

Úlohy 21. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - ??? ???

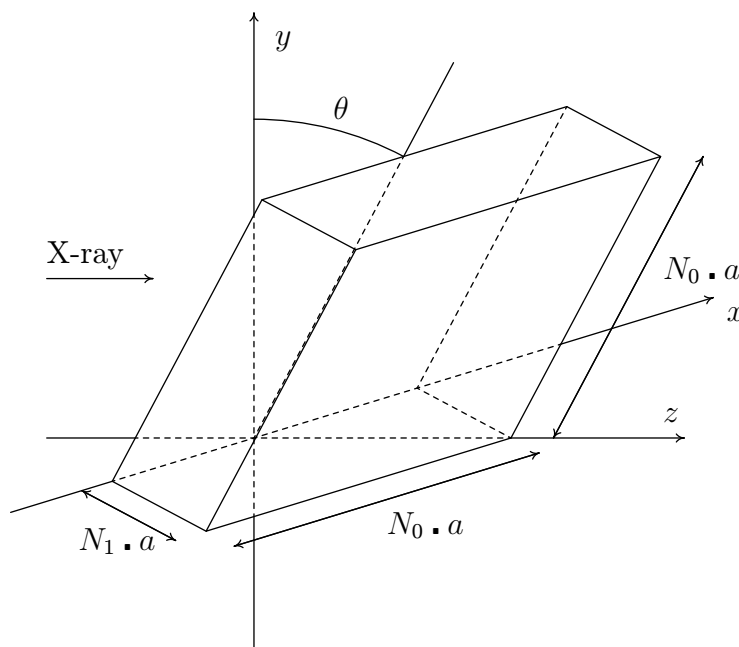
Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

Difrakce rentgenových paprsků na krystalu

Chceme studovat difrakci rentgenova záření na krychlové krystalické mřížce. Abychom tak učinili, začneme s difrakcí na rovině; monochromatická vlna, která dopadá kolmo na dvourozměrnou mřížku skládající se z $N_1 \times N_2$ štěrbin s mezerami šířky d_1 a d_2 . Difrakční vzor je pozorován na stínítku ve vzdálenosti L od mřížky. Stínítko je rovnoběžné s mřížkou a L je mnohem větší než d_1 a d_2 .



- a) Určete pozici a šířku hlavního maxima na stínítku. Šířka je definována jako vzdálenost mezi minimy na obou stranách maxima.

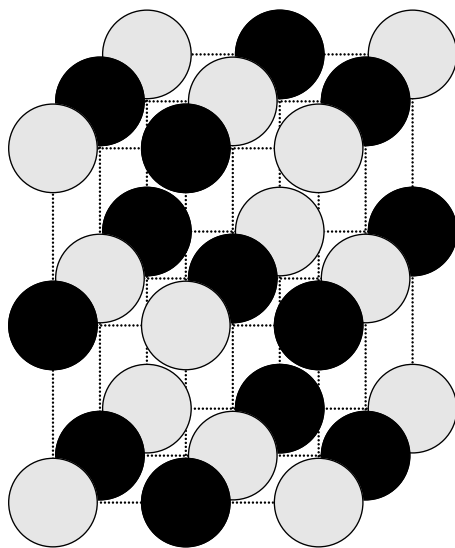
Uvažujme nyní kubický krystal, který má mřížkovou konstantou a a velikost $N_0 a \cdot N_0 a \cdot N_1 a$. N_1 je mnohem menší než N_0 . Krystal je umístěn v rovnoběžných paprscích rentgenova záření podél osy z a skloněn o úhel θ (viz

obr.). Difrakční vzorec lze znovu pozorovat na stínítku ve velké vzdálenosti od krystalu.

- b) Vypočtete pozici a šířku maxima jako funkci úhlu θ (pro malé θ). Jaký je hlavní důsledek faktu, že $N_1 \ll N_0$?

Difrakční vzorec může být také odvozen pomocí Braggovy teorie, ve které se předpokládá, že se rentgenové paprsky odráží od atomárních rovin v mřížce. Difrakční vzorec pak vyvstává z interference mezi těmito odraženými paprsky.

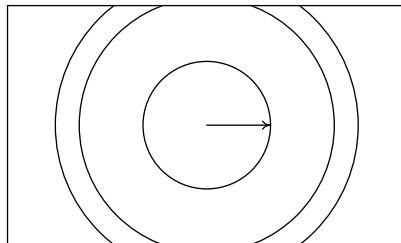
- c) Ukažte, že tento tzv. Braggův odraz dává ty samé výsledky pro maxima jako jsou výsledky nalezené v části b).



V některých měřeních se používá tzv. prášková metoda. Paprsky rentgenova záření se rozptýlí na prášku z velmi mnoha malých krystalů. (Samozřejmě, že velikosti krystalů jsou mnohem větší než mřížková konstanta a). Rozptyl rentgenových paprsků vlnové délky 0,15 nm na chloridu draselném [KCl] (který má kubickou mřížku, viz obr. 2) vede k vytvoření koncentrických tmavých kroužků na fotografické desce. Vzdálenost mezi krystaly a mřížkou

je 0,10 m, a poloměr nejmenšího kroužku je 0,053 m (viz obr. 3). K^+ a Cl^- ionty mají téměř stejnou velikost a mohou být považovány za identická rozptylová centra.

d) Vypočtete vzdálenost mezi dvěma sousedními K^+ ionty v krystalu.



Řešení:

- a) Uvažujte nejprve směr osy x . Liší-li se příčné délky drah vln ze sousedních štěrbin (s mezerami d_1) o

$$\Delta_1 = n_1 \lambda,$$

kde n_1 je celé číslo, pak nastává hlavní maximum. Pozice na stínítku (ve směru osy x) je:

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1},$$

protože $d_1 \ll d_2$.

Dráhový rozdíl mezi prostřední štěrbinou a jednou z rohových štěrbin je pak:

$$\Delta_{\frac{N_1}{2}} = \frac{N_1}{2} n_1 \lambda.$$

Je-li na druhé straně tento dráhový rozdíl

$$\Delta_{\frac{N_1}{2}} = \frac{N_1}{2} n_1 \lambda + \frac{\lambda}{2},$$

pak nastane první minimum, vyskytující se hned vedle hlavního maxima. Umístění tohoto minima na stínítku je dáno jako:

$$x_{n_1} + \Delta x = \frac{\left(\frac{N_1}{2} n_1 \lambda + \frac{\lambda}{2} \right) L}{\frac{N_1}{2} d_1} = \frac{n_1 \lambda L}{d_1} + \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Odtud

$$\Delta x = \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Šířka hlavního maxima je podle toho

$$2\Delta x = 2 \cdot \frac{\lambda L}{N_1 d_1}.$$

Podobný postup lze užít ve směru osy y , ve které je N_2 štěrbin odděleno mezerami šířek d_2 . Polohy a šířky hlavních maxim jsou:

$$[x_{n_1}, y_{n_1}] = \left[\frac{n_1 \lambda L}{d_1}, \frac{n_2 \lambda L}{d_2} \right]$$

$$2\Delta x = 2 \cdot \frac{\lambda L}{N_1 d_1}; \quad 2\Delta y = 2 \cdot \frac{\lambda L}{N_2 d_2}.$$

Alternativní metoda řešení je vypočítat intenzitu pro dvourozměrnou mřížku jako funkci úhlu, který svírají paprsky se stínítkem.

- b) Ve směru osy x paprsky „vidí“ mřížku s mezerami šířky a , takže v tomto směru máme:

$$x_{n_1} = \frac{n_1 \lambda L}{a}, \quad \Delta x = 2 \cdot \frac{\lambda L}{N_0 a}.$$

Ve směru osy y , paprsky vidí mřížku s efektivní mezerou $a \cdot \cos \theta$. Analogicky dostáváme

$$y_{n_2} = \frac{n_2 \lambda L}{a \cos \theta}, \quad \Delta y = 2 \cdot \frac{\lambda L}{N_0 a \cos \theta}.$$

Ve směru osy z , paprsky vidí mřížku s efektivní mezerou $a \sin \theta$. To dává hlavní maxima v pozici a šířky:

$$y'_{n_3} = \frac{n_3 \lambda L}{a \sin \theta}, \quad \Delta y' = 2 \cdot \frac{\lambda L}{N_1 a \sin \theta}.$$

Tento vzorec je superponovaný předchozí. Protože $\sin \theta$ je velmi malé, lze vidět pouze nulté vzorce, a to velmi široké, neboť $N_1 \sin \theta \ll N_0$. Difrakční vzorec na rovině vln dopadajících na tenkou desku z krychlového krystalu, pod malým úhlem dopadu vzhledem k normále, je téměř identický se vzorcem dvourozměrné mřížky.

- c) Podle Braggova zákona je dráhový rozdíl (pro kladnou interferenci) mezi sousedními rovinami:

$$\Delta = 2a \sin \phi \approx 2a\phi = n\lambda \rightarrow \frac{x}{L} \approx 2\phi \approx \frac{n\lambda}{a} \rightarrow x \approx \frac{n\lambda L}{a}.$$

Zde ϕ je difrakční úhel.

To je ta samá podmínka pro maximum jako v části b).

- d) Pro vzdálenost $\sqrt{2}a$ mezi sousedními K^+ ionty platí:

$$\operatorname{tg}(2\phi) = \frac{x}{L} \approx 0,53 \rightarrow a = \frac{\lambda}{2 \sin \phi} \approx 0,31 \text{ nm}.$$

Odtud

$$K - K \approx \sqrt{2} \cdot 0,31 \approx 0,44 \text{ nm}.$$

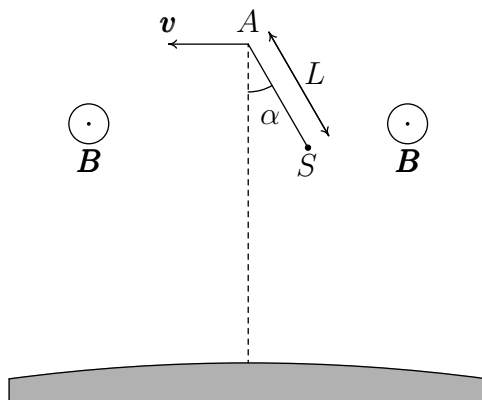
2. úloha

Elektrické experimenty v magnetosféře Země

V květnu 1991 byla vesmírná loď Atlantis vynesena na zemskou orbitu. Můžeme předpokládat, že tato oběžná dráha je kruhová a leží v rovině zemského rovníku.

V předem určený okamžik loď uvolnila satelit S , který je připojen k vodivé tyči délky L . Předpokládáme, že tyč je tuhá, má zanedbatelnou hmotnost a je pokryta elektrickým izolantem. Zanedbáváme také veškeré tření.

Ať je α úhel, který tyč svírá s přímkou mezi Atlantis a středem Země. (viz obr.) S také leží v rovině rovníku. Předpokládejme, že hmotnost satelitu je mnohem menší než hmotnost Atlantis, a L je mnohem menší než poloměr oběžné dráhy.



Atlantis (A) se satelitem (S) na orbitě kolem Země. Orbita leží v rovníkové rovině Země. Magnetické pole B je kolmé na obrázek a míří směrem ke čtenáři.

- a₁) Odvoďte, pro kterou(é) hodnotu(y) α zůstane seskupení loď a satelit nezměněné (vzhledem k Zemi). Jinými slovy, pro kterou(é) hodnotu(y) je α konstantní?
- a₂) Diskutujte stabilitu rovnováhy pro každý případ.

Předpokládejte, že v daný okamžik se tyč odchýlí ze stabilního nastavení o malý úhel. Systém se začne kývat jako kyvadlo.

b) Vyjádřete periodu kývání pomocí periody obíhání systému kolem Země.

Na obr. 1 je indukce magnetického pole Země kolmá na obrázek a orientovaná směrem ke čtenáři. Kvůli kruhové rychlosti tyče vzniká mezi jejími konci potenciálový rozdíl. Prostředí (magnetosféra) je rozředěný, ionizovaný plyn s velmi dobrou elektrickou vodivostí. Kontakt s ionizovaným plynem je zajištěn pomocí elektrod A (Atlantis) a S (satelit). Důsledkem pohybu je proud I tekoucí tyčí.

c₁) Kterým směrem bude tyčí téci proud? (Položte $\alpha = 0$).

Dané hodnoty:

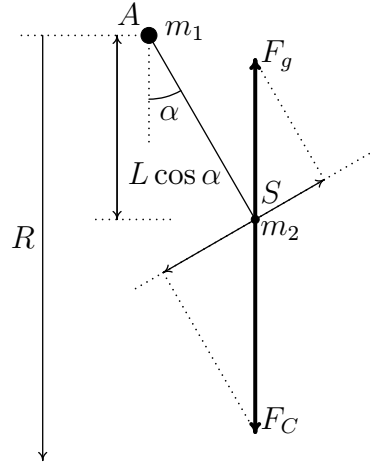
perioda obíhání Země	$T = 5,4 \cdot 10^3 \text{ s}$
délka tyče	$L = 2,0 \cdot 10^4 \text{ m}$
indukce mag. pole Země ve výšce satelitu	$B = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ Wb m}^{-2}$
hmotnost raketoplánu Atlantis	$m = 1,0 \cdot 10^5 \text{ kg}$

Další zdroj proudu uvnitř raketoplánu je zapojen do obvodu, čímž způsobí výsledný proud 0,1 A v opačném směru.

c₂) Jak dlouho musí být tento proud udržen ke změně výšky orbity o 10 m? Předpokládejte, že α zůstává nulové. Zanedbejte veškeré příspěvky ze zdrojů v magnetosféře. Bude výška růst nebo klesat?

Řešení:

- a₁) Protože $m_2 \ll m_1$, Atlantis obíhá kolem Země konstantní rychlostí. Pohyb satelitu se skládá z kruhového pohybu Atlantis kolem Země a (možného) obíhání satelitu kolem Atlantis.



Nechť m_a je hmotnost Země. Pro m_1 máme:

$$m_1 \Omega^2 R = \frac{G m_1 m_a}{R^2} \rightarrow \Omega^2 = \frac{G m_a}{R^2} \quad (1)$$

Pro m_2 máme ($F_c = F_{centrifugal}$, tj. je to odstředivá síla)

$$\begin{aligned} m_2 L \ddot{\alpha} &= -(F_g - F_c) \sin \alpha = \\ &= - \left(\frac{G m_2 m_a}{(R - L \cos \alpha)^2} - m_2 \Omega^2 (R - L \cos \alpha) \right) \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Užijeme-li aproximace:

$$\frac{1}{(R - L \cos \alpha)^2} \approx \frac{1}{R^2} + \frac{2L \cos \alpha}{R^3}$$

a rovnici (1), dostaneme:

$$L\ddot{\alpha} = - \left(\frac{Gm_a}{R^2} + \frac{2Gm_a}{R^3} L \cos \alpha - \frac{Gm_a}{R^3} R + \frac{Gm_a}{R^3} L \cos \alpha \right) \cdot \sin \alpha,$$

takže

$$\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Je-li α konstantní, pak $\ddot{\alpha} = 0$, z čehož vyplývá:

$$\rightarrow \sin \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0; \quad \alpha = \pi,$$

$$\rightarrow \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = \pi/2; \quad \alpha = 3\pi/2.$$

a₂) Situace je stabilizovaná, pokud má moment síly $M = m_2 L \ddot{\alpha} L = m_2 L^2 \ddot{\alpha}$ znaménko ve smyslu opačném k výchylce (změně) $\alpha - \alpha_0$.

zn. ($\alpha - \alpha_0$)	- +	- +	- +	- +	- +
hodnota α	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
znaménko M	+ -	- +	+ -	- +	+ -
hodnota α	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Rovnovážná poloha kolem úhlů 0 a π je stabilní, zatímco kolem úhlů $\pi/2$ a $3\pi/2$ je labilní.

b) Pro malé hodnoty α se rovnice (2) změní na rovnici

$$\ddot{\alpha} + 3\Omega^2 \alpha = 0.$$

To je rovnice jednoduchého harmonického kmitání. Druhá mocnina úhlové frekvence je

$$\omega^2 = 3\Omega^2,$$

tedy

$$\omega = \Omega\sqrt{3} \rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \left(\frac{2\pi}{\Omega} \right) = 0,58T_0.$$

c₁) Podle Lenzova zákona bude proud mířit ze satelitu směrem k raketo-plánu.

c₂) Pro celkovou energii systému máme:

$$U = U_{kin} + U_{pot} = \frac{1}{2}m\Omega^2 R^2 - \frac{Gmm_a}{R} = -\frac{1}{2} \frac{Gmm_a}{R}.$$

Malá změna poloměru oběžné dráhy odpovídá změně energie o

$$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{Gmm_a}{R^2} \Delta R = \frac{1}{2} m \Omega^2 R \Delta R.$$

V situaci popsané v c_1) je energie absorbovaná systémem jako důsledek poklesu poloměru orbity.

Je-li zdroj proud uvnitř raketoplánu připojen k obvodu, který udržuje výsledný proud v opačném směru, energie je pohlcena systémem a důsledkem toho je nárůst poloměru orbity.

Podle předpokladů daných v části c_2) máme:

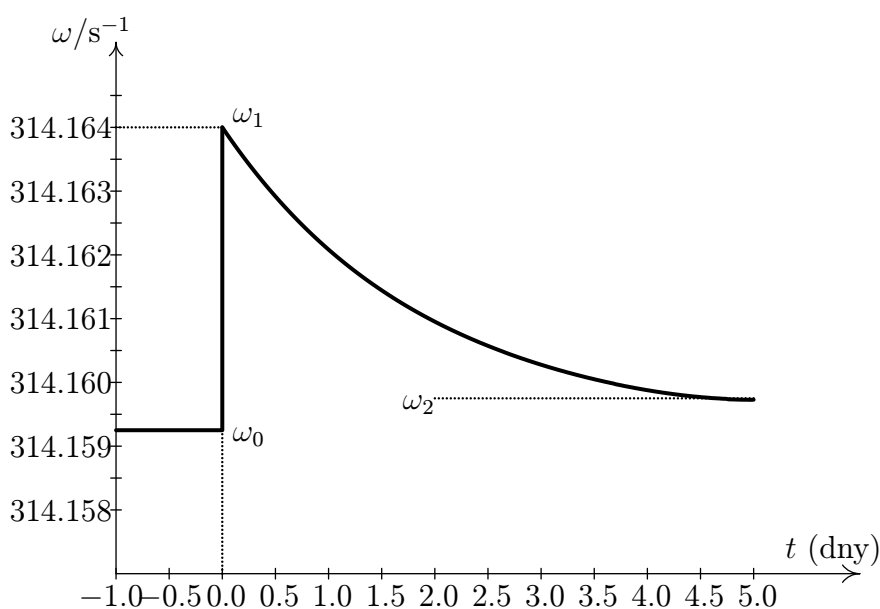
$$\Delta U = F_l v t = BIL\Omega R t = \frac{1}{2} m \Omega^2 R \Delta R \rightarrow t = \frac{1}{2} \frac{m \Omega \Delta R}{BIL}.$$

Numericky pro dané hodnoty: $t = 5,8 \cdot 10^3$ s; to je přibližná perioda obíhání systému kolem Země.

3. úloha

Rotující neutronová hvězda

Milisekundový pulzar je zdroj záření ve vesmíru, který vyzařuje velmi krátké pulsy s periodou od jedné do několika milisekund. Toto záření je v radiovém intervalu vlnových délek; a vhodný radiový přijímač lze použít k detekování oddělených pulsů a tím změřit periodu s velkou přesností.



Tyto rádiové pulsy pocházejí z povrchu zvláštních typů hvězd, tzv. neutronových hvězd. Tyto hvězdy jsou velmi kompaktní: mají hmotnost asi toho samého řádu velikosti jako Slunce, ale jejich poloměr je pouze několik desítek kilometrů. Velmi rychle rotují. Kvůli rychlé rotaci, neutronová hvězda je mírně zploštělá (zaoblená). Předpokládejte, že osový řez povrchem je elipsa s téměř stejnými poloosami. Nechť r_p je polární a r_e rovníkový poloměr; definujme faktor zploštění jako

$$\epsilon = \frac{(r_e - r_p)}{r_p}.$$

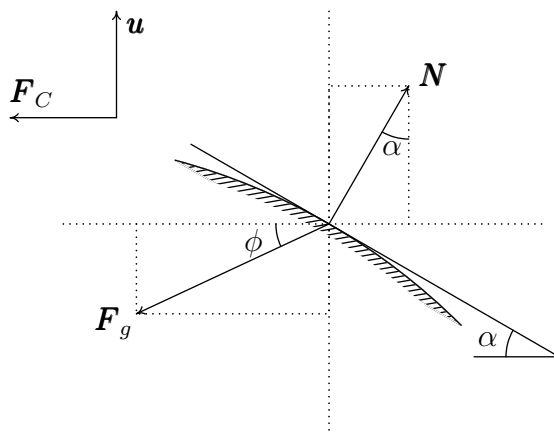
Uvažujme neutronovou hvězdu s hmotností $2,0 \cdot 10^{30}$ kg, průměrným poloměrem $1,0 \cdot 10^4$ m a periodou rotace $2,0 \cdot 10^{-2}$ s.

- a) Vypočtete faktor zploštění, je-li dána gravitační konstanta G . Její hodnota je $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$.

V dlouhém období (přes mnoho let) rychlost rotace hvězdy klesá kvůli ztrátám energie, a to vede ke zmírnění zploštění. Hvězda má nicméně pevnou kůru, která plave na kapalném vnitřku. Pevná kůra odolává nepřetržitému přizpůsobování se rovnovážnému tvaru. Místo toho se objevují otřesy s náhlými změnami tvaru kůry směrem k rovnováze. Během a po takovém hvězdo-třesení byla pozorována změna úhlové rychlosti podle obr. 1.

- b) Vypočtete průměrný poloměr kapalného vnitřku hvězdy užitím dat z obr. 1. Proveďte aproximaci, že hustota kůry a vnitřku hvězdy je stejná. (Ignorujte změny ve tvaru vnitřku hvězdy).

Řešení:



a) **1. metoda**

Pro rovnovážný stav máme $F_c = F_g + N$, kde N má směr normály k povrchu.

Přepsáním do horizontálních a vertikálních složek máme:

$$F_g \cos \phi = F_c + N \sin \alpha,$$

$$F_g \sin \phi = N \cos \alpha,$$

z čehož plyne

$$F_g \cos \phi = F_c + F_g \sin \phi \operatorname{tg} \alpha.$$

Ze vztahů

$$F_g = \frac{GM}{r^2}, \quad F_c = \omega^2 r, \quad x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

dostaneme

$$y \, dy + \left(1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}\right) x \, dx = 0, \quad (3)$$

kde:

$$\frac{\omega^2 r^3}{GM} \doteq 7 \cdot 10^{-4}.$$

To znamená, že, ačkoliv r závisí na x a y , změna ve faktoru před $x dx$ je natolik malá, že ho můžeme brát konstantní. Potom řešením rovnice (1) je elipsa:

$$\frac{x^2}{r_e^2} + \frac{y^2}{r_p^2} = 1 \rightarrow \frac{r_p}{r_e} = \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^3}{GM}} \approx 1 - \frac{\omega^2 r^3}{2GM}$$

a odtud

$$\epsilon = \frac{r_e - r_p}{r_p} = \frac{\omega^2 r^3}{2GM}.$$

Číselně vychází $\epsilon = 3,7 \cdot 10^{-4}$.

Druhá metoda

Pro bod o hmotnosti 1 kg na povrchu platí

$$U_{pot} = -\frac{GM}{r}, \quad U_{kin} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 \phi.$$

Tvar povrchu je takový, že $U_{pot} - U_{kin} = konst.$ Pro rovník platí podmínky ($\phi = 0, \tau = \tau_e$) a pro pól ($\phi = \pi/2, \tau = \tau_p$).

$$\frac{GM}{r_p} = \frac{GM}{r_e} + \frac{1}{2}\omega^2 r_e^2,$$

a odtud

$$frac{r_p}{r_e} = 1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

Odtud

$$\epsilon = \frac{r_e - r_p}{r_p} = \frac{1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM} - 1}{1 + \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}} \approx \frac{\omega^2 r_e^3}{2GM}.$$

b) Důsledkem otřesů je, že moment setrvačnosti kůry I_m klesne o ΔI_m .

Ze zákona zachování momentu hybnosti máme:

$$I_m \omega_0 = (I_m - \Delta I_m) \omega_1 \rightarrow \Delta I_m = I_m \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_1}.$$

Poté, co vnitřní tření vyrovná úhlové rychlosti kůry a jádra, dostaneme:

$$(I_m + I_c)\omega_0 = (I_m + I_c - \Delta I_m)\omega_2 \rightarrow \Delta I_m = (I_m + I_c)\frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_2}.$$

Odtud vyplývá

$$\frac{I_m}{I_m + I_c} = \frac{(\omega_2 - \omega_0)\omega_1}{(\omega_1 - \omega_0)\omega_2} \rightarrow 1 - \frac{I_c}{I_m + I_c} = \frac{(\omega_2 - \omega_0)\omega_1}{(\omega_1 - \omega_0)\omega_2},$$

$$I \sim R^2,$$

a proto

$$\frac{I_c}{I_m + I_c} = \frac{r_c^2}{r^2} \rightarrow \frac{r_c}{r} = \sqrt{1 - \frac{(\omega_2 - \omega_0)\omega_1}{(\omega_1 - \omega_0)\omega_2}}$$

Číselně tento poměr vychází asi 0,95.

Hodnotící schéma 1. úlohy

- a) pozice hlavního maxima – 1 bod
šířka hlavního maxima – 3 body
- b) mřížkové konstanty – 1 bod
efekt tloušťky – 2 body
- c) Braggův odraz – 2 body
- d) výpočet vzdálenosti iontů – 1 bod

Hodnotící schéma 2. úlohy

- a₁) 1 bod
- a₂) 1 bod
- b) Atlantis v rovnoměrném pohybu po kružnici – 0,5 bodu
výpočet Ω – 0,5 bodu
pohybové rovnice satelitu – 2,5 bodu
pohybové rovnice pro malé úhly – 0,5 bodu
perioda kmitání – 1 bod
- c₁) 1 bod
- c₂) výpočet doby, po kterou je nutné udržet proud – 1,5 bodu
nárůst nebo pokles poloměru orbity – 0,5 bodu

Hodnoticí schéma 3. úlohy*1. metoda*

výrazy pro síly – 1 bod
rovnice pro povrch – 2 body
rovnice elipsy – 1 bod
faktor zploštění – 1 bod

2. metoda

rovnice pro energii – 4 body
faktor zploštění – 1 bod

- zachování momentu hybnosti pro kůru – 1,5 bodu
- zachování momentu hybnosti pro kůru a jádro – 1,5 bodu
- moment setrvačnosti – 1 bod
- poměr r_c/r – 1 bod