předchozí rovnici lze tudíž psát ve tvaru

$$\frac{d\sigma}{dt} = -1,44 \cdot 10^{-14} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \doteq -\frac{1}{600}\sigma.$$

Toto je rovnice podobná zákonu radioaktivního rozpadu. Jejím řešením je exponenciální pokles σ v čase:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau},$$

kde $\tau = 600$ s.

Když položíme $\sigma(t) = \sigma_0/2$, pak dostáváme $t = \tau \ln 2 \doteq 7$ min.

(Jednodušší přibližné řešení je předpoklad, že hodnota j zůstává konstantní. Pak

$$j_0 = 1,44 \cdot 10^{-14} E_0 \doteq 2,15 \cdot 10^{-12} \text{ A/m}^2.$$

Protože $|\sigma_0| = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$, lze psát $|\sigma_0/2| = j_0 \cdot t$ a odtud máme $t \doteq 5$ min.)

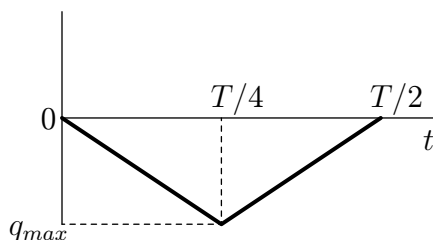
- 4) Jsou-li v okamžiku $t = 0$ izolované kvadranty kompletně odstíněny, máme následující vztahy:

$$\begin{array}{ll} \text{Pro } 0 \leq t \leq \frac{T}{4}, & q(t) = -2\pi(r_2^2 - r_1^2)\epsilon_0 E_0 \frac{t}{T}. \\ \text{Pro } \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}, & q(t) = -\pi(r_2^2 - r_1^2)\epsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{2t}{T}\right). \end{array}$$

Odpovídající variace se vyskytují během všech následujících čtvrtcyklů.

Maximální (záporný) indukovaný náboj je dán jako:

$$q_{max} = -\frac{\pi}{2}(r_2^2 - r_1^2)\epsilon_0 E_0.$$



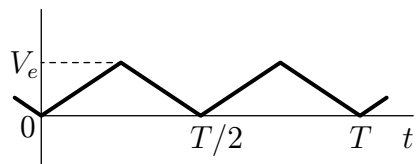
- 5) Tuto úlohu lze diskutovat bez provedení analýzy celé obrátky. Jediné, co si je třeba uvědomit, je, že hodnota toku náboje do zesilovače se dělí na podíl nabíjení kondenzátoru CdV/dt , a vodivý proud V/R procházející rezistorem. Jsou zde dvě extrémní situace, závisející na tom, zda množství ztráty náboje rozptylem během jedné čtvrtperrody je malé nebo velké vzhledem k CV .

- (a) Je-li $CV \gg (V/R) \cdot (T/4)$, tj. $T = T_a \ll CR$ – rezistorem R projde za čtvrtperodu velmi malý náboj. Tudíž, když jsou izolované kvadranty nabité indukci záporně, téměř rovnocenný kladný náboj je odevzdán kondenzátoru C . Tudíž $V(t)$ roste téměř lineárně s časem mezi $t = 0$ a $t = T/4$, a pak téměř lineárně klesá o stejné množství mezi $t = T/4$ a $t = T/2$. V tomto případě,

$$V_{max} = V_a = \frac{|q_{max}|}{C},$$

kde q_{max} musí být hodnota získaná v části 4).¹

¹*Poznámka:* Nakonec (dokud není CR nekonečné) tvar křivky V_a dostane tvar pilotových kmitů měnících se symetricky mezi $\pm q_{max}/2C$. Formulace úlohy se vyhýbá této komplikaci upřesněním, že V je měřeno právě poté, co otáčení začalo.

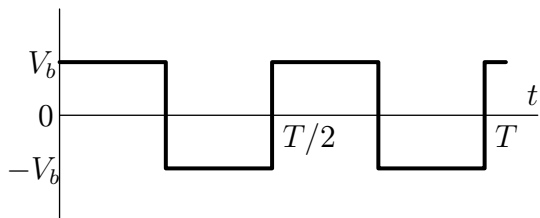


- (b) Jest opačně $T = T_b \gg CR$ – tj. většina náboje je rychle odvedena skrz rezistor R . Konstantní kladný proud teče skrz rezistor R , dokud velikost q roste, a rovný záporný proud protéká, když velikost indukovaného náboje q klesá. Velikost tohoto proudu je přibližně rovna $|q_{max}|V/(T_b/4)$. Výsledné napětí na rezistoru R je přibližně konstantní během každé čtvrtperrody a je buď kladné, nebo záporné. V tomto případě

$$V_{max} = V_b = \frac{4q_{max}R}{T_b}.$$

Porovnáním výsledků dostaneme

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_b}{4CR}.$$



- 6) Máme číselně $CR = 0,2$ s a $T = 0,02$ s. Tudíž $CR = 10T$, což splňuje podmínku $CR \gg T$. Těchto údajů užijeme k řešení rovnice uvedené výše.

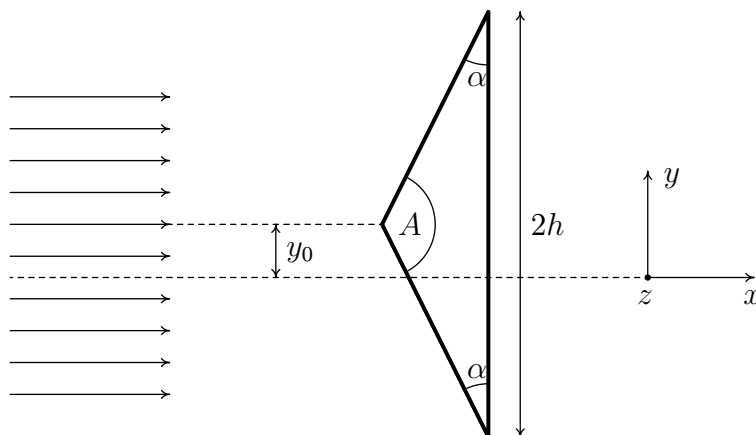
Máme $A_{max} = \frac{\pi}{2}(7^2 - 1^2) = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$, dále máme $E_0 = 150 \text{ V/m}$, $\sigma_0 = 1,33 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$. Odtud $q_{max} = \sigma A = 1,0 \cdot 10^{-11} \text{ C}$, a tudíž

$$V_{max} = \frac{q_{max}}{C} = 1 \text{ mV}.$$

2. úloha

Síly laseru a průhledný hranol

Prostřednictvím lomu silného laserového paprsku lze vyvinout značnou sílu na malý průhledný objekt. Abychom se přesvědčili, že je tomu tak, uvažujme malý skleněný trojúhelníkový hranol s lámavým úhlem $A = \pi - 2\alpha$, základnou délky $2h$ a šířkou w . Hranol má index lomu n a hustotu ρ .



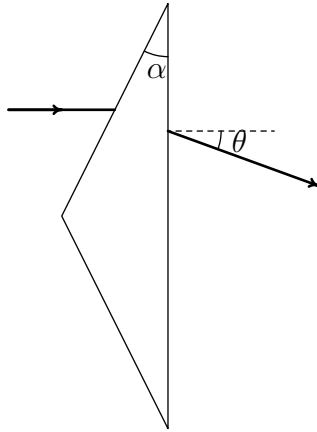
Předpokládejme, že tento hranol je umístěn do cesty laserovému paprsku pohybujícímu se vodorovně ve směru osy x . (V celé úloze předpokládáme, že hranol nerotuje, tj. jeho vrchol vždy leží naproti směru laserového paprsku, jeho trojúhelníkové stěny jsou rovnoběžné s xy rovinou a jeho základna je rovnoběžná s yz rovinou, jak vidíme na obr.) Vezměme index lomu okolního vzduchu n_{air} roven 1. Předpokládejme, že stěny hranolu jsou pokryté antireflexním nátěrem, takže se nevyskytne žádný odraz.

Laserový paprsek má intenzitu, že je stále stejný napříč svou šířkou ve směru osy z , ale lineárně klesá se vzdáleností y od osy x , takže má maximální hodnotu I_0 v bodě $y = 0$ a klesá k nule v bodě $y = \pm 4h$ (obr.). (Intenzita je výkon na jednotku plochy, např. ji lze vyjádřit v jednotkách W m^{-2} .)

- 1) Napište rovnice, z nichž lze určit úhel θ (viz obr. 3) pomocí α a n v případě, kdy světlo laseru zasáhne horní stěnu hranolu.

- 2) Vyjádřete pomocí I_0 , θ , h , w a y_0 , x a y složku výsledné síly působící na hranol kvůli světlu laseru, když vrchol hranolu je přemístěn o vzdálenost y_0 od osy x , kde $|y_0| \leq 3h$.

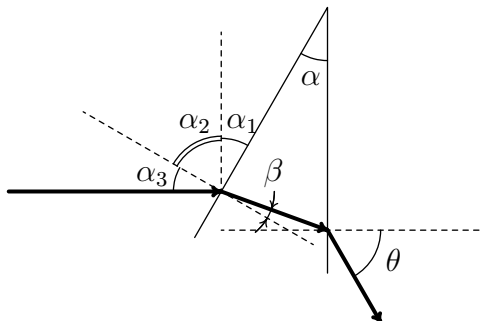
Nakreslete grafy hodnot horizontální a vertikální složky síly jako funkce vertikálního posunutí y_0 .



- 3) Předpokládejte, že laserový paprsek je 1 mm široký ve směru z -osy a $80 \mu\text{m}$ tlustý (ve směru osy y). Hranol má parametry: $\alpha = 30^\circ$; $h = 10 \mu\text{m}$; $n = 1,5$; $w = 1 \text{ mm}$ a $\rho = 2,5 \text{ g cm}^{-3}$. Jak mnoho wattů výkonu laseru je nutno k vyrovnání hranolu proti tíži gravitace (ve směru osy y), pokud vrchol hranolu je ve vzdálenosti $y_0 = -h/2$ ($= -5 \mu\text{m}$) pod osou laserového paprsku?
- 4) Předpokládejte, že experiment je prováděn při absenci gravitace s tím samým hranolem a laserovým paprskem se stejnými rozměry jako v (3), ale s $I_0 = 10^8 \text{ W m}^{-2}$. Jaká by byla perioda kmitů, které se objeví, když je hranol přemístěn a uvolněn ve vzdálenosti $y = h/20$ od středové přímky laserového paprsku?

Řešení:

- 1) Toto je jednoduchý problém na geometrii a Snellův zákon lomu.



Úhel dopadu $a_3 = \alpha$, neboť $a_1 = \alpha$ a $a_1 + a_2 = a_2 + a_3 = 90^\circ$. Úhel β lze najít pomocí Snellova zákona lomu $\sin \alpha = n \sin \beta$. Úhel dopadu na základnu je

$$\frac{\pi}{2} - \left(\pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \right) = \alpha - \beta,$$

odkud vyplývá, že

$$\sin \theta = n \sin(\alpha - \beta),$$

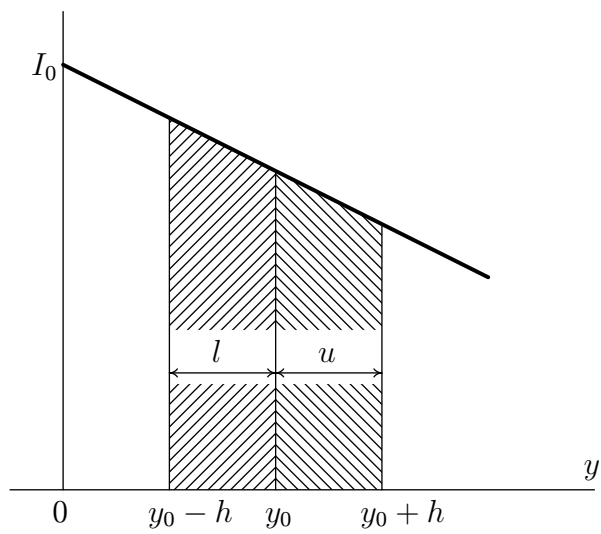
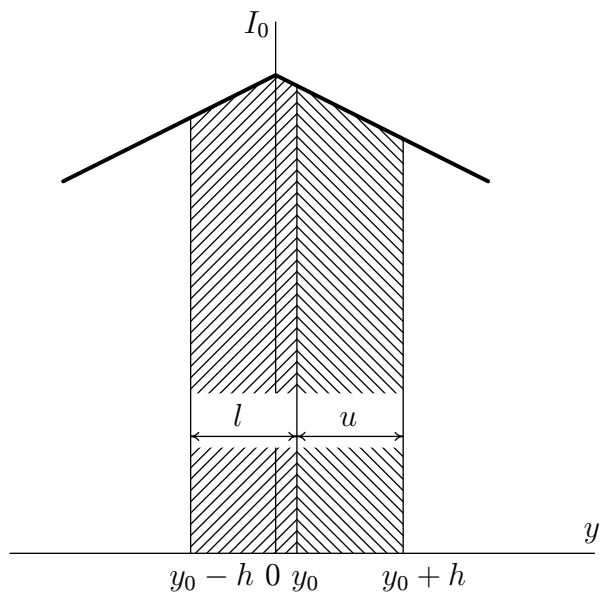
což dává

$$\theta = \arcsin \left[n \sin \left(\alpha - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{n} \right) \right) \right].$$

- 2) Síla působící na hranol je rovna a opačná k hodnotě změny hybnosti laserového paprsku jím procházejícím. Za účelem analýzy problému uvažujeme změnu hybnosti paprsku dopadajícího na horní polovinu hranolu.

Uvažujme o laserovém paprsku jako o doručovateli r_u fotonů za sekundu na horní polovinu hranolu rovnoběžně s x osou. Pokud je energie fotonu E , pak jeho hybnost je $\vec{p}_i = \frac{E}{c} \mathbf{i}$. Foton opouští hranol pod úhlem θ vzhledem k x ose, což značí změnu hybnosti dopadajícího fotonu o

$$\delta \vec{p} = \frac{E}{c} (\cos \theta - 1) \mathbf{i} - \frac{E}{c} \sin \theta \mathbf{j}.$$

Obr. 2: I_u a I_l pro $y_0 > h$ Obr. 3: I_u a I_l pro $0 < y_0 < h$

Celková změna hybnosti takových fotonů je pak

$$\vec{F}_u = r_u \delta \vec{p} = \frac{r_u E}{c} [(\cos \theta - 1) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}].$$

Velikost $r_u E$ je výkon P_u dopadající na horní stěnu, a zpětná síla $\vec{F}_u$ způsobená lomem světla na horní polovině hranolu je

$$\vec{F}_u = \frac{P_u}{c} [(1 - \cos \theta) \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}].$$

Podobný vyorec dává síla působící na dolní polovinu hranolu:

$$\vec{F}_l = \frac{P_l}{c} [(1 - \cos \theta) \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}].$$

Z těchto dvou výsledků vidíme, že výsledná síla působící na hranol je

$$\vec{F} = \frac{1}{c} [(P_u + P_l)(1 - \cos \theta)] \mathbf{i} + \frac{1}{c} [(P_u - P_l) \sin \theta] \mathbf{j}.$$

Úhel θ může být vyjádřen pomocí α (viz část 1)).

K nalezení hodnoty P_u a P_l vypočteme průměrné intenzity, $\bar{I}_u$ a $\bar{I}_l$, dopadající na každou polovinu hranolu a násobíme hw , plochou každé poloviny hranolu promítnuté kolmo k laserovému paprsku. Protože rozložení intenzity $I(y)$ je lineární funkcí y , průměrnou hodnotu intenzit snadno určíme.

Ze zadání úlohy plyne, že

$$I(y) = I_0 \left(1 - \frac{y}{4h}\right), \quad \text{pro } 0 < y < +4h,$$

$$I(y) = I_0 \left(1 + \frac{y}{4h}\right), \quad \text{pro } -4h < y < 0.$$

Nyní předpokládejme, že hranol je nadzvednut o vzdálenost y_0 od osy x ($y_0 > 0$). Nastávají dva rozdílné případy.

- (a) Když $h \leq y_0 \leq 3h$, celý hranol je úplně v horní polovině paprsku. Jak ukazuje obr. 2, pro tento případ je průměr roven intenzitě ve středu každé stěny, který leží na $y_0 + h/2$ pro horní stěnu a $y_0 - h/2$ pro dolní stěnu. To dává

$$\bar{I}_u = I_0 \left(1 - \frac{y_0 + h/2}{4h}\right) = I_0 \left(\frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h}\right),$$

$$\bar{I}_l = I_0 \left(1 - \frac{y_0 - h/2}{4h} \right) = I_0 \left(\frac{9}{8} - \frac{y_0}{4h} \right).$$

Odtud vyplývá, že

$$F_x = \frac{2hwI_0}{c} \left(1 - \frac{y_0}{4h} \right) (1 - \cos \theta),$$

$$F_y = -\frac{hwI_0}{4c} \sin \theta).$$

- (b) Když $0 < y_0 < h$, dolní polovina hranolu je částečně v dolní polovině laserového paprsku, jak ukazuje obr. 3. Pak část dolní poloviny hranolu mezi 0 a y_0 má část y_0/h plochy dolní poloviny hranolu a dopadá na ni průměrná intenzita

$$\bar{I}_{l_1} = I(y_0/2) = I_0 \left(1 - \frac{y_0}{8h} \right).$$

Část mezi 0 a $y_0 - h$ obsahuje zlomek $1 - y_0/h$ plochy dolní poloviny hranolu a dopadá na ni průměrná intenzita

$$\bar{I}_{l_2} = I \frac{h - y_0}{2} = I_0 \left(\frac{7}{8} + \frac{y_0}{8h} \right).$$

Dohromady dostaneme

$$P_l = hw \frac{y_0}{h} \bar{I}_{l_1} + hw \left(1 - \frac{y_0}{h} \right) \bar{I}_{l_2} = hw I_0 \left(\frac{7}{8} + \frac{y_0}{4h} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right).$$

Průměrná intenzita záření dopadajícího na horní stěnu má tu samou funkční závislost jako v prvním případě, tudíž

$$P_u = hw I_0 \left(\frac{7}{8} - \frac{y_0}{4h} \right).$$

Pokud spojíme tyto výsledky dohromady, dostaneme

$$P_u + P_t = hw I_0 \left(\frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right),$$

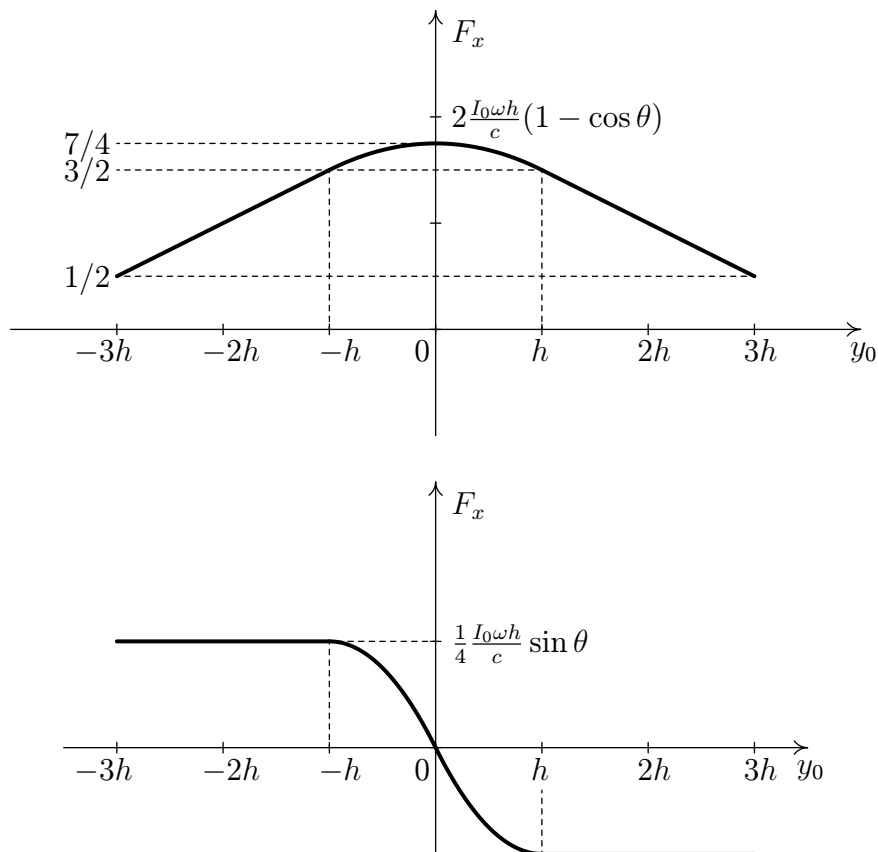
$$P_u - P_t = -hw I_0 \frac{y_0}{2h} \left(1 - \frac{y_0}{2h} \right)$$

a odtud vyplývá

$$F_x = \frac{hwI_0}{c} \left(\frac{7}{4} - \frac{y_0^2}{4h^2} \right) (1 - \cos \theta),$$

$$F_y = -\frac{hwI_0}{c} \frac{y_0}{2h} \left(1 - \frac{y_0}{2h} \right) \sin \theta).$$

Protože rozložení intenzity je symetrické vzhledem k ose laserového paprsku, řešení pro $y_0 < 0$ je zrcadlové k řešením pro $y_0 > 0$. Grafy závislostí F_x a F_y jako funkcí y_0 jsou znázorněny na obr. 4.



- 3) Jak rovnice, tak graf F_y ukazuje, že aby byla $F_y > 0$ a působila proti gravitaci, y_0 musí být menší než 0. Pak k nalezení síly nutné k udržení hranolu proti gravitaci musíme vypočítat hmotnost hranolu a sestavit rovnost vertikální složky síly pocházející od laserového paprsku s tíhou

hranolu a dále najít I_0 pomocí zadaných parametrů. Výsledku užijeme k nalezení celkového výkonu laserového paprsku. To lze provést nalezením průměrné hodnoty $\bar{I}$ na určitém průřezu laserového paprsku.

K nalezení hmotnosti hranolu nejprve vypočteme jeho objem. Ten je roven

$$V = h^2 w \operatorname{tg} \alpha$$

a pak vychází $m = \rho V = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$ a $mg = 1,42 \cdot 10^{-9} \text{ N}$.

Řešení části 2) předpokládalo posunutí ve směru $y > 0$, ale protože je problém symetrický, můžeme toto řešení užít. Chceme najít takovou hodnotu I_0 , pro kterou je splněno

$$\frac{I_0 h w}{c} \frac{y_0}{2h} \left(1 - \frac{y_0}{2h}\right) \sin \theta = mg.$$

Vyjádříme-li I_0 a dosadíme-li číselné hodnoty $\theta = 15,9^\circ$, $y_0 = h/2$, $h = 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}$, $w = 10^{-3} \text{ m}$, pak vychází

$$I_0 = 8,30 \cdot 10^8 \text{ W/m}^2,$$

a protože výkon P je dán jako $P = \bar{I} \cdot \text{plocha laserového paprsku}$, kde $\bar{I} = \frac{I_0}{2}$, dostáváme

$$P = 33,2 \text{ W}.$$

- 4) Posunutí o $h/20$ odpovídá poměru $y_0/h = 0,05 \ll 1$, takže velikost svislé složky síly lze dobře aproximovat výrazem

$$F_y = -\frac{I_0 w \sin \theta}{2c} y.$$

To je rovnice harmonického oscilátoru s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{I_0 w \sin \theta}{2mc}} = \sqrt{\frac{I_0 \sin \theta}{2c \rho h^2 \operatorname{tg} \alpha}}.$$

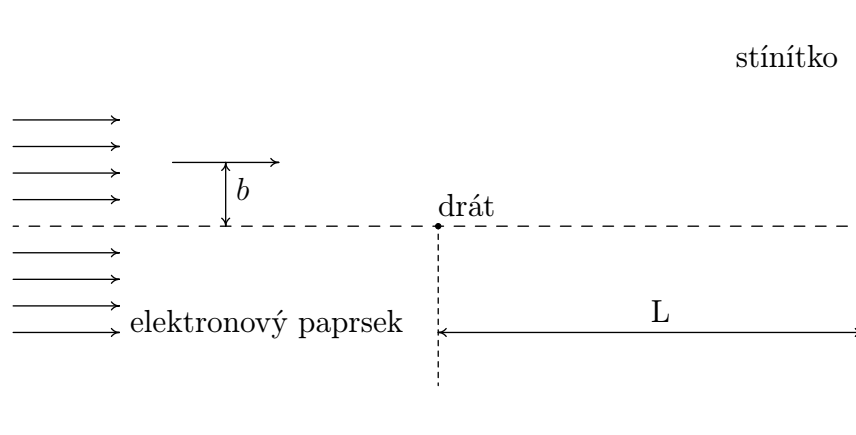
Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 11,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}.$$

3. úloha

Elektronový paprsek

Urychlující napětí V_0 produkuje stálý paprsek energetických elektronů. Elektrony procházejí tenkým, dlouhým, kladně nabitým měděným drátem napjatým v pravém úhlu k původnímu směru paprsku, jak je naznačeno na provázku. Symbol b udává vzdálenost, ve které elektron míjí drát, pokud je drát nenabitý. Elektrony pak pokračují na stínítku ve vzdálenosti $L \gg b$ za drátem. Paprsek nejprve protáhneme do vzdáleností $\pm b_{max}$ vzhledem k ose drátu. Jak šířka paprsku, tak délka drátu mohou být považovány za nekonečné ve směru kolmém k papíru.



Drát s proudem míří kolmo k papíru.

Zde jsou poskytnuta některá numerická data; jiné numerické údaje lze najít v tabulce na počátku zadání úloh:

poloměr drátu = $r_0 = 10^{-6}$ m

maximální hodnota $b = b_{max} = 10^{-4}$ m

elektrický náboj na jednotku délky drátu = $q_{linear} = 4,4 \cdot 10^{-11}$ C m $^{-1}$

urychlující napětí = $V_0 = 2 \cdot 10^4$ V,

vzdálenost drátu od stínítka = $L = 0,3$ m.

Poznámka: Pro části 2-4 proveďte rozumné aproximace vedoucí k analytickým i numerickým řešením.

- 1) Vypočtete intenzitu elektrického pole $\mathbf{E}$ vytvářenou drátem. Nakreslete velikost E jako funkci vzdálenosti od osy drátu.

- 2) Užijte klasickou fyziku pro výpočet úhlové odchylky paprsku. Učiňte tak pro hodnoty parametru b takové, že elektron nenarazí do drátu. Nechť θ_{final} značí (malý) úhel mezi směrem počáteční rychlosti elektronu a směrem rychlosti elektronu, když dosáhne stínítka. Vypočtěte θ_{final} .
- 3) Vypočtěte a načrtněte obrazec dopadu (tj. rozložení intenzity) na stínítku užitím tvrzení klasické fyziky.
- 4) Tvrzení kvantové fyziky dávají hlavní rozdíl v rozložení intenzity (vzhledem k predikátům klasické fyziky). Načrtněte obrazec získaný pomocí kvantové fyziky a stanovte kvantitativní podrobnosti.

Řešení:

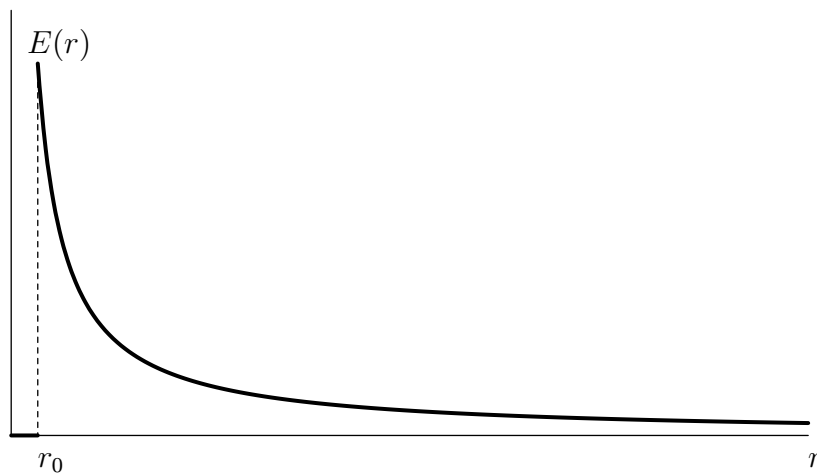
- 1) Ze symetrie, intenzita elektrického pole míří radiálně od drátu, a její velikost závisí jenom na vzdálenosti r (ve válcovitých souřadnicích). Uvažujte imaginární válec kolem drátu. Užitím Gaussova zákona

$$2\pi r E(r) = \frac{q_{linear}}{\epsilon_0}$$

pro válec poloměru r a jednotkové délky, pod podmínkou $r \geq r_0$. Tudíž (při této podmínce):

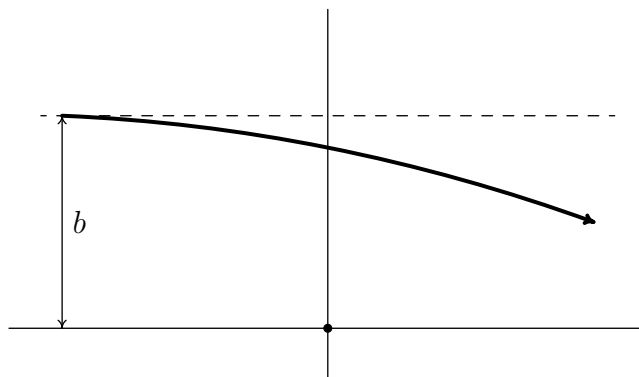
$$E(r) = \frac{q_{linear}}{2\pi r \epsilon_0} = \frac{0,791}{r} \text{ N/C}.$$

Je-li $r < r_0$, je intenzita elektrického pole nulová (protože měď je dobrý vodič), tj. elektrické pole uvnitř drátu je nulové.



- 2) V zadání se praví, že úhlová odchylka je malá. Odhad vychýlení θ_{final} pomocí podílu: hybnost získaná kolmo k počáteční rychlosti dělená počáteční hybností:

$$\theta_{final} = \frac{|\Delta p_{\perp}|}{mv_0}.$$



První odhad kolmé hybnosti může být proveden následovně:

Příčná síla má velikost $\frac{eq_{linear}}{2\pi\epsilon_0 b}$.

Příčná síla působí po dobu, než elektron uletí vzdálenost $2b$, a tudíž působí po dobu $2b/v_0$.

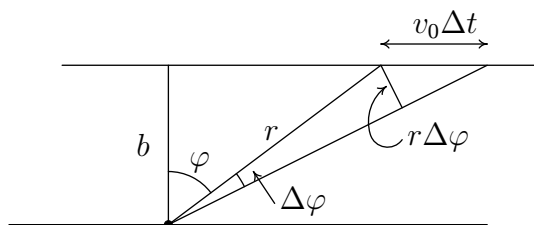
Výsledkem působení této síly po daný čas je změna hybnosti, pro kterou platí:

$$|\Delta p_{\perp}| = \frac{eq_{linear}2b}{2\pi\epsilon_0 bv_0} = \frac{eq_{linear}}{\pi\epsilon_0 v_0},$$

a odtud vyplývá

$$\theta_{final} = \frac{eq_{linear}}{\pi\epsilon_0 mv_0^2} = \frac{q_{linear}}{\pi\epsilon_0 2V_0},$$

numericky $\theta_{final} \doteq 3,96 \cdot 10^{-5}$ rad. (Užili jsme zákon zachování energie, který dává $\frac{1}{2}mv_0^2 = eV_0$.) Poznamenejme, že odchylka je velmi malá, a že je nezávislá na parametru b . Protože síla mezi kladně nabitým drátem a elektronem je přitažlivá, odchylka skloní trajektorii směrem k drátu, ačkoliv jen velmi mírně.



Přesnější odhad může být učiněn provedením elementární integrace pro $|\Delta p_\perp|$. Pro účely integrace, aproximujeme okamžitou trajektorii elektronu úsečkou, která prochází kolem drátu ve vzdálenosti b , jak ukazuje náčrtek.

$$|F_\perp| = \frac{eq_{linear}}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \varphi,$$

dále platí

$$v_0 \Delta t \cos \varphi = r \Delta \varphi,$$

a tedy

$$\Delta t = \frac{r \Delta \varphi}{v_0 \cos \varphi}.$$

Odtud vyplývá

$$|F_\perp| \Delta t = \frac{eq_{linear}}{2\pi\epsilon_0 r} \cos \varphi \cdot \frac{r \Delta \varphi}{v_0 \cos \varphi} = \frac{eq_{linear}}{2\pi\epsilon_0 v_0} \Delta \varphi.$$

Integrací v mezích $-\pi/2$ až $+\pi/2$ dostaneme

$$|\Delta p_\perp| = \frac{eq_{linear}}{2\epsilon_0 v_0}.$$

Lepší odhad se liší od prvního odhadu faktorem $\pi/2$. Lepší odhad dává

$$\theta_{final} = \frac{eq_{linear}}{2\epsilon_0 m v_0^2} = \frac{q_{linear}}{2\epsilon_0 2V_0} = 6,21 \cdot 10^{-5} \text{ rad.}$$

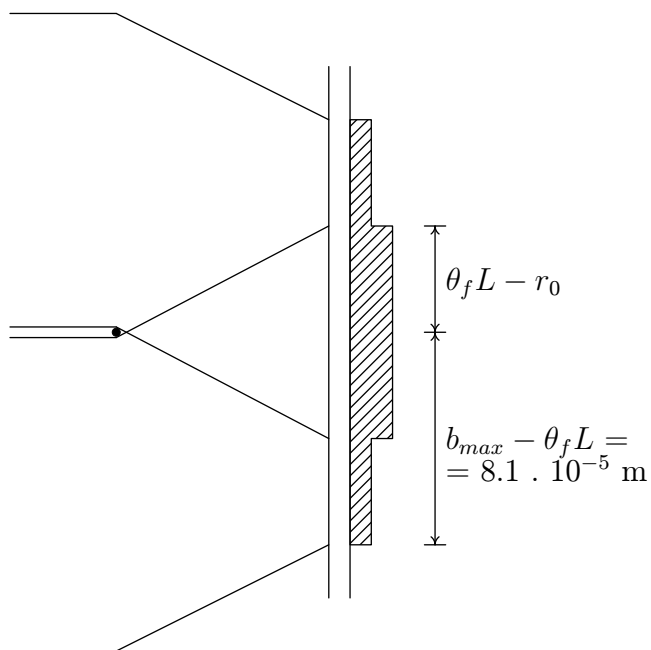
- 3) Největší ohyb trajektorie nastane ve vzdálenosti b od drátu. Vzhledem k L je nicméně b velmi malé. Proto můžeme aproximovat trajektorii dvěma přímkami se smyčkou v blízkosti drátu. Z toho důvodu je na stínítku příčné posunutí každé trajektorie

$$(\text{příčné posunutí}) = \theta_{final} L \approx 19r_0 \gg r_0.$$

Z toho důvodu části paprsku, které míjejí drát na opačné straně, mají oblast, kde se překrývají, jak je znázorněno na náčrtku. Celková šířka oblasti překryvu je

$$(\text{šířka překryvu}) = 2 \cdot (\theta_{final} L - r_0) \approx 36r_0 = 36 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

Hustota dopadů je konstantní uvnitř každé oblasti a dvojnásobná v oblasti překryvu.



- 4) Elektronový paprsek se chová jako vlna o de Brogliově vlnové délce

$$\lambda = \frac{h}{mv_0} = \frac{h}{\sqrt{2meV_0}} = 8,68 \cdot 10^{-12} \text{ m.}$$

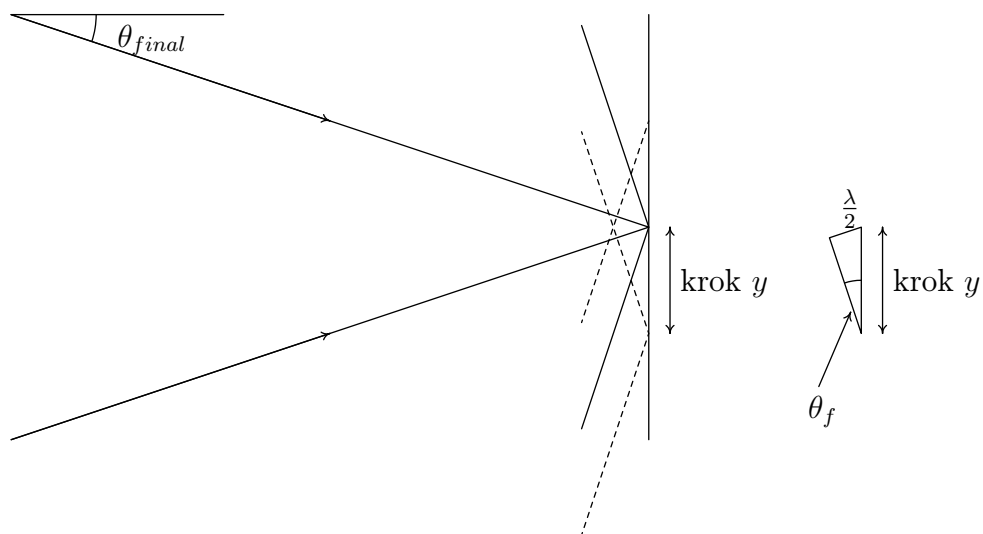
De Brogliova vlnová délka je mnohem menší než šířka paprsku $2b_{max}$, takže můžeme zanedbat efekty „difrakce na šterbině“. Spíše, napravo od drátu, se dvě rovinné vlny, pohybující se pod pevným úhlem vůči sobě (pod úhlem $2\theta_{final}$) překrývají a interferují. V oblasti, kde se, podle klasické fyziky, překrývají dvě polovičky původního paprsku, budou interferenční maxima a minima.

Podle náčrtku usoudíme, že

$$\left(\begin{array}{c} \text{Interval mezi} \\ \text{přilehlými} \\ \text{předpokládanými} \\ \text{místy interference} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{krok} \\ \text{v } y \end{array} \right) = \frac{\lambda/2}{\sin \theta_{final}} \approx \frac{\lambda/2}{\theta_{final}}.$$

Číselně vychází $7,00 \cdot 10^{-8} \text{ m.}$

Protože oblast překryvu má celkovou šířku kolem $36 \cdot 10^{-6}$ m, bude zde zhruba 500 interferenčních maxim. Poznamenejme, že interval mezi přílehlými maximy nezávisí na parametru b nebo b_{max} , narozdíl od situace při běžné dvouštěrbinové interferenci.



Hodnotící schéma 1. úlohy

1. část 1 bod (0,5 bodu za σ_0 , 0,5 bodu za Q)
2. část 1 bod
3. část 2 body
 - 0,5 bodu za vzorec $j = nev$
 - 0,5 bodu za vzorec $j = d\sigma/dt$
 - 0,5 bodu za vztah $\sigma(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$
 - 0,5 bodu za numerickou hodnotu
(max. 1 bod za použití $t = \sigma_0/2j_0$)
4. část 1,5 bodu
 - 0,5 bodu za každou rovnici
 - 0,5 bodu za graf
5. část 3,5 bodu
 - 1 bod za správný graf (a)
 - 1 bod za správný graf (b)
 - 1,5 bodu za správný vzorec V_a/V_b
6. část 1 bod
 - 0,5 bodu za podmínku $T \ll CR$
 - 0,5 bodu za závěrečnou odpověď

Hodnotící schéma 2. úlohy

1. část 1,5 bodu
2. část 2 body za výraz pro sílu
 - 1 bod za nalezení explicitního výrazu F_x, F_y pro $h \leq y_0 \leq 3h$
 - 1 bod za nalezení explicitního výrazu F_x, F_y pro $0 \leq y_0 \leq h$
 - 1 bod za nakreslení příslušných grafů
3. část 1,5 bodu
4. část 2 body

Hodnotící schéma 3. úlohy

1. část Korektní odvození funkce $E(r)$ vně drátu: 1 bod
 Odvození funkce $E(r)$ uvnitř drátu v hodnocení ignorujte, není ji třeba uvažovat.
2. část nezávislost θ_{final} na b : 1 bod
 $\theta_{final} \sim \frac{eq_{linear}}{\epsilon_0 m v_0^2}$ nebo $\frac{q_{linear}}{\epsilon_0 V_0}$ nebo ekvivalentní vztah: 1 bod
 numerický koeficient zkorigovaný s přesností čtyřnásobku: +2 body
 numerický koeficient zkorigovaný s přesností 20%: další 1 bod
3. část existence oblasti s vyšší intenzitou: 0,5 bodu
 konstantní hustoty dopadu v každé oblasti: +0,25 bodu
 správný poměr intenzit: +0,25 bodu
 správná šířka vzoru, dávající odhad pro θ_{final} : +0,25 bodu
 správná šířka oblasti s vyšší intenzitou dopadu, dávající odhad pro θ_{final} : +0,25 bodu
4. část popis interference „dvou vln“: 0,5 bodu
 správná de Broglieova vlnová délka: 0,5 bodu
 správná separace maxim: +1,5 bodu
 (špatná separace maxim s chybou do dvojnásobku: +1 bod)