

Úlohy 23. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - Espoo, Helsinky, Finsko

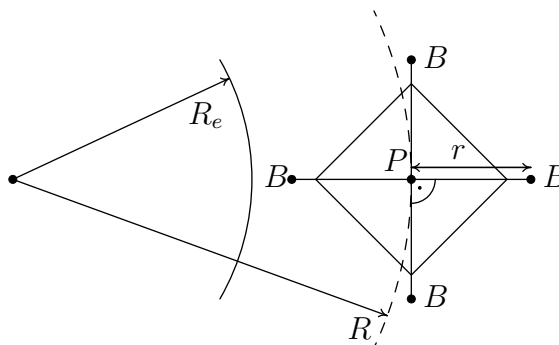
Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

Rotující satelit

Obrázek ukazuje satelit, který obíhá Zemi po přibližně kruhové dráze v rovině rovníku. Satelit se skládá z nehmotného středového tělesa P a čtyř malých vnějších tělísek B . Čtyři tělíska B mají každé hmotnost m : jsou upevněné k P prostřednictvím dlouhých tenkých drátů délky r , které se neroztahují. Všechny těchto pět těles, P a čtyři tělesa B , jsou koplanární s rovinou rovníku a mohou v této rovině rotovat. Čtyři radiální dráty jsou spojeny dalšími tenkými dráty, které udržují úhly mezi dráty konstantní na 90° .



Spojovací dráty jsou zahrnuty do systému za účelem předejití kmitání jednotlivých těles B , které by jinak mohlo analýzu pohybů extrémně komplikovat. Všechna tělesa B rotují kolem P stejnou úhlovou rychlostí, která je vzhledem k stálícím ω . Tudíž se satelit chová jako tuhé těleso.

Rozeberte obecně následující otázky, uvažujte všechny možné situace, zahrňte oba smysly otáčení těles B . Také určete numerické hodnoty pro určité veličiny v otázkách (1) a (2) – požadované veličiny a nutné numerické údaje naleznete na konci zadání úlohy.

- 1) Kresba ukazuje satelit v pozici, kde pro různé dráty je vektor $\mathbf{r}$ paralelní, antiparalelní nebo kolmý k $\mathbf{R}$. (Vektor $\mathbf{r}$ vychází z tělesa P do tělesa B a má délku r ; vektor $\mathbf{R}$ vychází z hmotného středu Země do tělesa P .)

Určete sílu, kterou působí radiální dráty na jedno z těles B v každé z těchto čtyř pozic. Tyto pozice odpovídají přibližně maximálním a minimálním silám.

- 2) Uvnitř čtyř těles B jsou čtyři identické stroje, poháněné sluneční energií, spojené s radiálními dráty. Každý stroj vtahuje drát dovnitř, směrem k B , po krátký čas kdykoliv je síla v drátu blízko svého maxima (určeného v minulé otázce) a "vypustí" stejnou délku drátu znovu ven, když je napětí minimální. Délka drátu, který je vtažen a popuštěn je 1% střední délky radiálního drátu. Střední délka se s časem nemění.

Jaká je výsledný výkon jednoho stroje, zprůměrovaný na jednu otáčku satelitu?

Výsledný výkon je definovaný jako $\frac{W_1 - W_2}{T}$, kde W_1 je práce, kterou stroj vynaloží na navinutí drátu, W_2 je práce, kterou drát vykoná, když se odvíjí, a T je perioda rotace.

- 3) Diskutujte změny v pohybu satelitu, které jsou způsobeny činností strojů. Hlavně rozeberte změny, které se mohou vyskytnout v každé ze situací vyjmenovaných níže:

Může satelit dosáhnout vyšší oběžné dráhy důsledkem práce vykonané stroji?

Může satelit dosáhnout libovolně vysoké orbity, v praxi se tedy vymanit z gravitačního vlivu Země? Proč?

Data:

Numerické odpovědi jsou požadovány v následujících situacích:

Poloměr oběžné dráhy centrálního tělesa je dán jako $R = R_E + 500$ km.

Střední délka radiálních drátů je $r = 100$ km, tudíž průměr satelitového systému je 200 km.

Tělesa B mají hmotnosti $m = 1000$ kg.

Při výchozím stavu čtyři tělesa B rotují, vzhledem k hvězdám, kolem centrálního tělesa P s frekvencí 10 otáček za hodinu.

Hmotnosti drátů jsou zanedbatelné, centrální těleso P má nulovou hmotnost.

Rady:

Uvažujte oba smysly otáčení ω .

Přesná řešení nejsou vyžadována. Výsledky s 5% přesností jsou plně akceptovatelné.

Zanedbejte gravitační efekty Měsíce a Slunce.

Užitečná data:

Hmotnost Země	$M_E = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Gravitační konstanta	$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Poloměr Země na rovníku	$R_E = 6378 \text{ km}$
$M_E G$ je dáno jako K	$K = 3,983 \cdot 10^{14} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$

Veličina	klesá, když ...	roste, když ...	nemění se, když	nikdy se nemění
oběžná rychlost satelitu				Ano / Ne
poloměr R orbity satelitu				Ano / Ne
úhlová rychlost ω satelitu				Ano / Ne
gravitační potenciální energie satelitu				Ano / Ne

Řešení:

Poznámka: Vektory značíme $\vec{r}$, $\vec{R}$. Bez vektorového symbolu r a R značí délky těchto vektorů.

Jednotkové vektory určitého směru jsou určeny směrem vektoru v závorce: $\vec{e}(\vec{R})$ je vektor jednotkové délky, směřující ze středu Země k bodu P . Vektor mířící z bodu B do středu Země je $-\vec{e}(\vec{R} + \vec{r})$ a $\vec{a} = -\vec{e}(\vec{R})K/R^2 = K\vec{R}/R^3$ představuje vektor gravitačního zrychlení v $\vec{R}$.

Jiné případy jsou značeny následovně: v prvním oddílu, slovo *paralelní* znamená, že $\vec{R}$ a $\vec{r}$ jsou rovnoběžné (a stejně orientované), tj. že vnější těleso B je nejvýše na své orbitě. Stejně *antiparalelní* znamená, že pozice B je nejbližší Zemi. V dalších oddílech jsou různé smysly otáčení satelitu udány jako paralelní a antiparalelní: pokud jsou vektory úhlových rychlostí $\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$ (úhlová rychlost P vzhledem ke středu Země) paralelní, znamená to, že satelit rotuje ve smyslu svého obíhání Země.

Určení tahové síly

Určení tahové síly vyžaduje učinění jistých přibližných předpokladů:

1. Střed satelitu je na Keplerově oběžné dráze, tj.

$$\Omega^2 R = K/R^2.$$

Zadání úlohy napovídá, že počáteční orbitu lze považovat za kruhovou. Fyzikálně může být orbita také eliptická.

2. ω a Ω jsou konstanty.

3. $r \ll R$, takže vyšší mocniny r/R mohou být zanedbány.

4. Jak ukazuje obr. 1, úplný konec každého radiálního drátu satelitu se může volně navíjet a odvíjet podle výsledného zrychlení tělesa B . Síla působící na těleso B není obecně orientovaná směrem do středu P satelitu. Předpokládáme, že tyto volné konce jsou tak krátké, že jejich navíjení významně neovlivní pohyb těles B satelitu, tj. $\vec{\omega}$ a $\vec{r}$ jsou stále platné pro popis pohybu B kolem P .

5. Boční pozice byla v zadání definována jako pozice, ve které $\vec{r}$ a $\vec{R}$ jsou kolmé. Vzdálenost mezi tímto bodem a středem Země je

$$\sqrt{r^2 + R^2} = R\sqrt{1 + (r^2/R^2)} \approx 1,00011R \approx R + 0,008r.$$

Tudíž poměrně dobře platí pro boční pozici, že jde o bod, jehož vzdálenost od středu Země je rovna R . Můžeme dostatečně dobře odhadnout sílu pro

tento aproximovaný postranní bod, chyba v aproximaci bude určitě menší než 5%.

Žádný z předpokladů 1, 2, 3 a 5 neplatí, je-li r (poloměr satelitu) tisíce kilometrů velký a je-li satelit blízko Země. Pro numerické hodnoty zadané v úloze je $r/R \doteq 0,0145$, takže aproximace jsou lepší než očekávaná přesnost řešení. Rigorózní důkaz těchto aproximací by mohl být náročnější než řešení samotného problému. Nepožaduje se od soutěžících a není zde uveden.

Vektory $\vec{r}$ a $\vec{R}$ a úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$ jsou definovány vzhledem k inerciální (nerotující) vztažné soustavě.

Polohový vektor pro jedno těleso B je $\vec{R} + \vec{r}$. Z toho dostaneme pro rychlost a zrychlení B

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (1)$$

$$\vec{a} = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r}. \quad (2)$$

S menším formalismem: pohyb tělesa B je superpozice (nebo součet) dvou kruhových pohybů, jeden kolem Země a druhý kolem středu satelitu. Tudíž také zrychlení B je součet dvou zrychlení: jednoho mířícího do středu Země a velikosti $\Omega^2 R$, a druhého mířícího do středu satelitu a velikosti $\omega^2 r$.

Gravitační síla působící na těleso B závisí na vzdálenosti B od středu Země, tj. na délce součtu vektorů $\vec{R} + \vec{r}$:

$$F_{gravity} = m \frac{K}{|\vec{R} + \vec{r}|^2} \quad (3)$$

a je orientována směrem do středu Země, tj. ve směru opačném k vektoru $\vec{R} + \vec{r}$. Ve vektorovém zápise ji lze psát jako

$$\vec{F}_{gravity} = -m \frac{K \vec{e}(\vec{R} + \vec{r})}{|\vec{R} + \vec{r}|^2}, \quad (4)$$

$$\vec{F}_{gravity} = -m \frac{K(\vec{R} + \vec{r})}{|\vec{R} + \vec{r}|^3}. \quad (5)$$

Docela často je druhá forma zápisu jednodušší při výpočtech.

Celková síla působící na B odpovídá zrychlení:

$$\vec{F} = \vec{F}_{wire} + \vec{F}_{gravity}, \quad (6)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(-\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r}). \quad (7)$$

To dává pro tahovou sílu:

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + \frac{K(\vec{R} + \vec{r})}{|\vec{R} + \vec{r}|^3}. \quad (8)$$

Toto je přesný výsledek, číselnou hodnotu lze vypočíst z tohoto výrazu. V této části je dán jeden příklad pro numerické výsledky. Nicméně pro lepší porozumění bude lépe, najdeme-li takovou aproximaci, v níž budou členy, nemající významný vliv na řešení, zanedbány. Určíme pozici B pomocí vzdálenosti B od centra Země jako $|\vec{R} + \vec{r}| = R + \rho$, kde $-r \leq \rho \leq r$. Vyjádříme jmenovatel v mocnině ρ/R :

$$(R + \rho)^{-3} = R^{-3}(1 - 3\rho/R + O(r/R)^2). \quad (9)$$

Fyzikálně tato aproximace znamená, že změna gravitačního zrychlení se předpokládá přímo úměrná ρ , změně poloměru. Nahrazením jmenovatele touto aproximací ve vzorci pro $\vec{F}_{wire}$ dostaneme tahovou sílu v libovolné úhlové pozici satelitu jako

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + \frac{(\vec{R} + \vec{r})(1 - 3\rho/R + O(r/R)^2)}{R} \frac{K}{R^2} \quad (10)$$

$$= -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + \Omega^2 R \left(\frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{r}}{R} - 3\rho \frac{\vec{R}}{R^2} + \vec{R}O(r/R)^2 \right) \quad (11)$$

$$\approx -\omega^2 \vec{r} + \Omega^2 \vec{r} - 3\Omega^2 \rho \frac{\vec{R}}{R}. \quad (12)$$

Analýzou příspěvku posledního členu na horní pozici ($\vec{r}$ a $\vec{R}$ paralelní), dolní pozici ($\vec{r}$ a $\vec{R}$ antiparalelní) a pozice po stranách (místo přesného vyjádření užijeme aproximovaného vyjádření, které odpovídá hodnotě $\rho = 0$) dostaneme:

Pro horní pozici ($\rho = +r$):

$$\vec{R} = \vec{r} \frac{R}{r},$$

což dává

$$\rho \vec{R} = r \vec{R} = r \vec{r} \frac{R}{r} = \vec{r} R.$$

Poslední člen je tedy roven $-3\Omega^2 \vec{r}$.

Pro dolní pozici ($\rho = -r$):

$$\vec{R} = -\vec{r}\frac{R}{r},$$

což dává

$$\rho\vec{R} = -r\vec{R} = -r(-\vec{r}\frac{R}{r}) = \vec{r}R.$$

Znovu je poslední člen tedy roven $-3\Omega^2\vec{r}$.

Pro postranní pozici ($\rho = 0$): poslední člen je roven nule.

Nahrazením posledního členu dostáváme sílu pro tři různé případy:

$$\vec{F}_{min} = -(\omega^2 - \Omega^2)\vec{r}m \quad \text{když} \quad \rho = 0 \quad (13)$$

$$\vec{F}_{min} = -(\omega^2 + 2\Omega^2)\vec{r}m \quad \text{když} \quad \rho = \pm r \quad (14)$$

$$\Delta F = F_{max} - F_{min} = 3\Omega^2rm. \quad (15)$$

Ve všech třech těchto případech je síla paralelní nebo antiparalelní vzhledem ke směru vektoru $\vec{r}$. Výraz $(\omega^2 + 2\Omega^2)$ je vždy kladný, proto $\vec{F}_{max}$ je vždy orientována směrem vektoru $-\vec{r}$, tj. drát je navíjen tělesem B v horní a dolní pozici. Nicméně, výraz $(\omega^2 - \Omega^2)$ je záporný, když $\omega < \Omega$. To by znamenalo, že vektor $\vec{F}_{min}$ je orientován paralelně k $\vec{r}$, tj. drát je vytlačován od tělesa B . To je ovšem nemožné, nicméně by to mohlo způsobit zhroucení satelitu, neboť struktura skládající se z tenkých drátů drží pohromadě jen díky tahovým silám. Proto musíme požadovat v následující analýze $\omega > \Omega$. Výraz daný pro ΔF je založen na tomto předpokladu.

Práce vykonaná stroji

Maximální síla působící na vybrané těleso B je přítomná v horní a dolní poloze tělesa B , tedy dvakrát během jedné otočky satelitu vzhledem k vertikální ose. Obdobně minimální síla se vyskytne dvakrát během jedné otáčky, v pozici na levé a pravé straně. Vertikální směr rotuje s úhlovou rychlostí Ω orbitálním pohybem (obíhá kolem Země). Rotuje-li satelit ve směru obíhání Země ($\vec{\omega}$ a $\vec{\Omega}$ jsou paralelní), pak satelit musí otočit o trochu více než o jednu úplnou otáčku, aby udělal jednu otáčku vzhledem k vertikální ose. Pak úhlová rychlost satelitu vzhledem k vertikální ose je $\omega - \Omega$. V opačném případě (satelit rotuje v opačném smyslu vzhledem ke směru obíhání) úhlová rychlost vzhledem k vertikální ose je $\omega + \Omega$: pro jednu relativní otáčku je zapotřebí méně než jedna absolutní otáčka. Ve vektorovém zápisu jsou oba případy vyjádřeny jako $\vec{\omega} - \vec{\Omega}$.

Stroje vykonají dva pracovní cykly (jeden cyklus znamená natažení drátu a jeho uvolnění) během jedné relativní otáčky. Proto práce za jednu relativní otáčku je

$$\Delta E = 2\Delta r(F_{max} - F_{min}) = 6m\Delta r r\Omega^2 = 0,06mr^2\Omega^2.$$

Perioda jedné relativní otáčky je

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\omega \pm \Omega},$$

kde znaménko plus značí antiparalelní případ. Průměrný výkon je pak dán jako

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{2\Delta r(F_{max} - F_{min})}{2\pi}(\omega \pm \Omega) = \Delta r(F_{max} - F_{min})\frac{\omega \pm \Omega}{\pi}.$$

Numericky:

Platí:

$$K/R^2 = \Omega^2 R.$$

Odtud dostaneme:

$$KR = 25,4 \cdot 10^{20} \text{ m}^4 \text{ s}^{-2},$$

$$\Omega = \sqrt{(KR^{-3})} = 0,001106 \text{ rad/s}.$$

Perioda obíhání Země je 5678 s.

Úhlová rychlost satelitu je $\omega = 2\pi/360 \text{ s} = 0,01745 \text{ rad/s}$. Relativní úhlové rychlosti jsou

$$\omega - \Omega = 0,01634 \text{ rad/s (paralelní případ) a}$$

$$\omega + \Omega = 0,01856 \text{ rad/s (antiparalelní případ)}.$$

Odtud vyplývá

$$F_{min} = (\omega^2 - \Omega^2)rm = 30339 \text{ N}, \quad (16)$$

$$F_{max} = (\omega^2 + 2\Omega^2)rm = 30706 \text{ N}, \quad (17)$$

$$F_{max} - F_{min} = 3rm\Omega^2 = 367 \text{ N}. \quad (18)$$

$$P = \Delta r(F_{max} - F_{min})\frac{\omega \pm \Omega}{\pi}, \quad (19)$$

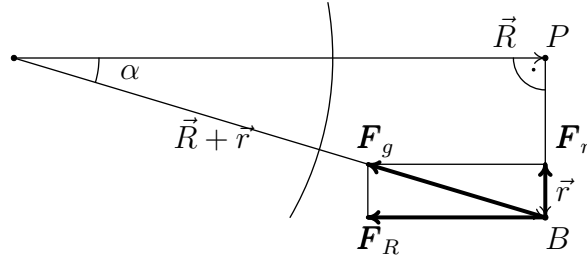
$$P_{antiparallel} = 2168 \text{ W}, \quad (20)$$

$$P_{parallel} = 1909 \text{ W}. \quad (21)$$

Tyto hodnoty by měly být zaokrouhleny na dvě platné číslice vzhledem k provedeným aproximacím:

$$P_{antiparallel} = 2200 \text{ W}, \quad (22)$$

$$P_{parallel} = 1900 \text{ W}. \quad (23)$$



Příklad přesného vyjádření

Jako příklad, vypočítáme zde sílu pro přesnou postranní pozici přímo z výrazu

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + \frac{K(\vec{R} + \vec{r})}{|\vec{R} + \vec{r}|^3}, \quad (24)$$

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + \frac{K\vec{e}(\vec{R} + \vec{r})}{|\vec{R} + \vec{r}|^2}. \quad (25)$$

Vezmeme-li do úvahy Keplerovu rovnici a hodnotu poloměru pro postranní bod, dostaneme

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + \frac{K}{1,00011^2 R^2} \vec{e}(\vec{R} + \vec{r}), \quad (26)$$

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + 0,99979 \Omega^2 R \vec{e}(\vec{R} + \vec{r}). \quad (27)$$

Ted musíme vyjádřit vektor $\vec{e}(\vec{R} + \vec{r})$ pomocí vektorů $\vec{R}$ a $\vec{r}$:

$$\vec{e}(\vec{R} + \vec{r}) = \frac{\vec{R} + \vec{r}}{|\vec{R} + \vec{r}|} = 0,99989 \left(\frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{r}}{R} \right).$$

Tentýž výsledek lze dostat z trojúhelníkové konstrukce (viz orb. 2). Odtud dostáváme

$$\vec{F}_{wire}/m = -\Omega^2 \vec{R} - \omega^2 \vec{r} + 0,99968\Omega^2 R \left(\frac{\vec{R}}{R} + \frac{\vec{r}}{R} \right), \quad (28)$$

$$\vec{F}_{wire}/m = -0,00032\Omega^2 \vec{R} - (\omega^2 - 0,99968\Omega^2)\vec{r}. \quad (29)$$

Kromě numerické přesnosti jde o exaktní výsledek. Snadno nahlédneme, že první člen může být zanedbán, jelikož je malý, a také protože reprezentuje sílu kolmou k radiálnímu drátu. De fakto, mohl by být použit pro odhad směru volně kmitajícího konce radiálního drátu. Druhý člen je prakticky indentický s předchozím výsledkem pro F_{min} .

Změna orbity

V podstatě práce vykonaná stroji na satelitu může změnit orbitu na nekruhový tvar. V této úloze je nicméně dáno, že stroje pracují čtyřikrát během každého rotačního cyklu satelitu, a proto je efekt strojů rozložen víceméně symetricky podél celé orbity. Kvůli kruhové symetrii můžeme bezpečně předpokládat, že orbita zůstane kruhová, dokonce i když stroje právě pracují. Z toho důvodu změna orbity způsobená činností strojů je z jedné kruhové Keplerovské orbity na jinou kruhovou Keplerovskou orbitu. Bylo by možné analyzovat změnu orbity rozebíráním výslednice gravitačních sil působících na všechna čtyři tělesa B . To je ovšem složitá a namáhavá cesta. Úplná analýza situace touto metodou je extrémně složitá. Nicméně by mohla být jedinou možnou metodou pro analýzu, jak nesouvislé použití strojů vede k elip-tické Keplerově orbitě. V našem případě to není nutné. Zákony zachování jsou nanejvýš důležitou metodou pro analýzu mnoha fyzikálních situací, a je-li možné najít dostatečný počet zachovávaných veličin, problém lze transformovat na řešení rovnic zákonů zachování těchto veličin.

Uvažujeme-li rotační pohyb, typické veličiny, které se zachovávají, jsou energie a moment hybnosti. Obtížné je často definovat systém správně tak, aby zahrnul všechny energie, které se dohromady zachovávají, nebo všechny

momenty hybnosti. Jako první uvažujme momenty hybnosti. Jak je vysvětleno jinde, moment hybnosti rotačního pohybu satelitu se nemusí zachovávat. Nicméně celkový moment hybnosti I_{tot} satelitu vzhledem ke středu Země se zachovává, protože jediná vnější síla působící na satelit je gravitační a míří přímo do středu Země. (To nemusí být pravda, pokud je satelit v polární orbitě a uvažujeme nekulový tvar Země.) I_{tot} se skládá ze dvou částí: vnitřního momentu hybnosti vznikajícího kvůli rotaci satelitu, a orbitálního momentu hybnosti kvůli obíhání hmotného středu satelitu kolem Země.

Druhou zachovávanou veličinou je energie. Abychom byli přesnější, celková energie E_{tot} satelitu se zvýší výslednou prací strojů. Následující členy je nutné do E_{tot} zahrnout:

- rotační energii satelitu $\frac{1}{2} \cdot 4m\omega^2 r^2$
- kinetickou energii obíhání satelitu, tj. kinetickou energii pohybu hmotného středu $\frac{1}{2} \cdot 4m\Omega^2 R^2$
- potenciální energii satelitu v gravitačním poli Země, $-4mK/R$. V prvním přiblížení, které použijeme, může být počítáno s celkovou hmotností satelitu soustředěnou do středu P .

Odtud máme pro celkovou energii rovnici

$$E_{tot} = 4m(-K/R + 1/2 \Omega^2 R^2 + 1/2 \omega^2 r^2) = \quad (30)$$

$$= 2m(-\Omega^2 R^2 + \omega^2 r^2). \quad (31)$$

Třetí rovnice pro řešení systému dostaneme z Keplerova zákona, týkajícího se poloměru orbity a oběžné rychlosti satelitu. Odtud máme soustavu tří rovnic

$$\frac{K}{R^2} = \Omega^2 R \quad (\text{Keplerův zákon}) \quad (32)$$

$$I_{tot} = 4m(\omega r^2 \pm \Omega R^2) = konst. \quad (33)$$

$$E_2 - E_1 = E_m, \quad (34)$$

kde E_1 a E_2 jsou celkové energie před a po výsledné vykonané práci strojů E_m . Horní znaménko odpovídá paralelnímu případu: satelit rotující ve smyslu obíhání Země, dolní znaménko pak odpovídá opačnému případu.

Tyto tři nezávislé rovnice postačují k řešení pro tři neznámé Ω , R a ω . Jako takové rovnice neposkytují jasný obrázek o změně. Celkový moment hybnosti záleží na třech proměnných, které se všechny mohou změnit, když se

změní orbita. Řešení rovnic je nejlépe začít vyjádřením orbitálního momentu hybnosti jako funkce R z Keplerovy rovnice:

$$I_{orbit} = 4m\Omega R^2 = 4m\sqrt{\Omega^2 R^4} = 4m\sqrt{KR}.$$

To ukazuje, že orbitální moment hybnosti roste, když roste R . Také to dává pro celkový moment hybnosti rovnici

$$I_{tot} = 4m(\omega r^2 \pm \sqrt{KR}) = konst.$$

Protože r a K jsou konstanty, tato rovnice udává spojitost mezi ω a R .

- *Paralelní případ:* pokud satelit rotuje rychleji, tj. ω vzroste, pak musí R klesnout, neboť celkový moment hybnosti se zachovává. Pokud ω klesne, pak R musí růst.
- *Antiparalelní případ:* pokud satelit rotuje rychleji, tj. ω vzroste, pak musí R růst, neboť celkový moment hybnosti se zachovává. Pokud ω klesne, pak R musí klesnout též.

Intuitivně lze očekávat, že růst celkové energie satelitu (díky práci vykonané stroji) vede ke zvýšení ω , čímž by byl problém plně zanalyzován. Nicméně je nutné rozebrat rovnice energie, abychom tuto domněnku potvrdili. Energie obíhání (E_{orbit}) jako funkce R je

$$\frac{E_{orbit}}{4m} = -\frac{K}{R} + \frac{1}{2}\Omega^2 R^2 = -\frac{1}{2}\frac{K}{R},$$

a celková energie:

$$\frac{E_{total}}{2m} = -\frac{K}{R} + \omega^2 r^2.$$

Jak bylo řečeno výše, v antiparalelním případě zákon zachování momentu hybnosti požaduje, aby veličiny ω a R buď obě rostly nebo obě klesaly. První alternativa je platná, neboť oba členy výrazu pro celkovou energii rostou, což odpovídá růstu celkové energie.

Paralelní případ vyžaduje podrobnější analýzu. Z diferenciální změny I_{tot} dostaneme:

$$d\omega r^2 + \frac{1}{2} K (KR)^{-1/2} dR = 0.$$

To dosadíme do výrazu pro celkovou energii a dostaneme

$$\frac{dE_{total}}{2m} = d\left(-\frac{K}{R} + \omega^2 r^2\right) \quad (35)$$

$$= \frac{K}{R^2} dR + 2\omega d\omega r^2 \quad (36)$$

$$= \frac{K}{R^2} dR - 2\omega \frac{1}{2} K (KR)^{-1/2} dR \quad (37)$$

$$= K dR \left(\frac{1}{R^2} - \omega (KR)^{-1/2} \right) \quad (38)$$

$$= K dR \left(\frac{1}{R^2} - \frac{\omega}{\Omega R^2} \right) \quad (39)$$

$$= K dR R^{-2} \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right). \quad (40)$$

Protože $\omega > \Omega$, růst kinetické energie odpovídá poklesu R a dále růstu ω . Z toho vyplývá, že ω je v obou případech rostoucí, jak jsme intuitivně předpokládali.

Odpovědi na otázky v tabulce

Poloměr R klesá v paralelním případě a roste v antiparalelním případě.

Změna rychlosti obíhání je opačná ke změně R : roste v paralelním a klesá v antiparalelním případě.

Úhlová rychlost ω roste.

Potenciální energie roste s rostoucím R , tudíž roste v antiparalelním a klesá v paralelním případě.

Jak plyne z předchozích odpovědí, je možné, aby satelit dosáhl vyšší orbity. Stane se tak v antiparalelním případě.

Poslední otázka není tak jasná. Doufalo se, že by tato otázka mohla upozornit na kontrast s obyčejným raketovým pohonem: pro raketu je možné prakticky opustit gravitační pole Země při použití konečného množství energie. Nicméně rotující satelit potřebuje nekonečné množství energie, má-li R růst bez omezení: rovnice pro I_{tot} ukazuje, že ω musí růst bez omezení, úměrně druhé mocnině poloměru orbity. Tahové síly v satelitu by rostly bez omezení, úměrně poloměru R . Z toho důvodu je zde maximální hodnota pro R , odpovídající síle radiálních drátů. Při větší hodnotě R by se dráty přetrhly. Poměrně málo účastníků bylo schopno vyřešit tuto část úlohy.

V několika málo řešeních byla poslední otázka nahlížena z jiné perspektivy. Když vezmeme v úvahu Keplerovu rovnici, práci na jednu otáčku lze

psát jako

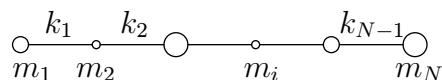
$$\Delta E = 2 \, dr \, (F_{max} - F_{min}) = 6m \, dr \, r \Omega^2 = 6K m \, dr \, r R^{-3},$$

což ukazuje, že střední výkon klesá úměrně $R^{-2,5}$. Proto R roste stále pomaleji a pomaleji, jak čas plyne. Naprosto jasně řečeno, tento samotný fakt nestačí zabránit R v dosažení jakékoliv předem určené hodnoty, pokud je dostatek času.

2. úloha

Podélný pohyb lineární molekuly

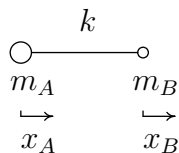
V této úloze budeme analyzovat longituduální pohyb lineární molekuly, tj. pohyb podél osy molekuly. Rotační pohyb a ohýbání molekuly neuvažujeme. Předpokládáme, že molekula se skládá z N atomů o hmotnostech $m_1, m_2, \dots, m_n$. Dále předpokládáme, že každý atom je spojen se sousedem chemickou vazbou. Každá vazba je v modelu nahrazena nehmotnou pružinou, která se řídí Hookovým zákonem; tuhosti pružin jsou $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$. Molekula je nakreslena na obr. 1.



Při řešení užitě následující fakta: podélný vibrační pohyb lineární molekuly se skládá ze superpozice oddělených vibračních pohybů nazývaných normální vibrace nebo normální stavy. V normálním stavu všechny atomy vibrují jednoduchým harmonickým pohybem se stejnou frekvencí a prochází skrz rovnovážné polohy současně.

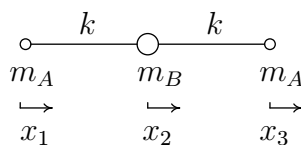
Úkoly:

- 1) Nechť x_i je posunutí i -tého atomu z jeho rovnovážné polohy. Vyjádřete sílu F_i působící na každý atom i jako funkci posunutí $x_1, x_2, \dots, x_n$ a tuhostí pružin $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$. Jaký vztah je mezi $F_1, F_2, \dots, F_n$? Užitím tohoto vztahu odvoďte vztah mezi posunutími $x_1, x_2, \dots, x_n$ a udejte fyzikální interpretaci tohoto vztahu.



- 2) Analyzujte pohyb dvouatomové molekuly AB (obr. 2). Hodnota tuhosti pružiny je k . Odvoďte vztah pro síly působící na atomy A a B.

Určete možné typy pohybu molekuly. Určete příslušnou frekvenci vibrací a interpretujte výsledek. Především, jak je možné, že atomy mohou vibrovat se stejnou frekvencí, i když jejich hmotnosti nejsou stejné?



- 3) Analyzujte pohyb tříatomové molekuly BA_2 (obr. 3). Vyjádřete výslednou sílu na každý atom jako funkci pouze jejich posunutí. Vyvoďte závěry pro možné pohyby molekuly a odpovídající vibrační frekvence.
- 4) Frekvence dvou podélných módů vibrací molekuly CO_2 jsou následující: $3,998 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$ a $7,042 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$. Určete numerickou hodnotu tuhosti pomyslné pružiny (vazby) mezi C — O.

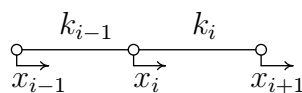
Jak dobře, myslíte, taková aproximace popisuje vazebnou strukturu a vibrační pohyb reálné molekuly?

Atomová hmotnost atomu uhlíku je 12 amu a atomu kyslíku 16 amu. (amu = atomic mass unit = atomová hmotnostní jednotka. Její hodnota je $1,660 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.)

Řešení:

Řešení je dáno v několika v podstatě ekvivalentních verzích. Úloha je zadána takovým způsobem, že není nutná žádná znalost maticové teorie k jejímu vyřešení. Nicméně mnoho z účastníků předvedlo elegantní a vyvážená řešení užitím maticové teorie, proto je zde krátký náčrtek tohoto typu řešení též uveden.

- 1) Síla působící na atom může být odvozena z obr. 1 níže.



Kladné posunutí x_{i-1} ($i - 1$) atomu způsobí zkrácení pružiny k_{i-1} . To způsobí sílu $k_{i-1}x_{i-1}$ (působící vpravo) na atom i . Příslušně posunutí x_i atomu i způsobí sílu $-k_{i-1} - k_i x_i$ působící vlevo na atom i . Konečně posunutí x_{i+1} způsobí sílu $k_i x_{i+1}$ působící doprava na atom i . Síly na atom i sečteme a dostaneme

$$F_i = -k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - k_i(x_i - x_{i+1}). \quad (1)$$

Uvážíme-li, že atom 1 nemá levého souseda a atom N nemá pravého souseda, síly lze psát ve tvaru

$$\begin{aligned} F_1 &= -k_1(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_2 - x_3) \\ &\dots \\ F_i &= -k_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - k_i(x_i - x_{i+1}) \\ &\dots \\ F_N &= -k_{N-1}(x_N - x_{N-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

Sečtením sil dostáváme celkovou sílu působící na molekulu:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_N = 0. \quad (3)$$

Podle druhého Newtonova zákona je tato síla rovna hmotnosti molekuly násobené zrychlením jejího hmotného středu:

$$F = Ma = 0. \quad (4)$$

Každá síla zvlášť je rovna hmotnosti odpovídajícího atomu násobené zrychlením daného atomu:

$$F_i = M_i a_i \quad (5)$$

(3) a (5) dohromady dávají

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_N a_N = 0 \quad (6)$$

Vztah (6) dává

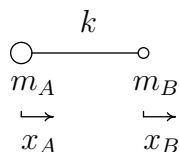
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_N v_N = M v_0 = \text{konst.} \quad (7)$$

kde v_0 značí rychlost hmotného středu molekuly. Pozorujeme-li molekulu ze vztažné soustavy pohybující se s hmotným středem, je tato rychlost nulová. Proto v této soustavě platí následující vztah mezi posunutími jednotlivých atomů:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_n = M x_0 = \text{konst.} \quad (8)$$

Tato konstanta může být položena za rovnou nule, což znamená, že počátek soustavy souřadnic splývá s hmotným středem molekuly a pohyb hmotného středu molekuly není ovlivněn vnitřními silami v molekule.

2) Molekula a vhodné veličiny jsou naznačeny na obr. níže:



Síly působící na atomy lze vyjádřit jako

$$F_A = -k(x_A - x_B) = m_A a_A, \quad F_B = -k(x_B - x_A) = m_B a_B. \quad (9)$$

Znovu platí

$$F_A + F_B = m_A a_A + m_B a_B = 0 \quad (10)$$

V hmotném středu systému pochopitelně platí

$$m_A x_A + m_B x_B = 0 \quad (11)$$

a odtud

$$x_B = -\frac{m_A}{m_B}x_A. \quad (12)$$

Vztahy (9) lze psát jako

$$\begin{aligned} F_A &= -k\left(x_A + \frac{m_A}{m_B}x_A\right) = -k\left(\frac{m_A+m_B}{m_A}\right)x_A, \\ F_B &= -k\left(x_B + \frac{m_B}{m_A}x_B\right) = -k\left(\frac{m_A+m_B}{m_B}\right)x_B. \end{aligned} \quad (13)$$

Podle zadání úlohy síly působící na každý atom jsou přímo úměrné posunutí. To lze vyjádřit jako

$$F_A = -r_A x_A, \quad F_B = -r_B x_B. \quad (14)$$

Konstanty úměrnosti r_A a r_B dostaneme porovnáním (13) a (14):

$$r_A = k\left(\frac{m_A+m_B}{m_B}\right); \quad r_B = k\left(\frac{m_A+m_B}{m_A}\right). \quad (15)$$

Klíčovým bodem řešení je užití faktu daného v zadání, že atomy vibrují s rovnými frekvencemi:

$$\omega_A = \sqrt{\frac{r_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{m_A+m_B}{m_A m_B}} = \omega_B. \quad (16)$$

Jiné řešení, odvoditelné z rovnic (9) a (11), jednoduše odpovídá

$$x_A = x_B = 0, \quad (17)$$

což odpovídá molekule v klidu.

Jiné možné řešení obdržíme předpokladem, že x_A a x_B jsou si navzájem úměrné, jak lze odvodit z řešení části 1) úlohy. Položíme tedy

$$x_B = c x_A \quad (18)$$

a dosazením (18) do (13) dostáváme

$$\begin{aligned} F_A &= -k(x_A - c x_A) = -k(1 - c_B)x_A = -r_A x_A, \\ F_B &= -k\left(\frac{1}{c}x_B - x_B\right) = -k\left(\frac{1}{c_B} - 1\right)x_B = -r_B x_B \end{aligned} \quad (19)$$

Úhlové frekvence vibrací jsou

$$\omega_A = \sqrt{\frac{r_A}{m_A}} = \sqrt{\frac{k(1-c)}{m_A}} = \omega_B = \sqrt{\frac{r_B}{m_B}} = \sqrt{\frac{k(\frac{1}{c}-1)}{m_B}}. \quad (20)$$

Řešením výsledné rovnice druhého stupně pro c dostaneme dříve odvozené výsledky

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{m_A}{m_B}. \quad (21)$$

Řešení $c_1 = 1$ přímo dává $F_A = F_B = 0$ bez jakékoliv další podmínky pro x_A a x_B . Řešení $c_2 = -m_A/m_B$ odpovídá vibračnímu pohybu.

Třetí cestou k řešení je, samozřejmě, užití úplných pohybových rovnic

$$F_A = m_A \ddot{x}_A = -k(x_A - x_B), \quad F_B = m_B \ddot{x}_B = -k(x_B - x_A) \quad (22)$$

a předpoklad řešení ve tvaru harmonických rovnic

$$x_A = x_{A0} e^{i\omega t}, \quad x_B = x_{B0} e^{i\omega t}. \quad (23)$$

Dosazením (23) do (22) vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} (k - m_A \omega^2) x_{A0} - k x_{B0} &= 0 \\ (k - m_B \omega^2) x_{B0} - k x_{A0} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Překvapivě mnoho soutěžících použilo tento způsob řešení, korektně užili faktu, že podmínkou pro netriviální řešení je determinant koeficientů neznámých je roven nule:

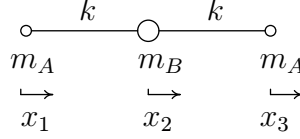
$$\begin{vmatrix} k - m_A \omega^2 & -k \\ -k & k - m_B \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Řešením této rovnice opět nalezneme dřívější výsledky:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k(m_A + m_B)}{m_A m_B}}, \quad (26)$$

s amplitudami x_A a x_B získanými z rovnic uvedených výše.

- 3) Molekula daná ve třetí části úlohy je načrtnuta na následujícím obrázku společně s vhodnými veličinami:



Síly působící na atomy jsou

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(x_1 - x_2) \\ F_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) = -k(-x_1 + 2x_2 - x_3) \\ F_3 &= -k(x_3 - x_2) \end{aligned} \quad (27)$$

Znovu můžeme o posunutích předpokládat, že jsou sobě úměrná, pokud součet členů $m_i x_i$ je konstanta:

$$x_2 = c_2 x_1, \quad x_3 = c_3 x_1, \quad (28)$$

kde c_2 a c_3 jsou konstanty, které je nutno určit. Podle zadání úlohy, účastníci se pokusili provést vyjádření sil působících na každý atom jako funkci posunutí pouze příslušného atomu. Dosazením (28) do (27) pak dává

$$\begin{aligned} F_1 &= -k(1 - c_2)x_1 = -r_1 x_1, \\ F_2 &= -k\left(-\frac{1}{c_2} + 2 - \frac{c_3}{c_2}\right)x_2 = -r_2 x_2, \\ F_3 &= -k\left(1 - \frac{c_2}{c_3}\right)x_3 = -r_3 x_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Konstanty c_2 a c_3 lze nyní určit z podmínky, že atomy vibrují se stejnou úhlovou frekvencí:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{r_1}{m_A}} = \omega_2 = \sqrt{\frac{r_2}{m_B}} = \omega_3 = \sqrt{\frac{r_3}{m_A}}. \quad (30)$$

Umocněním kořenů a užitím (29) dostaneme rovnice

$$\frac{1 - c_2}{m_A} = \frac{-\frac{1}{c_2} + 2 - \frac{c_3}{c_2}}{m_B} = \frac{1 - \frac{c_2}{c_3}}{m_A}. \quad (31)$$

Tyto rovnice si musí navzájem vyhovovat, proto jsou splněny vztahy

$$1 - c_2 = 1 - \frac{c_2}{c_3}, \quad (32)$$

$$\frac{1-c_2}{m_A} = \left(2 - (1+c_3)\frac{1}{c_2}\right) \frac{1}{m_B}. \quad (33)$$

První z těchto rovnic má dvě různá řešení:

$$\begin{aligned} 1) \quad & c_2 = 0 \text{ \& } c_3 \neq 0, \\ 2) \quad & c_3 = 1 \text{ \& } c_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (34)$$

První řešení dosazené do (33) dává výsledek

$$\frac{1}{m_A} = \left(2 - \frac{1+c_3}{c_2}\right) \frac{1}{m_B}. \quad (35)$$

Je-li c_2 přímo položeno nule na pravé straně rovnice, výraz diverguje. Aby toto nenastalo, výraz $1+c_3$ musí zmizet, což dává výsledek

$$c_3 = -1. \quad (36)$$

Odtud máme

$$x_2 = 0, \quad x_3 = -x_1. \quad (37)$$

Z (29) a (37) obdržíme

$$r_1 = k, \quad \omega_1 = \frac{k}{m_A}. \quad (38)$$

Úhlová frekvence ω_3 je rovna ω_1 , protože řešení je bylo obdrženo za této podmínky. Dodatečná komplikace je s frekvencí ω_2 , která vyšla neurčitě, protože atom 2 se nepohybuje v tomto zvláštním vibračním modu. Účastníci nemuseli tento fakt dále analyzovat; obdržení výsledku, že centrální atom se nepohybuje, stačilo.

Druhé řešení (34), tj. $c_3 = 1$ a $c_2 \neq 0$ dává po dosazení do (33)

$$\frac{1-c_2}{m_A} = 2 \left(1 - \frac{1}{c_2}\right) \frac{1}{m_B}. \quad (39)$$

To dává rovnici druhého stupně pro c_2 :

$$c_2^2 + \left(\frac{2m_A}{m_B} - 1\right) c_2 - \frac{2m_A}{m_B} = 0. \quad (40)$$

Kořeny této rovnice jsou:

$$c_{2,1} = 1, \quad c_{2,2} = -\frac{2m_A}{m_B}. \quad (41)$$

První řešení odpovídá rovnosti amplitud (posunutí) pro všechny atomy, znovu předpokládá, že není napnuta žádná vazba a nenastává vibrační pohyb. Druhý kořen dává:

$$F_1 = -k \left(1 + \frac{2m_A}{m_B} \right) = -r_1 x_1 \quad (42)$$

s odpovídající vibrační úhlovou frekvencí

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{r_1}{m_A}} = \sqrt{k \left(\frac{2}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right)}. \quad (43)$$

Stejně jako v části 2) této úlohy, řešení lze snadno obdržet z podmínky nulového determinantu koeficientů z pohybových rovnic. Ty jsou:

$$\begin{aligned} F_1 &= m_A \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2), \\ F_2 &= m_B \ddot{x}_2 = -k(x_1 + 2x_2 - x_3), \\ F_3 &= m_A \ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2). \end{aligned} \quad (44)$$

Předpokladem komplexního řešení

$$x_i = x_{i0} e^{i\omega t} \quad (45)$$

dostaneme soustavu lineárních rovnic krácením exponenciálů:

$$\begin{aligned} (k - m_A \omega^2) x_{10} - k x_{20} &= 0, \\ -k x_{10} + (2k - m_B \omega^2) x_{20} - k x_{30} &= 0, \\ -k x_{20} (k - m_A \omega^2) x_{30} &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Podmínka pro existenci netriviálních řešení je znovu

$$\begin{vmatrix} k - m_A \omega^2 & -k & 0 \\ -k & (2k - m_B \omega^2) & -k \\ 0 & -k & (k - m_A \omega^2) \end{vmatrix} = 0. \quad (47)$$

Kořeny determinantu jsou:

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_A}}; \quad \omega_3 = \sqrt{k \left(\frac{2}{m_B} + \frac{1}{m_A} \right)}, \quad (48)$$

což odpovídá předchozím výsledkům. Amplitudy se triviálně určí dosazením kořenů do původní soustavy rovnic. Tato metoda řešení je

samozřejmě mnohem rychlejší než metoda navržená v zadání, ale nepředpokládalo se, že by účastníci zvládli pokročilejší techniky řešení. Na druhou stranu, ti, kdož tak učinili, byly odměněni za správné řešení, ačkoliv urazili kratší cestu při zdůvodňování fyzikálního významu, než při navrženém řešení úlohy.

- 4) Pokud přijmeme model za vyhovující, poznamenejme, že $\omega_3 > \omega_2$, takže vyšší vibrační frekvence, tj. $7,042 \cdot 10^{13}$ Hz, odpovídá ω_3 a nižší frekvence, $3,998 \cdot 10^{13}$ Hz, odpovídá ω_2 . Vztah mezi úhlovou frekvencí a frekvencí je

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (49)$$

Tudíž je splněno

$$\omega_2 = 2\pi\nu_2, \quad \omega_3 = 2\pi\nu_3. \quad (50)$$

Odhady pro k vycházejí:

$$k_2 = m_A \omega_2^2 = 1670 \text{ N/m}. \quad (51)$$

$$k_3 = \left(\frac{m_A m_B}{2m_A + m_B} \right) \omega_3^2 = 1420 \text{ N/m}. \quad (52)$$

Výsledek je rozumný. Účastníci nemuseli vyjadřovat další spekulace jako odůvodnění pro rozporů. Tato část úlohy byla míněna spíše jako ilustrace stupně přesnosti základního jednoduchého modelu druhu zde uvedeného.

3. úloha

Satellite in Sunshine

V této úloze propočítáme teplotu vesmírného satelitu. Satelit předpokládáme kulový o průměru 1 m. Všechno ze satelitu zůstává na stejné teplotě. Všechno z kulového povrchu satelitu je pokryto tím samým druhem pokrývacího materiálu. Satelit je umístěn blízko Země, ale ne v zemském stínu.

Povrchová teplota Slunce (tj. teplota černého tělesa) je $T_{sun} = 6000$ K a jeho poloměr je $6,96 \cdot 10^8$ m. Vzdálenost Slunce – Země je $1,5 \cdot 10^{11}$ m. Sluneční světlo zahřívá satelit na teplotu, při které je emise záření ze satelitu rovna energii absorbované ze slunečního světla. Výkon na jednotku plochy vyzařovaný černým tělesem je dán Stefan-Boltzmannovým zákonem $P = \sigma T^4$, kde σ je univerzální konstanta $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. V prvním přiblížení můžeme předpokládat, že jak Slunce, tak satelit absorbují veškerou elektromagnetickou radiaci na ně dopadající.

- 1) Nalezněte výraz pro teplotu T satelitu. Jaká je numerická hodnota této teploty?
- 2) Spektrum vyzařování černého tělesa $u(T, f)$ teploty T se řídí Planckovým vyzařovacím zákonem

$$u(T, f)df = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1},$$

kde $\eta = hf/kT$ a $u(T, f)df$ je hustota energie elektromagnetického záření ve frekvenčním intervalu $[f, f+df]$. V rovnici je $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ (Planckova konstanta), $k = 1,4 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ (Boltzmannova konstanta) a $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ (rychlost světla).

Spektrum záření černého tělesa, integrované přes všechny frekvence f a směry záření, dává celkový zářivý výkon na jednotku plochy $P = \sigma T^4$, jak je vyjádřeno ve Stefan-Boltzmannově zákoně uvedenému dříve.

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}$$

V mnoha aplikacích je nutné udržet satelit tak chladný, jak je jen možné. K ochlazení satelitu používají inženýři reflexní obložení, které odráží světlo určité frekvence, ale nechrání před tepelnou radiací nízkých frekvencí z vesmíru. Předpokládejme tedy, že ostrá hraniční frekvence odpovídá $hf/k = 1200$ K.

Jaká je nová rovnovážná teplota satelitu? Přesná odpověď není nutná. Tudíž, neprovádějte žádné zdlouhavé a obtížné integrace; tam, kde je to nutné, proveďte aproximace. Integrál přes celý rozsah η je

$$\int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

a maximum funkce $\eta^3/(e^\eta - 1)$ nastává pro $\eta = 2,82$. Pro malé η můžete rozvést exponenciální funkci podle $e^\eta = 1 + \eta$.

- 3) Nyní mějme reálný satelit, s výsuvnými solárními panely, které generují elektřinu, která se rozptýlí na teplo v elektronice uvnitř satelitu, která tak působí jako extra zdroj tepla. Předpokládejte, že výkon vnitřního tepelného zdroje je 1 kW, jaká je tedy rovnovážná teplota satelitu podle případu 2) výše?
- 4) Výrobce navrhuje speciální nátěr provedený tímto způsobem:
 „Tento nátěr odrazí více než 90% veškerého přichozího záření (viditelného světla i infračerveného), ale vyzařuje na všech frekvencích (viditelného i infračerveného světla) jako černé těleso, tudíž odvádí množství tepla ze satelitu. Tento nátěr pomůže udržet satelit tak chladný, jak je jen možné.“
 Může takový nátěr existovat? Proč ano nebo proč ne?
- 5) Jaké vlastnosti by mělo mít obložení za účelem zvýšení teploty kulového tělesa podobného tomu, jaké jsme uvažovali v případě výpočtu teploty satelitu v bodě 1)?

Řešení:

- 1) Bráno přes celý povrch Slunce je emitovaná energie $4\pi R_{Sun}^2 \cdot \sigma T_{Sun}^4$. Veškerá tato energie prochází přes kulovou plochu ve vzdálenosti R od Slunce, kde je nyní intenzita $4\pi R_{Sun}^2 \cdot \sigma T_{Sun}^4 / 4\pi R^2$.

Satelit je kruhový objekt absorbující

$$\pi r_{sat}^2 \cdot \frac{4\pi R_{Sun}^2 \cdot \sigma T_{Sun}^4}{4\pi R^2},$$

ale kulový objekt emitující $4\pi r_{sat}^2 \cdot \sigma T_{sat}^4$.

Z rovnosti emise a absorpce dostaneme:

$$T_{sat} = T_{sun} \sqrt{\frac{R_{Sun}}{2R}},$$

což dává 289 K, tj. asi 16°C.

- 2) Musíme spočítat, jaká část absorbovaného výkonu spadá pod část spektra pod 1200 K.

$$\eta_{cutoff} = \frac{1200}{6000} = 0,2 \ll 1.$$

Tento zlomek výkonu je

$$\delta = \int_0^{\eta_{cutoff}} \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} / \int_0^\infty \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1}$$

$$\delta \approx \int_0^{\eta_{cutoff}} \eta^2 d\eta / \frac{\pi^4}{15} = \frac{\eta_{cutoff}^3}{3} / \frac{\pi^4}{15} = 4,1 \cdot 10^{-4}.$$

Nyní je satelit chladný vzhledem k 1200 K, takže můžeme zanedbat, že malá část emise satelitu (jako černého tělesa) bude zadržena. Rovnovážný stav energie je nyní

$$4\pi r_{sat}^2 \cdot \sigma T_{sat}^4 = \delta \cdot \pi r_{sat}^2 \cdot \frac{4\pi R_{Sun}^2 \cdot \sigma T_{Sun}^4}{4\pi R^2}$$

a podle této rovnice je nyní teplota satelitu korigována faktorem $\delta^{1/4}$, což dává asi 41 K.

3) Celková absorbovaný výkon je

$$\delta \cdot \pi r_{sat}^2 \cdot \frac{4\pi R_{Sun}^2 \cdot \sigma T_{Sun}^4}{4\pi R^2},$$

tj. asi 0,5 W, což je malá (zanedbatelná) hodnota v porovnání s $P_{internal} = 1$ kW. Z energetické rovnováhy plyne

$$P_{internal} = 4\pi r_{sat}^2 \cdot \sigma T_{sat}^4$$

a odtud dostaneme $T_{sat} = 274$ K ($\eta = 4,38$).

Poznámka: Přísně vzato to není přesný výsledek, protože pro vyzařování podle dokonale černého tělesa leží asi 33% vyzařeného výkonu nad hranicí 1200 K! To znamená, že satelit musí být teplejší, aby vyžářil celý výkon 1 kW ve frekvencích připadajících pod tuto hranici. Výsledná integrální rovnice je

$$\left(\frac{\eta}{4,38}\right)^4 = \int_0^\pi \frac{\eta^3 d\eta}{e^\eta - 1} : \frac{\pi^4}{15},$$

kterou lze řešit numericky pomocí iterací. Skutečné řešení je $\eta = 3,80$ odpovídající teplotě 316 K.

- 4) Takový nátěr neexistuje, protože odporuje druhému termodynamickému zákonu. Fyzikální učebnice vysvětlují princip detailní rovnováhy, který říká, že aby nastala rovnováha, emise a absorpce v daném frekvenčním intervalu se musí přesně rovnat. To by nemohlo být splněno při faktu, že odraz a absorpce mohou být zcela odlišné. Pokud by existoval tento nátěr, někdo by mohl vytvořit teplotní rozdíl mezi dvěma tělesy v uzavřeném systému a tudíž zkonstruovat perpetum mobile.
- 5) Obložení může být průchodné pro vysoké frekvence (v oblasti vrcholu nebo konce slunečního záření), ale odrazivé a tudíž izolující při nízkých frekvencích (při teplotách satelitu).

Poznámky k 1. úloze

1. Coriolisova síla?

V této úloze je jistá nesnáz, která naštěstí neovlivnila soutěžící. Když byla úloha pečlivě zkoumána, několik lidí navrhlo, že by mohlo být nezbytné zahrnout Coriolisův vzorec do řešení úlohy. Samozřejmě, bylo by možné užít rotující vztažnou soustavu. Lze uvažovat systém rotující rychlostí Ω tak, že jedna z os míří dolů přímo do středu Země. Nebo užít systém rotující se satelitem, s úhlovou rychlostí ω , takže tělesa B satelitu by byla v této vztažné soustavě v pevné pozici. Ale oba případy vytváří nadbytečné komplikace bez jakéhokoli užitečného zjednodušení. Proto je lepší úlohu řešit v inerciálním systému. Pouze několik soutěžících užilo (nebo zkusilo použít) Coriolisův formalismus!

2. Odůvodnění pro proměnné síly

Vektorové znázornění, které jsme užili v řešení nevysvětluje proměny v napětí: mimořádné napětí v horní a dolní pozici je způsobeno změnou gravitační síly jako funkce poloměru: čím výše, tím je tah Země menší a tím větší napětí je nutné pro udržení tělesa na orbitě. A čím níže, tím je gravitační tah silnější a je nutné větší napětí podpírající těleso. Menší napětí na postranních pozicích se vysvětlí pomocí směru gravitačního působení: je zde nenulový úhel mezi směrem tahu ve středu satelitu a v tělese B . Celý jev je dobře známý jako slapový jev. Gravitační síly Slunce a Měsíce vytváří změny v gravitaci na Zemi, což je přesně stejný jev jako proměnné síly napětí v rotujícím satelitu.

3. Ověření konzistence

Výsledný součet čtyř sil působících na čtyři tělesa B je nulový (protější síly jsou stejné velikosti, ale působí opačnými směry). To je správné, je to konzistentní s předpokladem, že centrální struktura (dráty a středový bod) satelitu jsou téměř „nehmotné“.

Když by analýza uvažovala bod 2, výsledná síla by nebyla nulová, což by naznačovalo spor. To znamená, že původní předpoklady (středový bod satelitu na kruhové Keplerovské orbitě, konstantní ω a Ω) je nutné pozměnit. Vedlo by to k oscilacím středového bodu kolem kruhové orbity s frekvencí $2(\omega \pm \Omega)/\pi$.

4. Obtížnost úlohy

Z počátku bylo očekáváno, že půjde o obtížnou úlohu. Nicméně se úloha ukázala být ještě těžší, než jsme očekávali. Pouze 10% účastníků bylo schopno

provést analýzu změny orbity. Jeden detail řešení oklamal jak účastníky, tak týmové vedoucí, opravující tým i autora úlohy: všichni jsme počítali střední výkon na základě absolutní úhlové rychlosti ω satelitu. Až během psaní této závěrečné zprávy jsme si všimli, že k výpočtu výkonu musí být užito relativní úhlové rychlosti $\omega \pm \Omega$. Přirozený význam „středního výkonu“ jako periodického procesu je práce vykonaná během jedné periody dělená délkou této periody. V jedné periodě jsou čtyři pozice pro každé těleso B , tudíž délka periody musí být čas jedné relativní otáčky satelitu (relativní vzhledem k lokálnímu vertikálnímu směru). Druhá otázka říká dvojznačně: „zprůměrovaný na jednu otáčku satelitu“, ale jediná rozumná interpretace je „zprůměrovaný na jednu otáčku vzhledem k lokálnímu svislému směru“!

5. Obvyklé chyby v řešení

V mnoha řešeních nebyl uvažován pokles napětí v postranních pozicích, předpokládalo se, že napětí v postranních pozicích je $\omega^2 r m$. (Autor úlohy původně tuto chybu učinil také. Pouze dva dny před soutěží se dala tato část úlohy do pořádku.) Ve vektorovém formalismu tento pokles vyplyne automaticky. Lze jej také obdržet pomocí geometrického obrázku, kde je vzat v úvahu rozdíl „vertikál“ z bodů P a B .

V překvapivém počtu řešení byla napětí v horní a dolní pozici špatná kvůli následující chybě: předpokládalo se, že těleso B koná pohyb po kružnici s úhlovou rychlostí ω a poloměrem r a druhý pohyb po kružnici rychlostí Ω a poloměrem $R + r$ (když se nachází v horní pozici). To vede k přílišnému tahu v horní pozici. Ze stejného důvodu by bylo napětí v dolní pozici příliš malé. Taková situace není konzistentní (viz bod 3), ale soutěžící neprovedli prověrku konzistence.

V mnoha řešeních bylo chybně předpokládáno, že moment hybnosti satelitu vzhledem k jeho středu P se zachovává. Kdyby to byla pravda, nemohla by se měnit ω pomocí práce strojů. Gravitační síly působící na B nemíří přímo do středu satelitu, nejsou to *centrální síly*, a proto není důvod předpokládat, že platí zákon zachování momentu hybnosti ani že ω zůstává konstantní.

Zdá se, že několik soutěžících si vzpomnělo na klasický příklad zachování momentu hybnosti: krasobruslaře urychlujícího svou piruetu přitažením paží blíže k tělu. O práci strojů uvažovali podobně. V malém měřítku by ovšem měli pravdu: přitažení jednoho tělesa B blíže k P způsobí zvýšení rychlosti ω . Nicméně později by se to samé těleso B vzdálilo zpět na původní vzdálenost a úhlová rychlost ω by klesla na původní hodnotu. Bez nehomogenního

gravitačního pole by zde nemohla nastat trvalejší změna úhlové rychlosti. Navíc, úloha byla cíleně formulována tak, že jakmile se dvě tělesa přiblíží k bodu P , jiná dvě se oddálí. Tudíž moment setrvačnosti satelitu se nemění a nezpůsobí žádné fluktuace veličiny ω .

V několika řešeních byly numerické hodnoty pro maximální a minimální síly zaokrouhleny na dvě platné cifry před vypočtením rozdílu. Ale chyba v rozdílu dvou téměř rovných sil může být téměř 100% ! Je proto nutné provést výpočty s co největší přesností.