

Úlohy 20. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády - ??? ???

Petr Pošta

Text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku

1. úloha

Uvažujte dvě kapaliny A a B v sobě nerozpustné. Tlaky p_i ($i = A$ nebo B) jejich nasycených par splňují, s dobrou shodou, vzorec:

$$\ln \frac{p_i}{p_0} = \frac{a_i}{T} + b_i; \quad (i = A \text{ nebo } B),$$

kde p_0 udává normální atmosférický tlak, T je termodynamická teplota páry a a_i a b_i ($i = A$ nebo B) jsou konstanty závislé na kapalině. (Symbol $\ln$ značí přirozený logaritmus, tj. logaritmus o základu $e = 2,718281828 \dots$).

Hodnoty poměru p_i/p_0 pro kapaliny A a B při teplotách 40°C a 90°C jsou dány v tabulce 1.1.

$t [^\circ\text{C}]$	p_i/p_0	
	$i = A$	$i = B$
40	0,284	0,07278
90	1,476	0,6918

Chyby těchto hodnot zanedbáváme.

- A) Určete teploty varu kapalin A a B za tlaku p_0 .
- B) Kapaliny A a B byly nality do nádoby, ve které se vytvořily vrstvy naznačené na obr. 1.1. Povrch kapaliny B byl pokryt tenkou vrstvou netěkavé kapaliny C , která je nemísitelná s kapalinami A a B a naopak, tudíž zabraňuje volnému vypařování z horního povrchu kapaliny B . Poměr molekulových hmotností kapalin A a B (v plynné fázi) je

$$\gamma = \frac{\mu_A}{\mu_B} = 8.$$

Hmotnosti kapalin A a B jsou zpočátku stejné, každá je $m = 100$ g. Výšky vrstev kapalin v nádobě a hustoty kapalin jsou dostatečně malé k učinění předpokladu, že tlak v každém bodě nádoby je prakticky roven normálnímu atmosférickému tlaku p_0 .

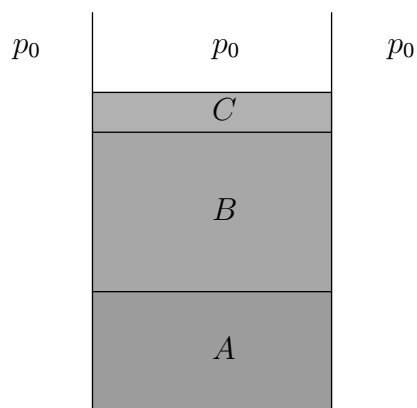
Systém kapalin v nádobě se pomalu, ale stále a rovnoměrně zahřívá. Bylo nastaveno, že teplota t kapalin se mění s časem τ tak, jak je schematicky naznačeno na obr. 1.2.

Určete teploty t_1 a t_2 odpovídající vodorovným částem diagramu. Dále určete hmotnosti kapalin A a B v čase τ_1 . Teploty t_1 a t_2 mohou být

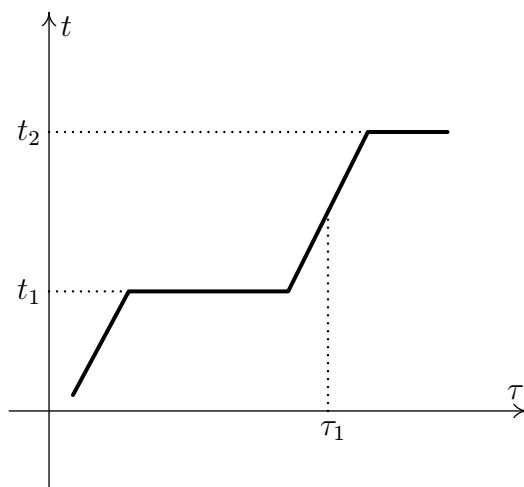
zaokrouhleny na nejbližší stupeň (v °C) a hmotnosti mohou být určeny s přesností na jednu desetinu gramu.

Poznámka: Předpokládejte, že páry kapalin s dobrou shodou

- (1) splňují Daltonův zákon říkájící, že tlak směsi plynů je roven součtu parciálních tlaků plynů tvořících směs
- (2) mohou být považovány za ideální plyn až do tlaků odpovídajících nasyceným vodním parám.



Obr. 1.1



Obr. 1.2

Řešení:

Část A

Kapalina vře, když je tlak jejich nasycených vodních par roven vnějšímu tlaku. Tudíž hledáme-li teplotu varu kapalin, měli bychom určit takovou teplotu T_{b_i} (nebo t_{b_i}), pro kterou je $p_i/p_0 = 1$.

Potom $\ln(p_i/p_0) = 0$ a máme:

$$T_{b_i} = -\frac{a_i}{b_i}.$$

Koeficienty a_i a b_i nejsou dány explicitně, nicméně mohou být vypočteny ze vzorce daného v zadání úlohy. K tomu účelu užijeme numerických dat daných v tab. 1.1. Pro kapalinu A pak řešením soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vychází

$$a_A \doteq -3748,49 \text{ K}, \quad b_A \doteq 10,711, \quad T_{b_A} = 349,95 \text{ K} \doteq 77^\circ\text{C}$$

Pro kapalinu B vychází

$$a_B \doteq -5121,64 \text{ K}, \quad b_B \doteq 13,735, \quad T_{b_B} = 372,89 \text{ K} \doteq 100^\circ\text{C}$$

Část B

Jelikož jsou kapaliny jedna s druhou tepelně spojeny, jejich teploty vzrůstají dle času tím samým způsobem.

Na začátku zahřívání, což odpovídá levé části diagramu, se nemůže vyskytnout žádné vypařování. Volné vypařování z povrchu kapaliny B se nemůže vyskytnout – je to nemožné kvůli vrstvě netěkavé kapaliny C. Vypařování z vnitřku systému uvažujeme níže.

Uvažujme bublinu vzniklou v kapalině A nebo v kapalině B nebo na povrchu, který odděluje tyto kapaliny. Taková bublina se utvoří díky fluktuacím nebo z mnoha dalších důvodů, které zde nebudeme rozebírat.

Bublina se může dostat ven ze systému jen tehdy, je-li tlak uvnitř roven vnějšímu tlaku p_0 (nebo je-li o něco málo vyšší než p_0). Jinak se bublina zhroutí sama do sebe.

Tlak uvnitř bubliny utvořené v objemu kapaliny A nebo v objemu kapaliny B je roven tlaku nasycených vodních par kapalin A nebo B. Nicméně, tlak uvnitř bubliny vytvořené na povrchu oddělujícím kapalinu A a B je roven součtu tlaků nasycených vodních par obou kapalin, poněvadž bublina je

v kontaktu s kapalinami A i B v tom samém čase. V tomto případě uvažujeme, že tlak uvnitř bubliny je větší než tlak nasycených vodních par každé z kapalin A a B (při té samé teplotě).

Proto tedy, když je systém zahříván, tlaku p_0 dosáhnou první bubliny, které se vytváří na povrchu oddělujícím kapalinu. Tudíž teplota t_1 odpovídá běžnému typu varu obou kapalin, který nastane v oblasti jejich přímého kontaktu. Teplota t_1 je dozajista nižší, než teploty varu kapalin A a B a pak tlaky nasycených vodních par kapalin A a B jsou nižší, než p_0 (jejich součet je roven p_0 , a každý z nich je větší než nula).

Abychom určili hodnotu t_1 s požadovanou přesností, vypočteme hodnoty součtu tlaků nasycených vodních par kapalin A a B pro několik různých hodnot teploty t a budeme hledat tu, která dá hodnotu součtu p_0 .

Z rovnice dané v textu máme

$$\frac{p_A}{p_0} = e^{\frac{a_A}{T} + b_A}, \quad (1)$$

$$\frac{p_B}{p_0} = e^{\frac{a_B}{T} + b_B}. \quad (2)$$

Dále $p_A + p_B$ je rovno p_0 , právě když

$$\frac{p_A}{p_0} + \frac{p_B}{p_0} = 1.$$

Tudíž máme pro výpočet hodnot následující funkci:

$$y(t) = e^{\frac{a_A}{t+t_0} + b_A} + e^{\frac{a_B}{t+t_0} + b_B}, \quad t_0 = 273,15^\circ\text{C}$$

a určujeme teplotu $t = t_1$, ve které $y(t) = 1$. Při výpočtu hodnot funkce $y(t)$ můžeme rozdělit intervaly teplot t přibližně na polovinu a sledovat, zda jsou výsledky větší nebo menší než 1. Pomocí této metody určíme $t_1 \doteq 67^\circ\text{C}$.

Nyní vypočteme tlaky nasycených vodních par kapalin A a B při teplotě $t_1 = 67^\circ\text{C}$, tj. tlaky nasycených vodních par kapalin A a B v každé bublině vytvořené na povrchu oddělujícím kapalinu. Z rovnic (1) a (2) dostaneme:

$$p_A \doteq 0,734p_0, \quad p_B \doteq 0,267p_0$$

a odtud

$$p_A + p_B = 1,001p_0 \doteq p_0.$$

Tyto tlaky závisí pouze na teplotě, a proto zůstávají konstantní během pohybu bublin skrz kapalinu B . Objem bubliny během pohybu se také nemůže

měnit bez porušení vztahu $p_A + p_B \approx p_0$. To vyplývá z výše uvedených poznámek, že hmotnostní poměr nasycených vodních par kapalin A a B je v každé bublině stejný. Tento závěr zůstává v platnosti tak dlouho, jak dlouho jsou v systému obě kapaliny. Po totálním odpaření jedné z kapalin teplota systému znovu vzroste (druhá sklopená část diagramu). Nicméně, hmotnost systému zůstává konstantní, dokud teplota nedosáhne hodnoty t_2 , ve které počíná var kapaliny (zbylé v nádobě). Proto teplota t_2 (vyšší vodorovná část diagramu) odpovídá teplotě varu kapaliny zbylé v nádobě.

Hmotnostní poměr m_A/m_B nasycených par kapalin A a B v každé bublině opouštějící systém při teplotě t_1 je roven poměru hustot těchto par ρ_A/ρ_B . Podle předpokladu 2 (kapaliny se chovají jako ideální plyny), je poměr tlaků nasycených par dán pomocí molekulových hmotností:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{p_A \mu_A}{p_B \mu_B} = \frac{p_A}{p_B} \gamma.$$

Tudíž je

$$\frac{m_A}{m_B} \doteq 22,0.$$

Vidíme, že kapalina A se vypařuje 22x rychleji než kapalina B . Výpar 100 g kapaliny A během „povrchového varu“ při teplotě t_1 je spojen s výparem 4,5 g kapaliny B . Proto, v čase τ_1 , nádoba obsahuje 95,5 g kapaliny B a žádnou kapalinu A . Teplota t_2 je rovna teplotě varu kapaliny B , tedy 100°C .

2. úloha

Tři nekolineární body P_1 , P_2 a P_3 se známými hmotnostmi m_1 , m_2 a m_3 interagují navzájem pouze skrze své vzájemné gravitační síly; jsou izolovány ve volném prostoru a neinteragují s jakýmkoliv jinými tělesy. Nechť σ značí osu procházející hmotným středem soustavy a nechť je kolmá k trojúhelníku $P_1P_2P_3$. Jaké podmínky by měla úhlová rychlost ω systému (kolem osy σ) a vzdálenosti

$$P_1P_2 = a_{12}, \quad P_2P_3 = a_{23}, \quad P_1P_3 = a_{13}$$

splňovat, aby mohly tvar a velikost trojúhelníku $P_1P_2P_3$ zůstat nezměněny během pohybu systému, tj. za jakých podmínek systém rotuje kolem osy σ jako tuhé těleso?

Řešení:

Je-li systém izolovaný, jeho celková energie (tj. součet kinetických a potenciálních energií) se zachovává. Celková potenciální energie bodů P_1 , P_2 a P_3 s hmotnostmi m_1 , m_2 a m_3 v inerciálním systému (tj. když zde nejsou přítomny žádné neinerciální síly) je rovna součtu gravitačních potenciálních energií všech párů bodů (P_1, P_2) , (P_1, P_3) a (P_2, P_3) . Závisí pouze na vzdálenostech a_{12} , a_{23} a a_{13} , které jsou v čase konstantní. Tudiž, celková potenciální energie systému je konstantní a důsledkem toho je, že také kinetická energie systému je konstantní. Moment setrvačnosti systému vzhledem k ose σ závisí pouze na vzdálenostech bodů P_1 , P_2 , P_3 od osy σ , pro pevné a_{12} , a_{23} a a_{13} nezávisí na čase. To znamená, že moment setrvačnosti I je konstantní. Proto dále, úhlová rychlost systému musí být také konstantní:

$$\omega = \text{konst.} \quad (1)$$

Toto je první podmínka, kterou jsme museli najít. Další podmínky lze určit užitím tří různých metod popsaných níže. Nicméně, dříve než provedeme výpočty, je žádoucí blíže určit vhodný souřadnicový systém, ve kterém se výpočty zjednoduší.

Nechť pozice bodů P_1 , P_2 a P_3 o hmotnostech m_1 , m_2 a m_3 jsou dány vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ a $\vec{r}_3$. Pro jednoduchost předpokládáme, že počátek soustavy souřadnic je umístěn v hmotném středu bodů P_1 , P_2 a P_3 a všechny vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ a $\vec{r}_3$ jsou v té samé souřadnicové rovině, např. v rovině (x, y) . Pak osa σ je osou z .

V této soustavě souřadnic, podle definice hmotného středu, máme:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0. \quad (2)$$

První metoda

Uvažujte bod P_1 o hmotnosti m_1 . Body P_2 a P_3 na něj působí silami:

$$\vec{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{a_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (3)$$

$$\vec{F}_{31} = G \frac{m_1 m_3}{a_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1), \quad (4)$$

kde G značí gravitační konstantu.

V inerciální vztažné soustavě je součet těchto sil dostředivou silou

$$\vec{F}_{r_1} = -m_1 \omega^2 \vec{r}_1,$$

která způsobuje pohyb bodu P_1 podél kružnice s úhlovou rychlostí ω . (Moment síly vzhledem k ose σ je roven nule.) Tudíž máme

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = \vec{F}_{r_1}. \quad (5)$$

V neinerciální vztažné soustavě, rotující kolem osy σ úhlovou rychlostí ω je součet sil (3), (4) a odstředivé síly

$$\vec{F}'_{r_1} = m_1 \omega^2 \vec{r}_1$$

roven nule:

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}'_{r_1} = 0. \quad (6)$$

(Moment tohoto součtu vzhledem ke kterékoliv ose je nulový.)

Podmínky (5) a (6) jsou ekvivalentní. Dávají tu samou vektorovou rovnici:

$$\begin{aligned} G \frac{m_1 m_2}{a_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{a_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 &= 0. \\ G \frac{m_1}{a_{12}^3} m_2 \vec{r}_2 + G \frac{m_1}{a_{13}^3} m_3 \vec{r}_3 + m_1 \vec{r}_1 \left[\omega^2 - \frac{G m_2}{a_{12}^3} - \frac{G m_3}{a_{13}^3} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Ze vztahu (2) dostaneme

$$m_2 \vec{r}_2 = -m_1 \vec{r}_1 - m_3 \vec{r}_3. \quad (8)$$

Užitím tohoto vztahu můžeme přepsat rovnici (7) do tvaru:

$$G \frac{m_1}{a_{12}^3} (-m_1 \vec{r}_1 - m_3 \vec{r}_3) + G \frac{m_1}{a_{13}^3} m_3 \vec{r}_3 + m_1 \vec{r}_1 \left[\omega^2 - \frac{G m_2}{a_{12}^3} - \frac{G m_3}{a_{13}^3} \right] = 0,$$

a tedy

$$\vec{r}_1 m_1 \left(\omega^2 - \frac{G m_2}{a_{12}^3} - \frac{G m_3}{a_{13}^3} - \frac{G m_1}{a_{12}^3} \right) + \vec{r}_3 \left(\frac{1}{a_{13}^3} - \frac{1}{a_{12}^3} \right) G m_1 m_3 = 0.$$

Vektory $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_3$ nejsou kolineární, proto se oba koeficienty v poslední rovnici musí rovnat nule:

$$\left(\frac{1}{a_{13}^3} - \frac{1}{a_{12}^3}\right) Gm_1m_3 = 0,$$

$$m_1 \left(\omega^2 - \frac{Gm_2}{a_{12}^3} - \frac{Gm_3}{a_{13}^3} - \frac{Gm_1}{a_{12}^3}\right) = 0.$$

První rovnice vede na tvar:

$$\frac{1}{a_{13}^3} = \frac{1}{a_{12}^3}$$

a tedy

$$a_{13} = a_{12}.$$

Položme $a_{13} = a_{12} = a$. Potom druhá rovnice dává

$$\omega^2 a^3 = GM, \tag{9}$$

kde

$$M = m_1 + m_2 + m_3 \tag{10}$$

je celková hmotnost systému.

Tím samým způsobem lze pro body P_2 a P_3 dostat vztahy:

$$a_{23} = a_{12}, \quad \omega^2 a^3 = GM.$$

$$a_{13} = a_{23}, \quad \omega^2 a^3 = GM.$$

Shrnutí říká, že systém může rotovat jako tuhé těleso, pokud si jsou všechny vzdálenosti mezi hmotnými body rovny:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = a, \tag{11}$$

úhlová rychlost ω je konstantní a vyhovuje rovnici (9).

Druhá metoda

Na začátku najdeme moment setrvačnosti systému vzhledem k ose σ . Užitím vztahu (2) můžeme psát:

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)^2 = \\ &= m_1^2\vec{r}_1^2 + m_2^2\vec{r}_2^2 + m_3^2\vec{r}_3^2 + 2m_1m_2\vec{r}_1\vec{r}_2 + 2m_2m_3\vec{r}_2\vec{r}_3 + 2m_3m_1\vec{r}_3\vec{r}_1. \end{aligned}$$

Samozřejmě:

$$\vec{r}_i^2 = r_i^2, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Veličiny $2\vec{r}_i\vec{r}_j$ lze určit pomocí následujícího vztahu:

$$a_{ij}^2 = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2 = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 = \vec{r}_i^2 + \vec{r}_j^2 - 2\vec{r}_i\vec{r}_j.$$

Dostáváme

$$2\vec{r}_i\vec{r}_j = \vec{r}_i^2 + \vec{r}_j^2 - a_{ij}^2.$$

Pomocí tohoto vztahů, po jednoduchých transformacích, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)^2 = \\ &= (m_1 + m_2 + m_3)(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2) - \sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2. \end{aligned}$$

Moment setrvačnosti I systému vzhledem k ose σ , podle definice jeho velikosti, je roven

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2.$$

Poslední dva vzorce vedou na následující výraz

$$I = \frac{1}{M} \sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2,$$

kde $M = m_1 + m_2 + m_3$ je celková hmotnost systému.

V neinerciální vztažné soustavě, rotující kolem osy σ úhlovou rychlostí ω , celková potenciální energie je součtem gravitačních potenciálních energií

$$V_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{a_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3; i < j$$

všech hmotných bodů a potenciálních energií

$$V_i = -\frac{1}{2}\omega^2 m_i r_i^2; \quad i = 1, 2, 3$$

hmotných podů v poli odstředivé síly:

$$\begin{aligned}
 V_{tot} &= -G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{a_{ij}} - \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2 = \\
 &= -G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{a_{ij}} - \frac{1}{2} \omega^2 I = \\
 &= -G \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{a_{ij}} - \frac{1}{2} \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{i<j} m_i m_j a_{ij}^2 = \\
 &= - \sum_{i<j} m_i m_j \left[\frac{\omega^2}{2M} a_{ij}^2 + \frac{G}{a_{ij}} \right]
 \end{aligned}$$

Mechanický systém je v rovnováze, pokud jeho celková potenciální energie nabývá extrému. V našem případě je celková energie V_{tot} součtem tří členů. Každý z nich je úměrný funkci

$$f(a) = \frac{\omega^2}{2M} a^2 + \frac{G}{a}.$$

Extrém této funkce může být nalezen derivací podle a a požadavkem nulovosti této derivace. Dostáváme

$$\frac{\omega^2}{M} a - \frac{G}{a^2} = 0.$$

To vede na

$$\omega^2 a^3 = GM, \quad \text{neboli} \quad \omega^2 a^3 = G(m_1 + m_2 + m_3).$$

Vidíme, že všechny členy V_{tot} mají extrém při té samé hodnotě $a_{ij} = a$. (Navíc by měly hodnoty a a ω splňovat vztah uvedený výše.) Je jednoduché ukázat, že jde o maximum. Tudíž, veličina V_{tot} má maximum v bodě $a_{ij} = a$.

To znamená, že naše tři hmotné body mohou zůstat v pevné vzdálenosti pouze tehdy, jsou-li si vzdálenosti bodů navzájem rovny:

$$a_{12} = a_{23} = a_{13} = a$$

a pokud platí vztah

$$\omega^2 a^3 = GM,$$

kde M je celková hmotnost soustavy. Znovu jsme tak dostali podmínky (9) a (11).

Třetí metoda

Uvažujme bod P_1 s hmotností m_1 a síly $\vec{F}_{21}$ a $\vec{F}_{31}$ dané vztahy (3) a (4). Jak vyplývá ze zadání úlohy, celkový moment síly (vzhledem ke kterémukoliv pevnému bodu nebo vzhledem k hmotnému středu) působící na bod P_1 musí být nulový. Tudíž máme:

$$\vec{F}_{21} \times \vec{r}_1 + \vec{F}_{31} \times \vec{r}_1 = 0,$$

kde symbol $\times$ značí vektorový součin. Tudíž

$$G \frac{m_1 m_2}{a_{12}^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{r}_1 + G \frac{m_1 m_3}{a_{13}^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \times \vec{r}_1 = 0.$$

Je ale

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_1 = 0,$$

takže

$$\frac{m_2}{a_{12}^3} \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 + \frac{m_3}{a_{13}^3} \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0.$$

Užitím vztahu (8), může být vztah následně přepsán do podoby:

$$\frac{1}{a_{12}^3} (-m_1 \vec{r}_1 - m_3 \vec{r}_3) \times \vec{r}_1 + \frac{m_3}{a_{13}^3} \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0,$$

$$-\frac{m_3}{a_{12}^3} \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 + \frac{m_3}{a_{13}^3} \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{a_{13}^3} - \frac{1}{a_{12}^3} \right) \vec{r}_3 \times \vec{r}_1 = 0.$$

Vektory $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_3$ nejsou kolineární, proto

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_3 \neq 0,$$

a tedy musí být

$$\frac{1}{a_{13}^3} - \frac{1}{a_{12}^3} = 0.$$

Odtud

$$a_{12} = a_{13}.$$

Obdobně dostaneme

$$a_{12} = a_{23}.$$

Tím jsme znovu odvodili podmínku (11).

Vezmeme-li v úvahu, že všechny vzdálenosti a_{ij} mají tu samou hodnotu a , z rovnice (7) týkající se bodu P_1 dostaneme:

$$\begin{aligned} G \frac{m_1 m_2}{a^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + G \frac{m_1 m_3}{a^3} (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 &= 0, \\ G \frac{m_1}{a^3} (m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3) - G \frac{m_2}{a^3} m_1 \vec{r}_1 - G \frac{m_3}{a^3} m_1 \vec{r}_1 + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 &= 0, \\ - \left(G \frac{m_1}{a^3} + G \frac{m_2}{a^3} + G \frac{m_3}{a^3} \right) m_1 \vec{r}_1 + m_1 \omega^2 \vec{r}_1 &= 0, \\ \frac{GM}{a^3} &= \omega^2. \end{aligned}$$

To je podmínka (9). Tu samou podmínku dostaneme z výsledků podobných výpočtů pro P_2 a P_3 .

Metoda zde popsaná není v zásadě odlišná od první metody. De fakto jsou obě navzájem snadno zaměnitelné. Nicméně je zajímavé poznamenat, jak aplikace matematického jazyka, např. vektorového součinu, zjednoduší výpočty.

3. úloha

Tato úloha se týká vyšetřování zobrazování elektronovým mikroskopu s magnetickým zaostřováním elektronového paprsku (který je urychlován skrze potenciálový rozdíl $U = 511$ kV) na protonový mikroskop (ve kterém je paprsek protonů urychlován potenciálovým rozdílem $-U$). Pro tyto účely vyřešte dvě následující úlohy:

- A) Elektron po opuštění zařízení, které jej urychlilo napětím U , padá do oblasti nehomogenního magnetického pole $\vec{B}$ generovaného systémem cívek $L_1, L_2, \dots, L_n$. Známé proudy v cívkách jsou $i_1, i_2, \dots, i_n$.

Jaké by měly být proudy $i'_1, i'_2, \dots, i'_n$ v cívkách $L_1, L_2, \dots, L_n$, aby zaostřily proton (urychlený napětím $-U$) podél té samé trajektorie (a směru) jako elektron?

Nápověda: úlohu lze řešit nalezením podmínky, při které jsou rovnice popisující trajektorii v obou případech stejné. Při řešení lze užít následujícího vztahu:

$$\vec{p} \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2.$$

- B) Kolikrát by měla rozlišovací schopnost výše popsaného mikroskopu stoupnout nebo klesnout, je-li elektronový paprsek nahrazen protonovým? Předpokládejte, že rozlišovací schopnost mikroskopu (tj. nejmenší vzdálenost dvěma bodovými objekty, jejichž kruhové obrazy ještě lze oddělit) závisí jenom na vlnových vlastnostech částic.

Předpokládejte, že rychlosti elektronů a protonů před urychlením jsou nulové a že zde není interakce mezi vlastním magnetickým momentem elektronů a protonů a magnetickým polem. Předpokládejte také, že elektromagnetické záření emitované pohybujícími částicemi může být zanedbáno.

Poznámka: Velmi často fyzici užívají 1 electron-volt (1 eV) a jeho odvozeniny jako 1 keV či 1 MeV jako jednotku energie. 1 eV je energie získaná elektronem při průchodu napětím rovným 1 V.

Proveďte výpočty podle následujících dat:

klidová energie elektronu $E_e = m_e c^2 = 511$ keV,

klidová energie protonu $E_p = m_p c^2 = 938$ MeV.

Řešení:

Část A

Na počátku bychom měli poznamenat, že kinetická energie elektronu urychleného napětím $U = 511$ kV je rovna jeho klidové energii E_0 . Proto, minimálně v případě elektronu, nemohou být aplikovány zákony klasické fyziky a je nutné užít relativistické zákony.

Relativistická rovnice pro pohyb částice s nábojem e v magnetickém poli indukce $\vec{B}$ má následující tvar:

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}_L,$$

kde $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$ udává hybnost částice (vektor) a

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B}$$

je Lorentzova síla (její hodnota je $e v B$ a její směr je určen podle pravidla pravé ruky). V horním vzorci znamená m_0 klidovou hmotnost částice a $\vec{v}$ značí rychlost částice. Veličina γ je dána vzorcem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Lorentzova síla $\vec{F}_L$ je kolmá k rychlosti $\vec{v}$ částice a k její hybnosti $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$. Tudíž

$$\vec{F}_L \cdot \vec{v} = \vec{F}_L \cdot \vec{p} = 0.$$

Vynásobením rovnice $\vec{p}$ a užitím nápovědy udané v textu dostaneme:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} p^2 = 0.$$

To značí, že hodnota hybnosti částice (a hodnota rychlosti) je během pohybu konstantní:

$$p = m_0\gamma v = \text{konst.}, \quad (v = \text{konst.})$$

Ten samý výsledek lze obdržet bez jakéhokoliv vzorce tímto způsobem:

Lorentzova síla $\vec{F}_L$ je kolmá k rychlosti $\vec{v}$ (a hybnosti $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$) a tím pádem také k trajektorii částice. Tudíž, není zde přítomna žádná síla, která by mohla změnit tangenciální složku hybnosti vzhledem k trajektorii. Tudíž

tato složka, jejíž hodnota je rovna délce vektoru $\vec{p}$, musí být konstantní: $p = \text{konst.}$ (To samé platí o složce rychlosti tangenciální k trajektorii.)

Nechť s udává dráhu uraženou částicí podél trajektorie. Z definice rychlosti máme

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Užitím tohoto vzorce můžeme přepsat pohybovou rovnici následovně

$$v \frac{d}{ds} \vec{p} = \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \vec{p} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}_L,$$

$$\frac{d}{ds} \vec{p} = \frac{\vec{F}_L}{v}.$$

Dělením této rovnice p a užitím faktu, že $p = \text{konst.}$, obdržíme

$$\frac{d}{ds} \frac{\vec{p}}{p} = \frac{\vec{F}_L}{pv},$$

a tedy

$$\frac{d}{ds} \vec{t} = \frac{\vec{F}_L}{vp},$$

kde $\vec{t} = \vec{p}/p = \vec{v}/v$ je vektor tečný k trajektorii.

Rovnice výše je přesně stejná pro elektrony i protony tehdy a jen tehdy, je-li vektorová veličina

$$\frac{\vec{F}_L}{vp}$$

stejná v obou případech.

Označením korespondujících veličin pro protony stejnými symboly jako pro elektrony, ale s čárkami, dostaneme podmínku, podle níž se elektrony i protony mohou pohybovat po stejné trajektorii. Tato podmínka je ekvivalentní rovnici:

$$\frac{\vec{F}_L}{vp} = \frac{\vec{F}'_L}{v'p'}.$$

Nicméně Lorentzova síla je přímo úměrná rychlosti částice a směry kterýmkoliv dvou vektorů z následujících tří $\vec{t}$ (nebo $\vec{v}$), $\vec{F}_L$, $\vec{B}$ určují směr třetího z nich (pravidlo pravé ruky). Tudíž může být hořejší podmínka přepsána ve tvaru

$$\frac{e\vec{B}}{p} = \frac{e'\vec{B}}{p'}.$$

Odtud

$$\vec{B}' = \frac{e}{e'} \frac{p'}{p} \vec{B} = -\frac{p'}{p} \vec{B}.$$

To značí, že v každém bodě se zachovává směr indukce $\vec{B}$, její orientace se mění na opačnou, a její hodnota se násobí faktorem p'/p . Indukce magnetického pole $\vec{B}$ je vektorovým součtem magnetických polí cívek, rozložených libovolně v prostoru. Tudíž, každé z těchto polí by mělo být vynásobeno tím samým faktorem. Nicméně, magnetické pole kterékoliv cívky je úměrné proudu jí protékající. To znamená, že požadovaná úprava pole může být dosažena pouze úpravou všech proudů tím samým faktorem:

$$i'_n = -\frac{p'}{p} i_n.$$

Nyní bychom měli určit poměr p'/p . Kinetické energie částic jsou v obou případech stejné; jsou rovny $E_k = e|U| = 511 \text{ keV}$. Obecný relativistický vztah mezi celkovou energií E částice a klidovou energií E_0 a hybností p má tvar:

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^2,$$

kde c značí rychlost světla.

Celková energie uvažované částice je rovna součtu klidové a kinetické energie:

$$E = E_0 + E_k.$$

Užitím těchto vzorců, víme-li, že $E_k = e|U| = E_e$, odvodíme hybnosti elektronů (p) a protonů (p'). Dostaneme

a) pro elektrony:

$$(E_e + E_e)^2 = E_e^2 + p^2 c^2,$$

$$p = \frac{E_e}{c} \sqrt{3}.$$

b) pro protony:

$$(E_p + E_e)^2 = E_p^2 + p'^2 c^2,$$

$$p' = \frac{E_e}{c} \sqrt{\left(\frac{E_p}{E_e} + 1\right)^2 - \left(\frac{E_p}{E_e}\right)^2}.$$

Tudíž

$$\frac{p'}{p} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{E_p}{E_e} + 1\right)^2 - \left(\frac{E_p}{E_e}\right)^2} \approx 35,0$$

a

$$i'_n = -35,0 i_n.$$

Je užitečné poznamenat, že naše protony jsou téměř „klasické“, protože jejich kinetická energie je malá v porovnání s jejich klidovou energií. Tudíž lze očekávat, že hybnost protonu lze určit s dobrou přesností klasicky. Máme:

$$E_e = E_k = \frac{p'^2}{2m_p} = \frac{p'^2 c^2}{2m_p c^2} = \frac{p'^2 c^2}{2E_p},$$

$$p' = \frac{1}{c} \sqrt{2E_e E_p}.$$

Na druhou stranu, hybnost protonu určená relativisticky může být přepsána v jednodušší formě, neboť $E_p/E_e \gg 1$. Dostaneme:

$$p' = \frac{E_e}{c} \sqrt{\left(\frac{E_p}{E_e} + 1\right)^2 - \left(\frac{E_p}{E_e}\right)^2} = \frac{E_e}{c} \sqrt{2\frac{E_p}{E_e} + 1} \approx \frac{E_e}{c} \sqrt{2\frac{E_p}{E_e}} = \frac{1}{c} \sqrt{2E_e E_p}.$$

Ve shodě s naším očekáváním jsme dostali tentýž výsledek jako předtím.

Část B

Rozlišovací schopnost mikroskopu (definovaná způsobem v zadání úlohy) je úměrná vlnové délce, v našem případě délce de Broglieovy vlny:

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

kde h značí Planckovu konstantu a p je hybnost částice. Vidíme, že λ je nepřímo úměrná hybnosti částice. Proto, nahradíme-li elektronový paprsek paprskem protonů, rozlišovací poměr se změní faktorem $1/35$. Protonový mikroskop tedy může rozeznat objekty 35x menší než elektronový.

Poznámky k 1. úloze

Bodovací schéma:

1. fyzikální podmínky pro var – 1 bod
2. teplota varu kapaliny A (numerická hodnota) – 1 bod
3. teplota varu kapaliny B (numerická hodnota) – 1 bod
4. analýza jevu za teploty t_1 – 3 body
5. numerická hodnota t_1 – 1 bod
6. numerická hodnota poměru hmotností v nasycených parách v bublině – 1 bod
7. hmotnosti kapalin v čase τ_1 – 1 bod
8. určení teploty t_2 – 1 bod

Protože součet logaritmů není roven logaritmu součtu, nelze vzorec daný v zadání úlohy užít na směs nasycených par v bublině vytvořené na povrchu oddělených kapalin. Nicméně, numerická data byla vybrána tak, aby i špatné řešení úlohy dalo správnou hodnotu teploty t_1 (v požadované přesnosti). Naším cílem bylo umožnit žákům řešit část B úlohy i tehdy, jestliže určovali teplotu t_1 špatným způsobem. Samozřejmě však nebyly za špatný způsob řešení uděleny body, i když výsledná numerická hodnota byla správná.

Nikdo nedosáhl při řešení maximálního počtu bodů, ačkoliv některá řešení byla velmi blízko. Pouze dva účastníci zkusili analyzovat vzájemný poměr tlaků par během pohybu bubliny vzhůru skrz kapalinu B . Část studentů si spletla Celsiovu stupnici s Kelvinovou. Mnoho účastníků neuvažovalo var na povrchu oddělujícím kapaliny A a B , ačkoliv tento efekt byl jádrem úlohy. Část studentů, kteří si tohoto jevu všimli, a priori předpokládalo, že kapalina s nižší teplotou varu se *musí* první vypařovat. Obecně to nemusí být pravda! Pokud by poměr γ byl např. $1/8$ namísto 8, pak by v nádobě zůstala kapalina A , nikoliv kapalina B . Pokud jde o teploty varu, prakticky nikdo neměl zásadní problémy v jejich určení.

Poznámky k 2. úloze

Bodovací schéma:

1. důkaz, že $\omega = \text{konst.}$ – 2 body
2. podmínka rovnováhy (podmínky pro síly a jejich momenty, nebo extrém celkové potenciální energie) – 2 body
3. důkaz vztahu $a_{ij} = a$ – 4 body
4. důkaz vztahu $\omega^2 a^3 = GM$ – 2 body

Ve studentských řešeních nebyl nalezen žádný typ chyby, který by se dal označit jako dominantní. Prakticky všechny chyby mohou být připsány skoupým zkušenostem ve výpočtech a obecně nedostatku zkušenosti. Několik studentů zle porozumělo zadání úlohy a pokoušelo se dokázat, že všechny tři hmotnosti si musí být rovny. To samozřejmě není možné, navíc, je to bezbodová cesta, neboť hmotnosti jsou *dány*. Skoro všichni účastníci zkoušeli řešit problém analýzou rovnováhy sil a jejich momentů. Jenom jediný student zkusil řešit problém nalezením extrému celkové potenciální energie (naneštěstí jeho řešení nebylo zcela korektní). Několik účastníků řešilo problém užitím šikové vztahné soustavy: jeden hmotný bod v počátku a jeden na ose x . Jeden z nich obdržel speciální cenu.

Poznámky k 3. úloze

Bodovací schéma:

1. relativistická pohybová rovnice – 1 bod
2. nezávislost p a v na čase – 1 bod
3. identita $e\vec{B}/p$ v obou případech – 2 body
4. určení faktoru pro úpravu polí a proudů – 1 bod
5. určení hybností (relativisticky) – 1 bod
6. poměr hybností (numericky) – 1 bod
7. úměrnost rozlišovací schopnosti vůči λ – 1 bod
8. nepřímá úměrnost λ vůči p – 1 bod
9. úprava rozlišovací schopnosti – 1 bod

Někteří účastníci zkoušeli řešit úlohu pouze užitím zákonů klasické mechaniky. Tento přístup je samozřejmě zcela špatný. Někteří studenti zkoušeli nalézt požadovanou podmínku počítáním „zrychlení“ částic v obou případech. „Zrychlením“ částice rozuměli poměr síly působící na částici a „relativistické“ hmotnosti částice. Tento postup není korektní. Předně, v relativistické fyzice je vztah mezi silou a zrychlením komplikovanější. Počítá nikoli s jednou „relativistickou“ hmotností, nýbrž se dvěma: *podélnou (longituduální)* a *příčnou (transverzální)*. Za druhé, totožnost trajektorií neimplikuje rovnost zrychlení.

Faktická podmínka, tj. identita $e\vec{B}/p$ v obou případech, mohla být obdržena pomocí dvou následujících požadavků:

1. v každém daném bodě trajektorie musí být její zakřivení stejné;
2. v okolí každého daného bodu musí být rovina, obsahující malý oblouk trajektorie, orientována v prostoru v obou případech stejně.

Většina studentů užila postup právě popsany. Naneštěstí, mnoho z nich opomnělo druhý požadavek (zanedbali vektorový charakter veličiny $e\vec{B}/p$).