

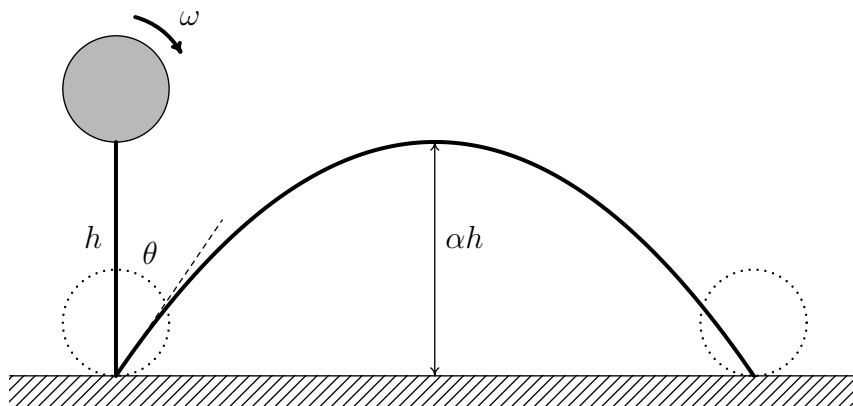
Úlohy 22. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - Havana, Cuba

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

Obrázek 1.1 ukazuje pevný, homogenní míč poloměru R . Před pádem na podlahu je jeho těžiště v klidu, ale míč rotuje úhlovou rychlostí ω_0 kolem vodorovné osy jdoucí jeho středem. Nejnižší bod míče je ve výšce h nad podlahou.



Když je uvolněn, padá balón vlivem gravitace a odrazí se do nové výšky takové, že jeho nejnižší bod je nyní αh nad podlahou. Deformace míče a podlahy při nárazu lze zanedbat. Ignorujte přítomnost vzduchu. Čas srážky, třebaže malý, je konečný.

Hmotnost míče je m , zrychlení účinkem gravitace je g , dynamický koeficient tření mezi míčem a podlahou je μ_b a moment setrvačnosti balónu kolem dané osy je:

$$I = \frac{2mR^2}{5}.$$

Uvažujte dvě situace: při první míč během celého času nárazu prokluzuje, ve druhém případě přestane před koncem srážky prokluzovat.

Situace 1: klouzání během nárazu.

Nalezněte:

- a) $\operatorname{tg} \theta$, kde θ je úhel odrazu naznačený na obrázku;
- b) dráhu, kterou urazil míč ve vodorovném směru mezi prvním a druhým nárazem;
- c) minimální hodnotu ω_0 pro tuto situaci.

Situace 2: klouzání během části nárazu.

Opět najděte:

- a) $\operatorname{tg} \theta$;
- b) dráhu, kterou urazil míč ve vodorovném směru mezi prvním a druhým nárazem;

V úvahu vezměte obě možnosti a načrtněte variantu $\operatorname{tg} \theta$ při mezní úhlové rychlosti ω_0 .

Řešení:

- a) *Výpočet rychlosti v okamžiku těsně před dopadem*

Z rovnosti tíhové potenciální energie a kinetické energie v okamžiku těsně před dopadem vyplývá pro rychlost před dopadem

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}, \quad (1)$$

odkud vyjádříme v_0 :

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (2)$$

- b) *Výpočet vertikální složky rychlosti v okamžiku těsně po dopadu*

Nechť v_{2x} a v_{2y} jsou vodorovná a svislá složka rychlosti hmotného středu míče v okamžiku těsně po dopadu. Výška dosažená ve svislém směru je αh a pak

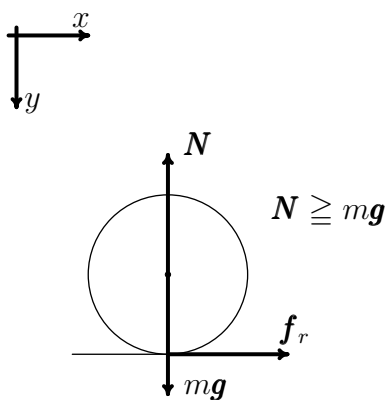
$$v_{2y}^2 = 2g\alpha h \quad (3)$$

odkud pomocí α (nebo pomocí odrazového koeficientu $c = \sqrt{\alpha}$):

$$v_{2y} = \sqrt{2g\alpha h} = cv_0 \quad (4)$$

- c) *Obecné rovnice pro změny hybnosti a momentu hybnosti v čase srážky*

Obrázek 1.2 ukazuje volné těleso míče během dopadu.



Uvažujme, že impuls síly je roven změně hybnosti a impuls momentu síly je roven změně momentu hybnosti. Máme tedy:

$$I_y = \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt = mv_0 + mv_{2y} = m(1+c)\sqrt{2gh}, \quad (5)$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} f_r(t) dt = mv_{2x}, \quad (6)$$

$$I_\theta = \int_{t_1}^{t_2} Rf_r(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} f_r(t) dt = I(\omega_0 - \omega_2), \quad (7)$$

kde I_x , I_y a I_θ jsou impulsy síly a impuls momentu síly působících sil a ω_2 je úhlová rychlost po dopadu. Časy t_1 a t_2 odpovídají počátku a konci dopadu.

Varianty

Těsně po dopadu balón vždy prokluzuje, protože má určitou úhlovou rychlost ω_0 . Nyní máme dvě možnosti:

I. Celý dopad se uskuteční bez tření schopného zpomalit míč natolik, aby zastavil v bodě dotyku a přešel v čistě valivý pohyb (tj. přestal podkluzovat).

II. Pro určitý čas $t \in (t_1, t_2)$ bod dotyku s podložkou dosáhne nulové rychlosti a moment způsobený třením bude nulový (válec přestane podkluzovat). Každý případ budeme posuzovat nezávisle.

Případ I

Při této variantě během celého okamžiku dopadu míček prokluzuje a tření úměrné normálové síle je

$$f_r = \mu_k N(t). \quad (8)$$

Dosazením 8) do vztahů (6) a (7), s použitím (5), dostaneme

$$I_x = \mu_k \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt = \mu_k I_y = \mu_k m(1+c)\sqrt{2gh} = mv_{2x} \quad (9)$$

a

$$I_\theta = R\mu_k \int_{t_1}^{t_2} N(t) dt = R\mu_k m(1+c)\sqrt{2gh} = I(\mu_0 - \mu_2). \quad (10)$$

Tyto vztahy udávají vodorovnou složku rychlosti v_{2x} a výslednou úhlovou rychlost ve tvaru

$$v_{2x} = \mu_k(1+c)\sqrt{2gh}, \quad (11)$$

$$\omega_2 = \omega_0 - \frac{\mu_k m R (1+c)}{I} \sqrt{2gh}. \quad (12)$$

S tímto máme všechny základní veličiny vypočtené pomocí zadaných údajů. Interval platnosti tohoto řešení při uvedené podmínce lze odříznout z rovnic (11) a (12). Toto řešení je platné, když na konci dopadu bude mít bod dotyku rychlost ve směru záporné poloosy x . To znamená, pokud:

$$\begin{aligned} \omega_2 R &> v_{2x} \\ \omega_0 - \frac{\mu_k m R (1+c)}{I} \sqrt{2gh} &> \frac{\mu_k (1+c)}{R} \sqrt{2gh} \\ \omega_0 &> \frac{\mu_k \sqrt{2gh} (1+c)}{R} \left(\frac{m R^2}{I} + 1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Takže, pro úhlové rychlosti pod touto hodnotou není řešení platné.

Případ II

V tomto případě je dosaženo valení od času t mezi počátečním časem t_1 a koncovým časem t_2 dopadu. Pak by měl existovat následující vztah mezi vodorovnou složkou rychlosti v_{2x} a konečnou úhlovou rychlostí:

$$\omega_2 R = v_{2x}. \quad (14)$$

Dosazením (14) do (6) a (7) dostaneme vztah

$$m R v_{2x} = I \left(\omega_0 - \frac{v_{2x}}{R} \right), \quad (15)$$

jehož řešením

$$v_{2x} = \frac{I \omega_0}{m R + \frac{I}{R}} = \frac{I \omega_0 R}{m R^2 + I} = \frac{2}{7} \omega_0 R \quad (16)$$

a

$$\omega_2 = \frac{I \omega_0}{m R^2 + I} = \frac{2}{7} \omega_0. \quad (17)$$

Výpočet tangenty úhlu θ

Případ I

Pro $\text{tg } \theta$ máme z (4) a (11)

$$\begin{aligned}\text{tg } \theta &= \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{\mu_k(1+c)\sqrt{2gh}}{c\sqrt{2gh}} = \mu_k \frac{1+c}{c} \\ \text{tg } \theta &= \mu_k \frac{1+c}{c},\end{aligned}\tag{18}$$

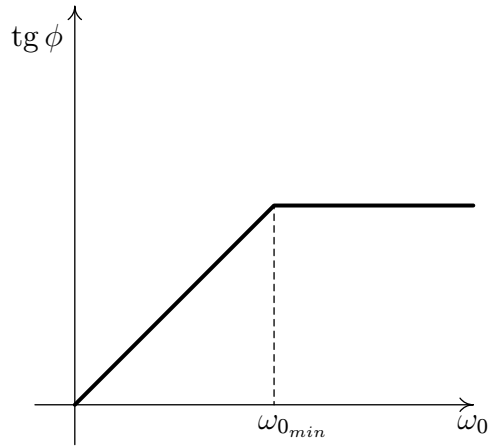
tj. úhel odrazu je nezávislý na ω_0 .

Případ II

Rovnice (4) a (16) určují $\text{tg } \theta$ pomocí

$$\begin{aligned}\text{tg } \theta &= \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{I\omega_0 R}{I + mR^2} \frac{1}{c\sqrt{2gh}} = \frac{I\omega_0 R}{(I + mR^2)c\sqrt{2gh}} \\ \text{tg } \theta &= \frac{2\omega_0 R}{7c\sqrt{2gh}}.\end{aligned}\tag{19}$$

Potom vztahy (18) a (19) udávají řešení naznačené na obr. 1.3.



Vidíme, že θ nezávisí na ω_0 , pokud $\omega_0 > \omega_{0_{min}}$; kde $\omega_{0_{min}}$ je dáno jako

$$\begin{aligned}\omega_{0_{min}} &= \frac{\mu_k \sqrt{2gh}(1+c)}{R} \left(\frac{mR^2}{I} + 1 \right), \\ \omega_{0_{min}} &= \frac{7\mu_k(1+c)\sqrt{2gh}}{2R}.\end{aligned}\tag{20}$$

Výpočet vzdálenosti bodu druhého dopadu

Případ 1

Doba stoupání a klesání míčku je:

$$t_v = 2 \frac{v_{2y}}{g} = \frac{2c\sqrt{2gh}}{g} = 2c\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (21)$$

Vzdálenost, kterou urazí, je

$$d_1 = v_{2x}t_v = \mu_k(1+c)\sqrt{2gh}2c\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$d_1 = 4\mu_k(1+c)ch. \quad (22)$$

Tato vzdálenost je nezávislá na ω_0 .

Případ II

V tomto případě, čas stoupání a klesání míčku je tentýž čas daný v rovnici (21). Proto je vzdálenost možné vypočítat násobením času t_v rychlostí v_{2x} , a tedy:

$$d_2 = v_{2x}t_v = \frac{I\omega_0}{mR^2 + I}2c\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

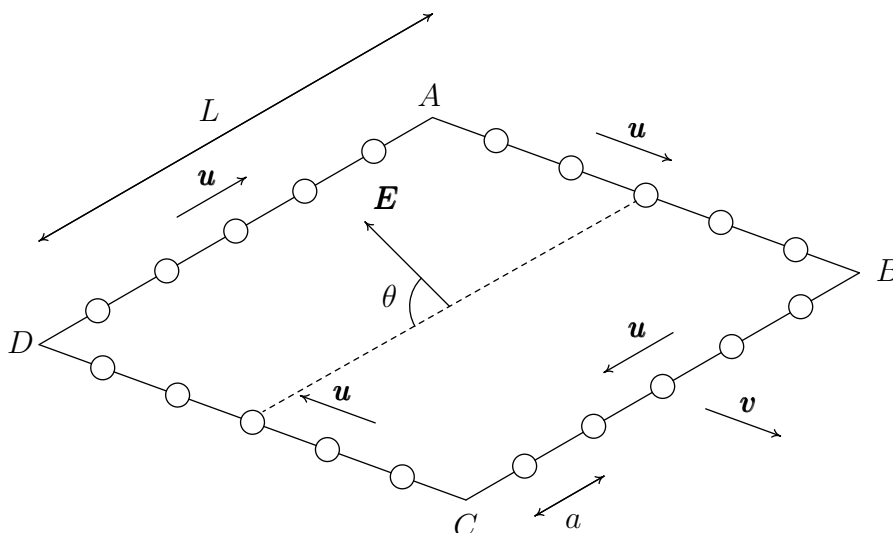
odtud

$$d_2 = \frac{4}{7}c\sqrt{\frac{2h}{g}}R\omega_0.$$

Vzdálenost druhého bodu dopadu v tomto případě lineárně roste s ω_0 .

2. úloha

Ve čtvercové smyčce se stranou délky L se pohybuje velký počet kuliček zanedbatelného poloměru a každá z nich má náboj q . Pohybují se rychlostí u s konstantní mezerou a mezi nimi, jak je vidět ve vztažné soustavě pevně spojené se smyčkou. Kuličky jsou uspořádané na smyčce jako korálky na náhrdelníku, l je mnohem větší než a , jak je naznačeno na obr. 2.1. Nevodivý drát tvořící smyčku má homogenní hustotu náboje na jednotku délky rámečku smyčky. Celkový náboj je číselně rovný a opačný k celkovému náboji míčků v rámečku.



Uvažujte situaci, v níž se smyčka pohybuje rychlostí v rovnoběžně se svou stranou AB (obr. 2.1) skrz homogenní elektrické pole intenzity E , která je kolmá k rychlosti smyčky a svírá úhel θ s rovinou smyčky.

Vezmeme-li do úvahy relativistické efekty, vypočtete následující veličiny ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem, který vidí smyčku pohybovat se rychlostí v :

- a) rozestup mezi kuličkami na každé straně smyčky, a_{AB} , a_{BC} , a_{CD} a a_{DA} .
- b) hodnotu výsledného náboje smyčky a míčků na každé straně smyčky: Q_{AB} , Q_{BC} , Q_{CD} a Q_{DA} .
- c) Velikost M elektricky vytvořeného momentu síly snažícího se otáčet systém smyčky a míčků.
- d) Energii W způsobenou interakcí systému, skládajícího se ze smyčky a kuliček s elektrickým polem.

Veškeré odpovědi lze udat pomocí veličin blíže určených v zadání úlohy.

Poznámka: Elektrický náboj izolovaného objektu je nezávislý na vztažné soustavě, v níž provádíme měření. Jakékoliv efekty elektromagnetického záření lze zanedbat.

Několik poznatků ze speciální teorie relativity

Uvažujte vztažnou soustavu S' pohybující se rychlostí V vzhledem k jiné vztažné soustavě S . Osy vztažných soustav jsou rovnoběžné a jejich počátky v čase $t = 0$ splývají. V je orientována podél kladné poloosy x .

Relativistické skládání rychlostí

Pokud se částice pohybuje rychlostí u' ve směru osy x' , měřeno v soustavě S' , rychlost částice měřená v soustavě S je dána jako

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}.$$

Relativistická kontrakce délek

Je-li objekt v klidu v soustavě S a má-li délku L_0 ve směru osy x , pozorovatel v soustavě S' (pohybující se rychlostí V ve směru kladné poloosy x) naměří délku

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Řešení:

- a) Označme S laboratorní vztažnou soustavu spojenou s pozorovatelem, který vidí smyčku pohybovat se rychlostí v ; S' označme vztažnou soustavu spojenou se smyčkou (osa x' nechť má ten samý směr jako rychlost $\vec{v}$; osa y' má směr strany DA a osa z' je kolmá k rovině smyčky). Osy soustavy S jsou rovnoběžné s osami soustavy S' a počátky obou soustav v čase $t = 0$ splývají.

1. Strana AB

S''_{AB} budiž vztažná soustava, ve které se pohybující se kuličky na straně AB jsou v klidu. Její osy jsou rovnoběžné s osami soustav S a S' . S'' má rychlost u vzhledem k S' .

Podle Lorentzovy kontrakce délek, vzdálenost a mezi sousedními míčky na AB měřená v S'' je:

$$a_r = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (1)$$

(Tento výsledek platí pro vzdálenost mezi dvěma sousedními kuličkami, které jsou na kterékoliv straně, je-li a_r měřeno ve vztažné soustavě, ve které jsou kuličky v klidu).

Kvůli relativistickému skládání rychlostí uvidí pozorovatel v soustavě S kuličky pohybovat se podél AB s rychlostí:

$$u_{AB} = \frac{v + u}{1 + \frac{uv}{c^2}}. \quad (2)$$

Tudíž kvůli Lorentzově kontrakci délek uvidí pozorovatel mezi míčky následující vzdálenost:

$$a_{AB} = a_r \sqrt{1 - \frac{u_{AB}^2}{c^2}}. \quad (3)$$

Dosazením (1) a (2) do (3) dostaneme

$$a_{AB} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{uv}{c^2}} a. \quad (4)$$

2. Strana CD

Pro pozorovatele v soustavě S je rychlost kuličky podél strany CD

$$u_{CD} = \frac{v - u}{1 - \frac{uv}{c^2}} \quad (5)$$

Z kontrakce délek:

$$a_{CD} = \sqrt{1 - \frac{u_{CD}^2}{c^2}} a_r \quad (6)$$

Dosazením (1) a (5) do (6) dostaneme:

$$a_{CD} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv}{c^2}} a \quad (7)$$

3. Strana DA

V soustavě S' , v čase t'_0 nechť je kulička v poloze $x'_1 = y'_1 = z'_1 = 0$. Ve stejný čas je nejbližší sousední kulička v poloze $x'_2 = 0, y'_2 = a, z'_2 = 0$.

Prostorové souřadnice kuliček odpovídající soustavě S jsou dány pomocí Lorentzových transformací:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t' + \frac{x'v'}{c^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Podle těchto rovnic dostáváme pro první kuličku v soustavě S :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} vt'_0; \quad y_1 = 0; \quad z_1 = 0; \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t'_0 \quad (9)$$

a pro druhou kuličku:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} vt'_0; \quad y_2 = a; \quad z_2 = 0; \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} t'_0 \quad (10)$$

Je-li $t_1 = t_2$, vzdálenost mezi dvěma kuličkami v S je dána jako

$$a_{DA} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (11)$$

Odtud:

$$a_{DA} = a. \quad (12)$$

4. Strana BC

Pokud opakujeme stejný postup jako výše, obdržíme

$$a_{BC} = a. \quad (13)$$

- b) Náboj drátu tvořící se na kterékoliv straně, ve vztažné soustavě spojené se smyčkou, lze vypočítat jako (wire = drát):

$$Q_{wire} = -\frac{L}{a}q, \quad (14)$$

protože L/a je počet kuliček na této straně. Kvůli skutečnosti, že náboj je invariantní, stejný náboj naměříme na každé straně drátu v laboratorní vztažné soustavě.

1. Strana AB

Náboj odpovídající míčkům na straně AB je, ve vztažné soustavě spojené s pozorovatelem (či laboratoří):

$$Q_{AB,kulicky} = \frac{L\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{a_{AB}} \cdot q \quad (15)$$

Tento výsledek lze obdržet násobením počtu kuliček na této straně násobením invariantním nábojem balónku. Čitatel prvního zlomku na pravé straně rovnice (15) je kontraktovaná vzdálenost měřená pozorovatelem a jmenovatel je vzdálenost mezi kuličkami na dané straně.

Dosazením rovnice (4) do (15) dostaneme

$$Q_{AB,kulicky} = \left(1 + \frac{uv}{c^2}\right) \frac{Lq}{a}. \quad (16)$$

Sečtením (14) a (16) dostaneme celkový náboj strany:

$$Q_{AB} = \frac{uv}{c^2} \frac{L}{a} q. \quad (17)$$

2. Strana CD

Stejným postupem dostaneme

$$Q_{CD,kulicky} = \frac{L\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{a_{CD}} \cdot q = \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right) \frac{Lq}{a}. \quad (18)$$

Sečtením (14) a (18) dostaneme celkový náboj strany:

$$Q_{CD} = -\frac{uv}{c^2} \frac{L}{a} q. \quad (19)$$

3. Strany BC a DA

Délky těchto stran měřené pozorovatelem v S jsou L a vzdálenosti mezi kuličkami a , tudíž:

$$Q_{BC,kulicky} = Q_{DA,kulicky} = \frac{Lq}{a} \quad (20)$$

Sečtením (14) a (20) dostaneme:

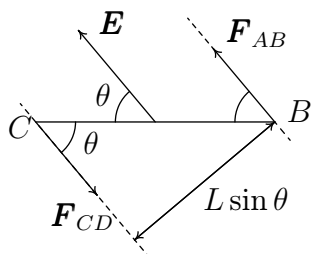
$$\begin{aligned} Q_{BC} &= 0 \\ Q_{DA} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

c) Elektrická síla působící na stranu AB je rovna

$$\vec{F}_{AB} = Q_{AB}\vec{E} = \left(\frac{uv}{c^2}\right) \frac{L}{a} q \vec{E} \quad (22)$$

a obdobně elektrická síla působící na stranu CD je

$$\vec{F}_{CD} = Q_{CD}\vec{E} = -\left(\frac{uv}{c^2}\right) \frac{L}{a} q \vec{E}. \quad (23)$$



F_{CD} a F_{AB} tvoří dvojici sil. Proto ze vzorce pro výsledný moment síly dvojice sil dostáváme (obr. 2.2):

$$M = |\vec{F}_{AB}| L \sin \theta \quad (24)$$

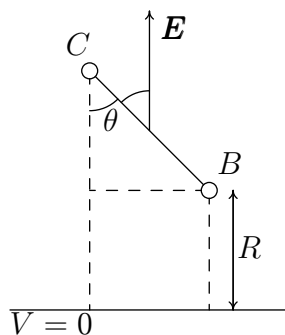
a výsledek je:

$$M = \frac{uv}{c^2} \frac{L^2}{a} |q| |\vec{E}| \sin \theta. \quad (25)$$

- d) Označme V_{AB} a V_{CD} elektrostatické potenciály v bodech stran AB a CD . Pak:

$$W = V_{AB} Q_{AB} + V_{CD} Q_{CD} \quad (26)$$

Nechť pevný nulový potenciál ($V = 0$) je v rovině kolmé k $\vec{E}$ a ve vzdálenosti R od strany AB (obr. 2.3).



Pak:

$$W = -ERQ_{AB} - E(R + L \cos \theta)Q_{CD}. \quad (27)$$

Je ale $Q_{CD} = -Q_{AB}$, takže

$$W = -ELQ_{AB} \cos \theta. \quad (28)$$

Dosazením (17) do rovnice (28) dostaneme

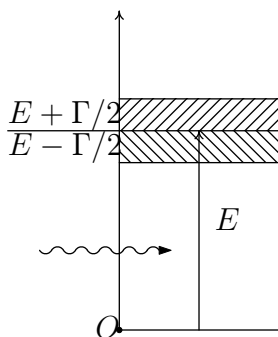
$$W = \frac{uvL^2qE}{c^2a} \cos \theta. \quad (29)$$

3. úloha

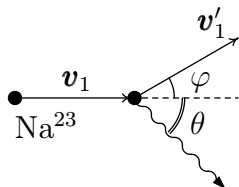
Cooling Atoms by laser

Pro studování vlastností izolovaných atomů s velkým stupněm přesnosti musí být udržovány téměř v klidu po delší čas. Metoda, nedávno za tím účelem vyvinutá, se jmenuje „laser cooling“ a je ilustrována v následující úloze.

Ve vakuové komoře je dobře seřízený paprsek ^{23}Na atomů (přicházejících z vypařování vzorku o zhruba 10^3 K) zepředu osvětlen laserovým paprskem vysoké intenzity. Frekvence laseru je vybrána tak, aby nastala rezonanční absorpce fotonů těmito atomy, jejichž rychlost je v_0 . Když je světlo absorbováno, atomy se excitují na první energetickou hladinu, která má střední hodnotu energie E nad základním stavem a neurčitost Γ (viz obr.).



Kvůli tomuto procesu atomu klesne rychlost o $\Delta v_1 = v_1 - v_0$. Když se atom vrací do svého základního stavu, vyzařuje světlo. Změna rychlosti atomu je $\Delta v' = v'_1 - v_1$ a směr pohybu se změnil o úhel φ (obr. 3.3).



Tato sekvence absorpce a emise se uskuteční mnohokrát, dokud rychlost atomů neklesne o danou velikost Δv takovou, že rezonanční absorpce světla frekvence ν dále nenastává. Je pak nutné měnit frekvenci laseru tak, aby se udržela rezonanční absorpce. Atomy pohybující se novou rychlostí jsou dále zpomalovány, dokud rychlost některých neklesne na nulu.

V prvním přiblížení můžeme zanedbat jiné atomové interakce, než spontánní absorpci a emisi světla popsanou výše. Dále ještě můžeme předpokládat, že laser je tak intenzivní, že atomy nestráví v základním stavu téměř žádný čas.

Úkoly:

- Nalezněte frekvenci laseru nutnou k zabezpečení rezonanční absorpce světla atomy uvnitř oblasti za kolimátorem. Také nalezněte zmenšení rychlosti těchto atomů Δv_1 , po prvním procesu absorpce.
- Světlo frekvence vypočtené v části a) je absorbováno atomy, jejichž rychlosti leží v intervalu Δv_0 . Vypočtěte tento rychlostní interval.
- Když atom vyzáří světlo, směr jeho pohybu se změní o úhel φ vzhledem k počátečnímu směru. Vypočtěte φ .
- Nalezněte maximum možného poklesu rychlosti Δv pro danou frekvenci.
- Jaký je přibližný počet N událostí absorpce-emise nutný ke snížení rychlosti atomu z počáteční rychlosti v_0 (nalezené v úloze výše) až téměř na nulu? Předpokládejte, že atom se pohybuje v přímce.
- Určete čas t , který zabere proces popsaný v části e). Vypočtěte vzdálenost ΔS , kterou atom v tomto čase urazí.

Data:

$$E = 3,36 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

$$\Gamma = 7,0 \cdot 10^{-27} \text{ J}$$

$$c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

kde c je rychlost světla, h Planckova konstanta, k Boltzmannova konstanta a m_p hmotnost protonu.

Řešení:

- a) Rychlost v_0 atomů, jejichž kinetická energie je dána střední kvadratickou rychlostí atomů vycházejících z kolimátoru, lze určit pomocí

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}kT \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (30)$$

Číselně vychází asi $v_0 \doteq 1,04 \cdot 10^3$ m/s, protože

$$m \approx 23m_p. \quad (31)$$

Protože je tato rychlost mnohem menší než c , $v_0 \ll c$, můžeme zanedbat relativistické efekty.

Světlo se skládá z fotonů o energii $h\nu$ a hybnosti $h\nu/c$.

V laboratorní vztažné soustavě se energie a hybnost zachovává, což aplikujeme na proces absorpce a dostaneme:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + h\nu = \frac{1}{2}mv_1^2 + E; \quad mv_0 - \frac{h\nu}{c} = mv_1 \rightarrow \Delta v_1 = v_1 - v_0 = \frac{-h\nu}{mc},$$

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) = h\nu - E \rightarrow \frac{1}{2}m(v_1 + v_0)(v_1 - v_0) = h\nu - E,$$

kde $h\nu \ll mv_0$. Proto $v_1 \approx v_0$ a to znamená, že $mv_0\Delta v_1 = h\nu - E$, pokud předpokládáme $v_1 + v_0 \approx 2v_0$.

Kombinací těchto vztahů:

$$\nu = \frac{\frac{E}{h}}{1 + \frac{v_0}{c}} \quad (32)$$

a

$$\Delta v_1 = -\frac{E}{mc} \frac{1}{1 + \frac{v_0}{c}} \quad (33)$$

Dosazením dostaneme: $\nu \doteq 5,0 \cdot 10^{14}$ Hz, $\Delta v_1 \doteq -3,0 \cdot 10^{-2}$ m/s.

Pokud problém analyzujeme ve vztažné soustavě pohybující se vzhledem k laboratoři rychlostí v_0 , měli bychom dostat:

$$\frac{1}{2}m(v_1 - v_2)^2 + E = h\nu,$$

kde $\nu = \frac{\nu'}{1 + \frac{v_0}{c}}$ je frekvence fotonů v laboratorní vztažné soustavě.

Zanedbáním Δv_1^2 dostaneme tytéž dvě rovnice jako výše.

Aproximace je oprávněná, protože

$$-\frac{|\Delta v_1|}{v_0} \sim 10^{-4}.$$

Pak je $v_1 + v_0 = 2v_0 - \Delta v_1 \approx 2v_0$.

b) Pro pevné ν :

$$v_0 = c \left(\frac{E}{h\nu} - 1 \right), \quad (34)$$

a když má E neurčitost Γ , v_0 má neurčitost:

$$\Delta v_0 = \frac{c\Gamma}{h\nu} = \frac{c\Gamma \left(1 + \frac{v_0}{c} \right)}{E} \approx \frac{c\Gamma}{E}, \quad (35)$$

číselně asi 6,25 m/s. Proto jsou fotony absorbovány atomy rychlostí v intervalu $\left(v_0 - \frac{\Delta v_0}{2}, v_0 + \frac{\Delta v_0}{2} \right)$.

c) Zákony zachování energie a hybnosti dávají:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + E = \frac{1}{2}mv_1'^2 + h\nu',$$

(ν' je frekvence emitovaných fotonů)

$$mv_1 = mv_1' \cos \varphi + \frac{h\nu'}{c} \cos \theta,$$

$$0 = mv_1' \sin \varphi - \frac{h\nu'}{c} \sin \theta.$$

Odchylka φ atomu je největší, je-li $\theta = \frac{\pi}{2}$, tedy:

$$mv_1 = mv_1' \cos \varphi_m; \quad \frac{h\nu'}{c} = mv_1' \sin \varphi_m \rightarrow \operatorname{tg} \varphi_m = \frac{h\nu'}{mv_1 c}.$$

Protože $\nu' \approx \nu$:

$$\operatorname{tg} \varphi_m \approx \frac{E}{mv_1 c}, \quad (36)$$

$$\varphi_m = \arctg \frac{E}{mv_1c}. \quad (37)$$

Číselně $\varphi_m \doteq 5 \cdot 10^{-5}$ rad.

- d) Protože rychlost atomů klesá, frekvence potřebná pro rezonanční absorpci roste podle vztahu:

$$\nu = \frac{\frac{E}{h}}{1 + \frac{v_0}{c}}.$$

Když je rychlost $v_0 - \Delta v$, absorpce je stále možná, pokud

$$h\nu = \frac{E - \frac{\Gamma}{2}}{1 + \frac{v_0 - \Delta v}{c}} = \frac{E}{1 + \frac{v_0}{c}} \rightarrow \Delta v = \frac{c\Gamma}{2E} \left(1 + \frac{v_0}{c}\right). \quad (38)$$

Číselně vychází $\Delta v \doteq 3,12$ m/s.

- e) S každým případem absorpce-emise se mění rychlost o $\Delta v_1 \approx \frac{E}{mc}$. Pokles rychlosti v_0 až téměř k nule by vyžadoval N takových případů, kde:

$$N = \frac{v_0}{|\Delta v_1|} \approx \frac{mcv_0}{E},$$

číselně $N \doteq 3,56 \cdot 10^4$.

- f) Je-li absorpce okamžitá, uplynulý čas je určen spontánní emisí. Atom zůstává v excitovaném stavu po dobu asi

$$\tau = \frac{h}{\Gamma},$$

a proto

$$\Delta t = N\tau = \frac{Nh}{\Gamma} = \frac{mchv_0}{\Gamma E}.$$

Číselně vychází $\Delta t \doteq 3,37 \cdot 10^{-9}$ s.

Vzdálenost uražená v takovém čase je $\Delta s = v_0\Delta t/2$, předpokládáme-li, že jde o rovnoměrně zpomalený pohyb

$$\Delta s = \frac{1}{2} \frac{mchv_0^2}{\Gamma E}.$$

Číselně je $\Delta s \doteq 1,75$ m.

Hodnotící schéma 1. úlohy

Body za jednotlivé části udělte takto:

- 1.a) 2 body
- 1.b) 1,5 bodu
- 1.c) 2 body
- 2.a) 2 body
- 2.b) 1,5 bodu
- 3) 1 bod

Hodnotící schéma 2. úlohy

Za jednotlivé části úlohy lze získat body takto:

- a) 4,5 bodu,
- b) 2,0 bodu,
- c) 1,5 bodu,
- d) 2,0 bodu.

Tyto body jsou v jednotlivých úkolech rozděleny takto:

Část a)

- 1. Za správné výrazy (4) a (7) celkem 3 body, za jeden správný výraz 2 body.
- 2. Za správné výrazy (12) a (13) celkem 1,5 bodu, za jeden správný 1 bod.
Pokud nejsou přítomny nutné výpočty a vysvětlení, udělte 0,8 bodu za oba správné výrazy, 0,5 bodu, pokud je správný pouze jeden.

Část b)

- 1. Za korektní odvození (17) a (19) 1 bod. 1 bod udělte i tehdy, pokud je správný pouze jeden z nich.

2. Za korektní odvození (21.1) a (21.2) 0,5 bodu. 0,5 bodu udělte i tehdy, pokud je správný pouze jeden z nich.

Část c) Za korektní odvození (25) 1,5 bodu.

Část d) Za korektní odvození (29) 2,0 bodu. Pokud není určen směr vektoru (tam, kde je to nutné), student ztrácí 0,2 bodu.

Hodnotící schéma 3. úlohy

Za nalezení veličiny

- a) – v_0 – 1 bod
- ν – 1 bod
- Δv_1 – 1 bod

b) Δv_0 – 1,5 bodu

c) φ_m – 1,5 bodu

d) Δv – 1 bod

e) N – 1 bod

f) Δt – 1 bod

ΔS – 1 bod

Doporučujeme udílet 0,75 bodu za vzorec a 0,25 bodu za numerické vyjádření.