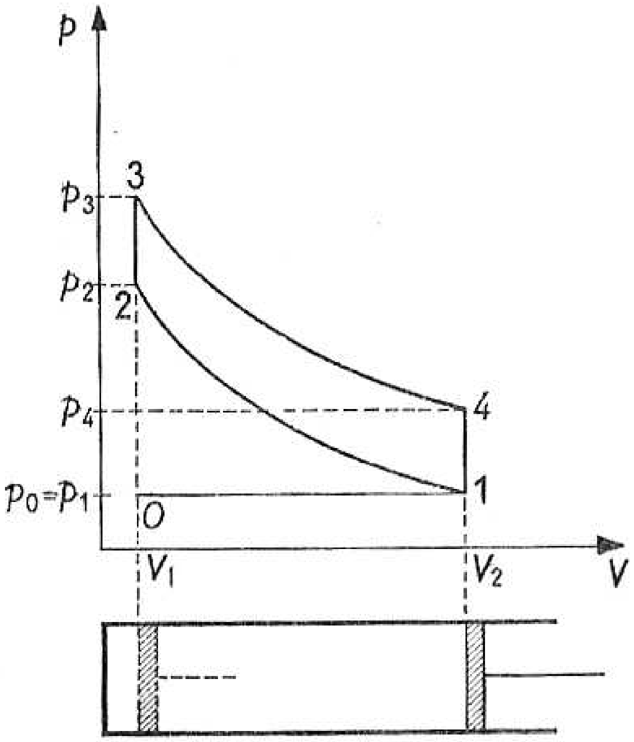
10. Mezinárodní fyzikální olympiáda

ČSSR, Hradec Králové, 1977

2. Soutěžní úlohy

1. úloha

Kompresní poměr čtyřtaktního motoru zážehového je $\varepsilon = 9{,}5$. Do motoru je nasáván vzduch z okolí ($p_1 = 0{,}10$ MPa) o teplotě 27 °C. Během zapálení pohonné směsi jiskrou vzroste tlak ve válci na dvojnásobek. Děje ve válci a chod motoru považujeme za ideální podle diagramu (obr. 81).



Obr. 81

a) O jaké děje jde mezi body 0—1, 2—3, 4—1 a 1—0? Děje 1—2 a 3—4 jsou adiabatické ($\varkappa = 1{,}40$).
b) Stanovte stavové veličiny p, T pro jednotlivé stavy charakterizované v pracovním diagramu body obratu.
c) Určete tepelnou účinnost motoru.
d) Posuďte, zda výsledky jsou reálné. Své tvrzení vysvětlete.

Poznámka: Kompresní poměr ε je podíl největšího a nejmenšího objemu válce.

Řešení

a) Mezi jednotlivými body jde o tyto děje:

0—1: sání – děj izobarický a izotermický
1—2: komprese – děj adiabatický
2—3: zapálení směsi – děj izochorický
3—4: expanze – děj adiabatický
4—1: výfuk – děj izochorický
1—0: výfuk – děj izobarický

Původní objem před nasáváním v době 0 označíme V_1, po nasávání v bodě 1 V_2 a teploty v jednotlivých bodech T_0, T_1, T_2, T_3 a T_4.

b) Vztahy pro jednotlivé děje:

0—1: Do válce se nasává pohonná směs při teplotě $T_0 = T_1 = 300$ K a tlaku $p_0 = p_1 = 0{,}10$ MPa.

1—2: Poněvadž jde o rychlou kompresi, považujeme děj za adiabatický. Proto platí:

$$p_1 V_2^{\varkappa} = p_2 V_1^{\varkappa} \quad \text{a} \quad \frac{p_1 V_2}{T_1} = \frac{p_2 V_1}{T_2}\,.$$

Odtud z prvého vztahu

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa} = p_1 \varepsilon^{\varkappa}$$

a vydělením obou rovnic a úpravou dostaneme

$$T_1 V_2^{\varkappa-1} = T_2 V_1^{\varkappa-1}\,, \quad T_2 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\varkappa-1} = T_1 \varepsilon^{\varkappa-1}\,.$$

Poněvadž plyn považujeme za ideální, je $\varkappa = 1{,}40$. Pro dané hodnoty $\varepsilon = 9{,}5$, $p_1 = 0{,}10$ MPa, $T_1 = 300$ K vychází

$p_2 = 2{,}34$ MPa $(p_2 = 23{,}4\, p_1)$, $T_2 = 738$ K $(t_2 =$
$= 465\ °C)$.

2—3: Poněvadž jde o děj izochorický a platí $p_3 = 2p_2$, je

$$\frac{p_3}{p_2} = \frac{T_3}{T_2} \quad \text{a z toho} \quad T_3 = T_2\,\frac{p_3}{p_2} = 2T_2\,.$$

Vychází tedy číselně

$p_3 = 4{,}68$ MPa $(p_3 = 46{,}8\, p_1)$,

$T_3 = 1\,476$ K $(t_3 = 1\,203\ °C)$.

3—4: Zde jde o děj adiabatický a platí vztahy

$$p_3 V_1^\varkappa = p_4 V_2^\varkappa\,, \qquad \frac{p_3 V_1}{T_3} = \frac{p_4 V_2}{T_4}\,.$$

Z prvé rovnice vychází

$$p_4 = p_3 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\varkappa = 2p_2\varepsilon^{-\varkappa} = 2p_1$$

a vydělením obou rovnic dostáváme

$$T_3 V_1{}^{\varkappa-1} = T_4 V_2{}^{\varkappa-1}$$

a z toho

$$T_4 = T_3\varepsilon^{1-\varkappa} = 2T_2\varepsilon^{1-\varkappa} = 2T_1\,.$$

Číselně vychází

$p_4 = 0{,}20$ MPa, $T_4 = 600$ K $(t_4 = 327\ °C)$.

4—1: Poněvadž jde o děj izochorický, platí (teplotu označme T_1')

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{T_4}{T_1'}$$

a odtud

$$T_1' = T_4 \frac{p_1}{p_4} = T_4 \frac{p_1}{2p_1} = \frac{T_4}{2} = T_1 .$$

Vychází tedy správně $T_1' = T_1$.

Číselně vychází

$$p_1 = 0{,}10 \text{ MPa}, \qquad T_1' = 300 \text{ K}.$$

c) Tepelná účinnost motoru η je podíl celkové práce při ději vykonané a přijatého kladného tepla. Práci koná plyn na dráze 34, spotřebuje na dráze 12 a na drahách 23 a 41 se práce nekoná. Teplo přijímá plyn na dráze 23 a vydává na dráze 41. Na drahách 12 a 34 nenastává výměna tepla.

Práce vykonaná jedním molem je

$$A = \frac{R}{\varkappa - 1}(T_1 - T_2) + \frac{R}{\varkappa - 1}(T_3 - T_4) =$$

$$= \frac{R}{\varkappa - 1}(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$$

a kladné teplo přijaté na dráze 2—3 je

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2).$$

Proto je tepelná účinnost

$$\eta = \frac{A}{Q_{23}} = \frac{R}{(\varkappa - 1)\, C_V} \cdot \frac{T_1 - T_2 + T_3 - T_4}{T_3 - T_2} .$$

Poněvadž

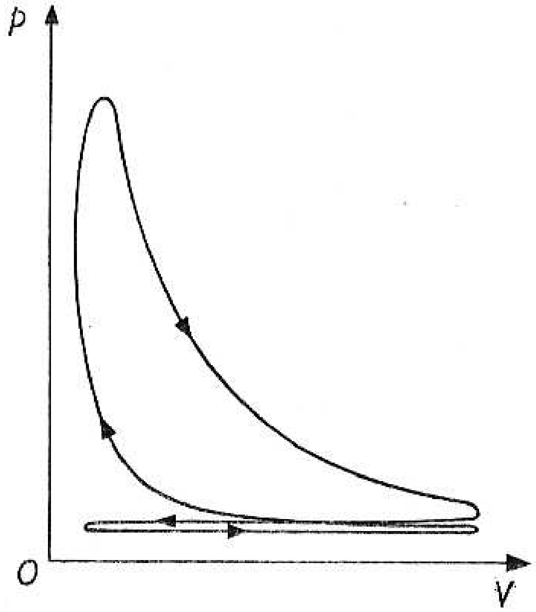
$$\frac{R}{(\varkappa - 1)\, C_V} = \frac{C_p - C_V}{(\varkappa - 1)\, C_V} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa - 1} = 1, \text{ je}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \varepsilon^{1-\varkappa} .$$

Číselně $\quad \eta = 1 - \dfrac{300}{738} = 1 - 0{,}407 ,$

$\eta = 59{,}3\ \%$.

d) Ve skutečnosti je pracovní diagram hladký – bez hrotů (obr. 82). Poněvadž plyn není ideální, bude účinnost menší než vypočtená.



Obr. 82

2. úloha

Do mýdlového roztoku ponoříme rámeček a vytvoříme mydlinovou obdélníkovou blánu rozměrů b, h. Při pozorování v odraženém světle, které dopadá na blánu pod úhlem α (měřeno vzhledem k normále), jeví se jasně zelená (λ_0).

a) Zjistěte, zda je možné určit hmotnost této mydlinové blány užitím laboratorních vah s dosažitelnou přesností 0,1 mg.

b) Určete, v jaké barvě se vám bude jevit nejtenčí mydlinová blána, jestliže ji budete pozorovat kolmo.
Odvoďte příslušné vztahy.

Konstanty a dané hodnoty: relativní index lomu $n = 1{,}33$, vlnová délka odraženého zeleného světla $\lambda_0 = 500$ nm, $\alpha = 30°$, $b = 0{,}020$ m, $h = 0{,}030$ m, hustota $\varrho = 1\,000 \text{ kg m}^{-3}$.

Řešení

Tenká vrstva tloušťky d odráží nejlépe monochromatické světlo vlnové délky λ, když je splněn vztah

$$2nd\cos\beta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,, \tag{1}$$

kde k znamená celé číslo, β úhel lomu, pro nějž platí

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,.$$

Z toho

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\,.$$

Dosazením za β upravíme (1)

$$2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}\,. \tag{2}$$

Když na vrstvu dopadá bílé světlo, zesilují se v odraženém světle ty barvy, pro něž je splněna podmínka (2). Jestliže odražené světlo má vlnovou délku λ_0, je tloušťka vrstvy při interferenci k-tého řádu

$$d_k = \frac{(2k+1)\,\lambda_0}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} = (2k+1)\,d_0\,.$$

Dosadíme-li pro $k = 0$ dané hodnoty, dostáváme

$$d_0 = \frac{500\,.\,10^{-9}}{4\sqrt{1{,}33^2-\frac{1}{4}}}\ \mathrm{m} = \frac{500\,.\,10^{-9}}{2\sqrt{6{,}08}}\ \mathrm{m} =$$

$$= 1{,}01\,.\,10^{-7}\ \mathrm{m}\,.$$

a) Hmotnost mydlinové blány je

$$m_k = \varrho bhd_k\,;$$

po dosazení daných hodnot a

$d_0 = 1{,}01 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$, $d_1 = 3{,}03 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$, $d_2 = 5{,}05 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$

atd. dostaneme

$$m_0 = 0{,}000\,600 \cdot 1{,}01 \cdot 10^{-7} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg} = 6{,}06 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg} = 6{,}06 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mg}\,,$$

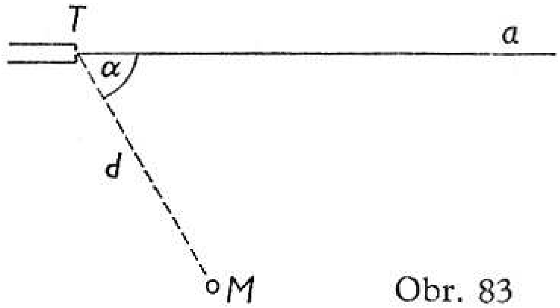
$m_1 = 18{,}2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mg}$, $m_2 = 30{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mg}$ atd.

Hmotnost nejtenčí blány nelze tedy danými váhami určit.

b) Když dopadá světlo pod úhlem 30°, pak při kolmém pozorování nemůže být blána zbarvena, bude se jevit tmavou.

3. úloha

Elektrony urychlené napětím U vylétají ve vakuu z ústí elektronové trysky T ve směru přímky a (obr. 83). Ve vzdálenosti d



Obr. 83

od ústí trysky je umístěn terčík M tak, že spojnice TM svírá s přímkou a úhel α.

a) Jakou magnetickou indukci by muselo mít homogenní magnetické pole, jehož indukční čáry by byly kolmé na rovinu určenou přímkou a a bodem M, aby odchýlilo elektrony na terčík?

b) Jakou magnetickou indukci by muselo mít homogenní magnetické pole, jehož indukční čáry by byly rovnoběžné s přímkou TM, aby odchýlilo elektrony na terčík?

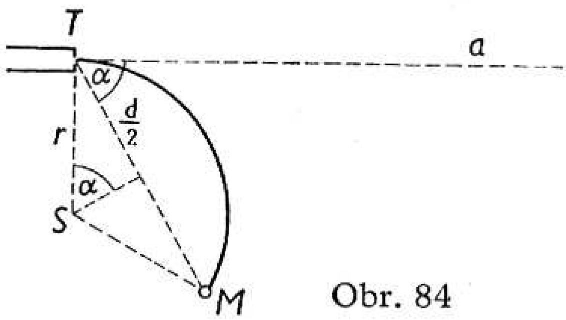
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $U = 1\,000$ V, $e = 1{,}60 \,.\, 10^{-19}$ C, $m_e = 9{,}11 \,.\, 10^{-31}$ kg, $\alpha = 60°$, $d = 5{,}0$ cm, $B < 0{,}030$ T.

Řešení

a) Elektrony, které vletí do homogenního magnetického pole kolmo k indukčním čárám, pohybují se po kruhové dráze, jejíž rovina je kolmá k indukčním čárám. Lorentzova síla

$$Bev = \frac{m_e v^2}{r}, \tag{1}$$

kde pro r musí platit (obr. 84)



Obr. 84

$$r = \frac{d}{2 \sin \alpha}. \tag{2}$$

Rychlost urychleného elektronu určíme ze vztahu pro jeho kinetickou energii, která musí být rovna práci, kterou vykoná elektrické pole o napětí U v elektronové trysce

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = U_e. \tag{3}$$

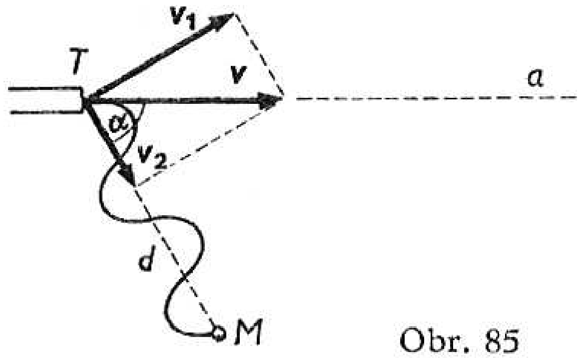
Z (1) vychází, když užijeme (3) a (2),

$$B = m_e \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{ed} = 2 \sqrt{\frac{2Um_e}{e}} \cdot \frac{\sin \alpha}{d}.$$

Po dosazení daných hodnot dostáváme

$$B = 3{,}70 \,.\, 10^{-3}\ \mathrm{T}\,.$$

b) Vletí-li elektrony do homogenního magnetického pole šikmo, je jejich pohyb složen z rovnoměrného pohybu po kružnici, jejíž rovina je kolmá ke směru indukčních čar, a z rovnoměrného přímočarého pohybu ve směru indukčních čar. Výsledný pohyb je šroubovitý. Z vektoru počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}$ se složka $\boldsymbol{v}_1$ (obr. 85) kolmá k indukčním čárám uplatní při vzniku



Obr. 85

Lorentzovy síly a během pohybu se bude rovnoměrně otáčet okolo přímky jdoucí směrem indukčních čar; složka $\boldsymbol{v}_2$ rovnoběžná s indukčními čárami se zachová a uplatní jako rychlost rovnoměrného pohybu. Složky rychlosti mají velikosti

$$v_1 = v \sin\alpha\,, \quad v_2 = v \cos\alpha\,.$$

Označíme-li N počet závitů šroubovice, pak pro dobu letu elektronu platí

$$t = \frac{d}{v_2} = \frac{d}{v\cos\alpha} = \frac{N\,.\,2\pi r}{v_1} = \frac{N\,.\,2\pi r}{v \sin\alpha}\,.$$

Z toho vychází pro poloměr kruhové dráhy

$$r = \frac{d \sin\alpha}{2\pi N \cos\alpha}\,.$$

Ze vztahu pro rovnost Lorentzovy a dostředivé síly vychází

$$Bev \sin\alpha = \frac{m_e v^2 \sin^2\alpha}{r} = \frac{m_e v^2 \sin^2\alpha}{\dfrac{d \sin\alpha}{2\pi N \cos\alpha}},$$

$$B = \frac{m_e v^2 \sin^2\alpha \,.\, 2\pi N \cos\alpha}{d \sin\alpha \,.\, ev \sin\alpha} = \frac{m_e v \,.\, 2\pi N \cos\alpha}{de} \,. \tag{4}$$

Pro rychlost v platí podobně jako v a)

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = Ue\,,$$

a tedy

$$v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}\,.$$

Dosazením do (4) dostáváme

$$B = \frac{2\pi N \cos\alpha}{d} \sqrt{\frac{2Um_e}{e}}\,.$$

Numericky dostáváme

$$B = \frac{2\pi \frac{1}{2}}{5{,}0 \,.\, 10^{-2}} \sqrt{\frac{2 \,.\, 10^3 \,.\, 9{,}11 \,.\, 10^{-31}}{1{,}60 \,.\, 10^{-19}}}\, N \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} =$$

$$= \pi N \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}11 \,.\, 10^{-9}}{25 \,.\, 10^{-4} \,.\, 1{,}60}}\, \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \pi N \sqrt{\frac{8 \,.\, 9{,}11}{16{,}0}} \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{T} =$$

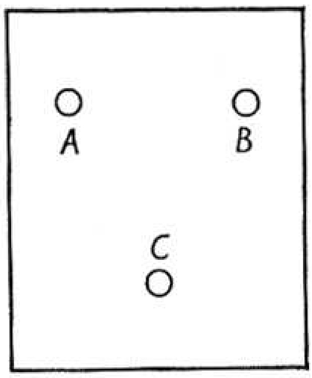
$$= N \,.\, 6{,}70 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{T}\,.$$

Pokud má být $B < 0{,}030$ T, jsou čtyři možnosti ($N \leq 4$), a to

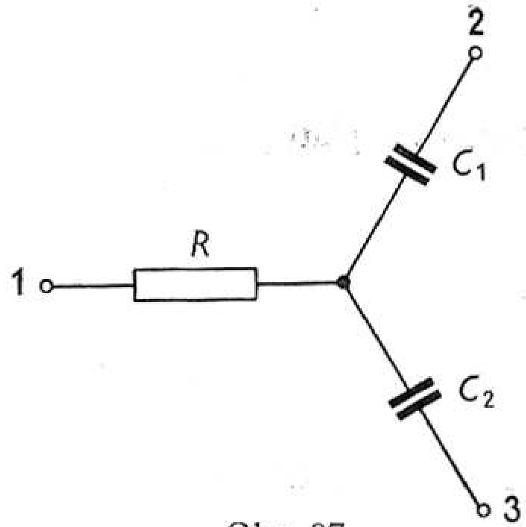
$$B_1 = 6{,}70 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{T}\,,$$
$$B_2 = 13{,}4 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{T}\,,$$
$$B_3 = 20{,}1 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{T}\,,$$
$$B_4 = 26{,}8 \,.\, 10^{-3}\,\mathrm{T}\,.$$

4. úloha

Pomocí *RC*-generátoru a dvou měřidel rozluštěte tajemství „černé skříňky“ se třemi zdířkami (obr. 86). Víte, že uvnitř skříňky jsou dva kondenzátory a jeden rezistor zapojené do hvězdy (obr. 87).



Obr. 86

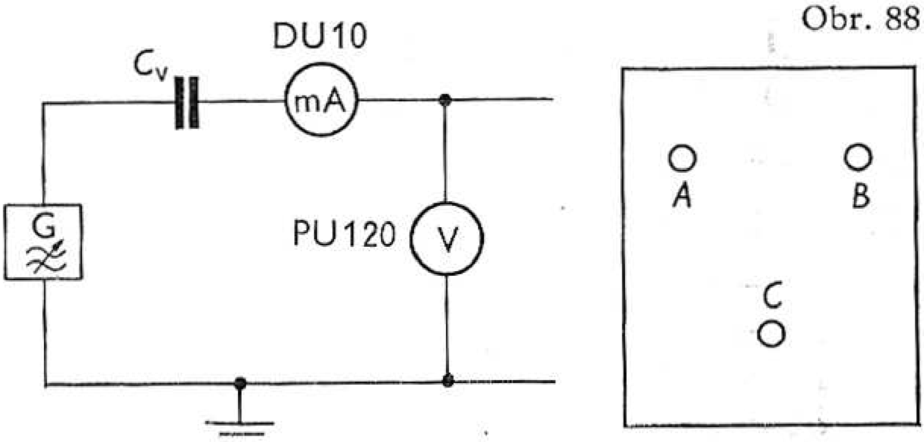


Obr. 87

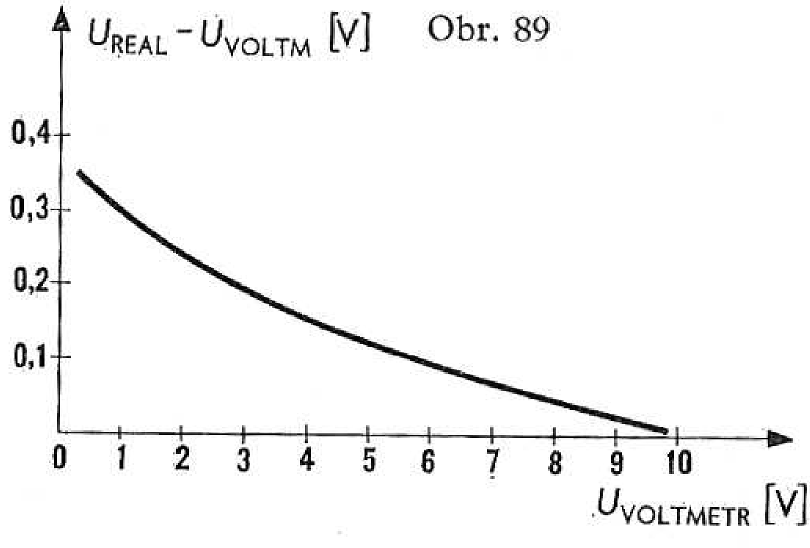
Úkoly:

1. Sestavte zapojení podle obr. 88 a proveďte měření potřebná pro vyplnění předepsané tabulky. Z naměřených hodnot vypočtěte impedance Z_{AB}, Z_{AC} a Z_{BC} ve frekvenčním oboru od 0,1 kHz do 10 kHz.

Obr. 88



RC-generátor BM 365 U pracuje ve čtyřech rozsazích: od 25 Hz do 150 Hz (tmavočervená stupnice), od 150 Hz do 900 Hz (světle červená stupnice), od 900 Hz do 5,5 kHz (modrá stupnice) a od 5,5 kHz do 30 kHz (zelená stupnice). Střídavé výstupní napětí lze nastavit hrubě pomocí přepínače a jemně pomocí potenciometru v rozsahu od 0 V do 10 V. Doporučujeme nastavit napětí tak, aby se co nejlépe využilo rozsahů měřidel. Protože napětí na zdířkách generátoru má stejnosměrnou složku, je v zapojení použito vazebního kondenzátoru C_V o kapacitě 1 μF.
Měřidlo PU 120, které použijete jako voltmetr, má na střídavých rozsazích při plné výchylce proud 125 μA. Při rozsahu 10 V, vhodném pro naše měření, platí stupnice přesně jen při plné výchylce měřidla. Pro nižší hodnoty napětí použijte přiloženou korekční křivku (obr. 89).



Obr. 89

Jako miliampérmetr použijte měřidlo DU 10, rozsahy 12 mA, 3 mA a 0,6 mA.

2. Na logaritmický papír sestrojte grafy závislostí impedancí na frekvenci.
3. Dokažte teoreticky, že z hodnot impedancí při daných frekvencích lze určit R, C_1 a C_2.

4. Na základě získaných výsledků stanovte, ke které zdířce je připojen rezistor a ke kterým jsou připojeny kondenzátory.
5. Vypočtěte rezistanci R a kapacity C_1 a C_2. Použijte přitom hodnoty impedancí zjištěné při frekvencích 1 kHz a 10 kHz.
6. Posuďte, jaký vliv na přesnost měření má zanedbání proudu, který protéká voltmetrem.

Řešení

1. Bylo provedeno zapojení podle obr. 88. Změřením na skříňce byly získány výsledky uvedené v tabulce v druhém až sedmém řádku. Při měření bylo použito korekčních hodnot pro voltmetr uvedených v obr. 89. Z naměřených hodnot byly vypočteny impedance Z_{AB}, Z_{AC} a Z_{BC}. Jsou udány v kΩ pro frekvenční rozsah 0,1 kHz do 10 kHz.

Měřením na skříňce byly získány tyto výsledky:

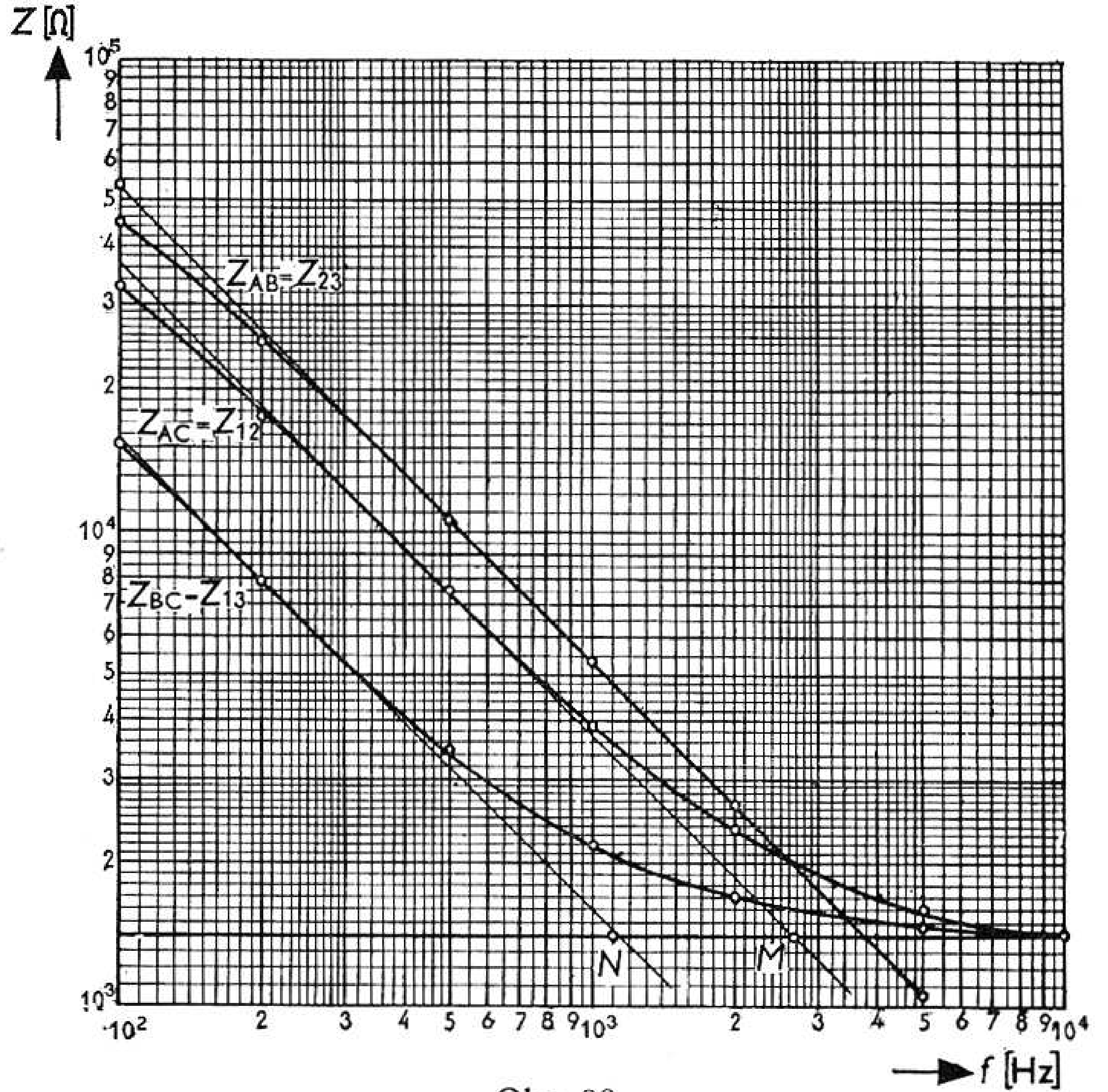
f (kHz)	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10,0
U_{AB} (V)	9,65	10,0	10,0	9,15	7,35	4,15	2,28
I_{AB} (mA)	0,211	0,404	0,94	1,73	2,78	3,95	4,35
U_{AC} (V)	9,50	9,70	9,20	7,40	5,50	4,25	3,90
I_{AC} (mA)	0,289	0,548	1,23	1,88	2,33	2,50	2,63
U_{BC} (V)	9,05	8,80	6,95	5,10	4,30	3,90	3,80
I_{BC} (mA)	0,593	1,13	2,00	2,36	2,52	2,54	2,64
Z_{AB} (kΩ)	45,7	24,8	10,64	5,29	2,64	1,05	0,524
Z_{AC} (kΩ)	32,9	17,7	7,48	3,94	2,36	1,70	1,48
Z_{BC} (kΩ)	15,3	7,79	3,48	2,16	1,71	1,54	1,44

2. Závislosti impedancí na frekvenci jsou vyneseny v obr. 90 na logaritmickém papíru.

3. Označme zdířky podle obr. 87. Pak platí

$$Z_{23} = \frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\,, \tag{1}$$

$$Z_{12}^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_1^2}\,, \tag{2}$$



Obr. 90

$$Z_{13}^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_2^2} . \tag{3}$$

Z (1) plyne

$$\omega Z_{23} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \text{konst.} \tag{4}$$

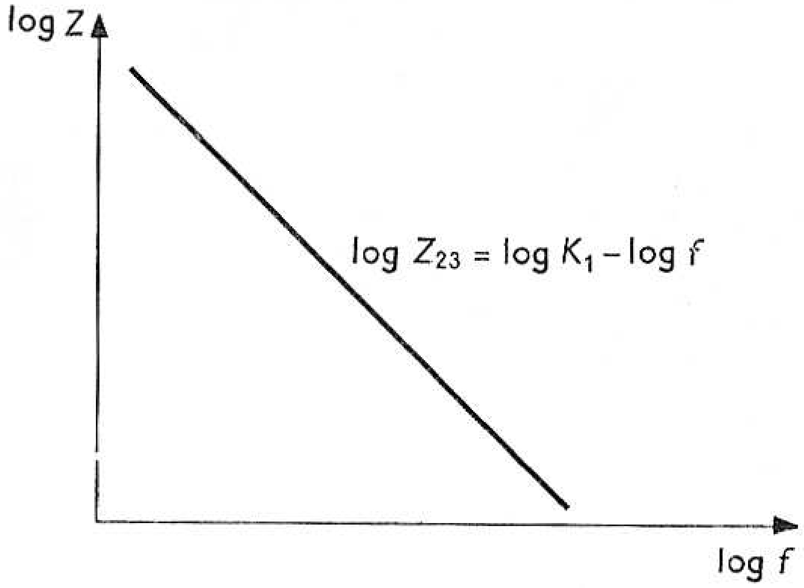
a odtud vydělením 2π

$$f Z_{23} = \frac{1}{2\pi C_1} + \frac{1}{2\pi C_2} = K_1$$

a logaritmováním

$$\log Z_{23} = \log K_1 - \log f \,. \tag{5}$$

Na logaritmickém papíru dostaneme jako graf přímku klesající pod úhlem 45° (obr. 91).



Obr. 91

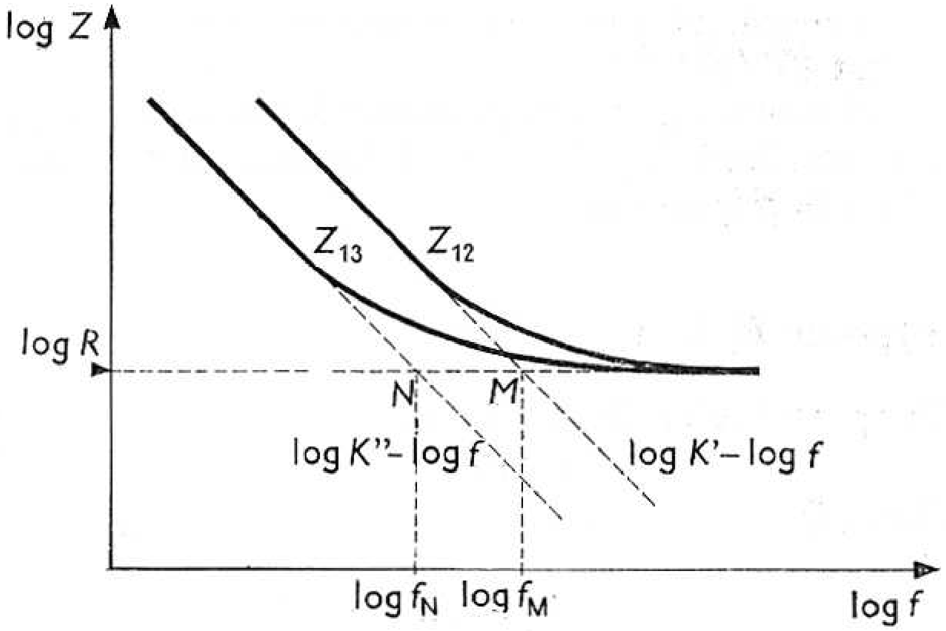
Z (2) a (3) je vidět, že Z_{12} a Z_{13} jsou závislé na ω, a tedy i na f.

$$Z_{12}^2 = \frac{R^2C_1^2 + \dfrac{1}{\omega^2}}{C_1^2} \,,$$

$$Z_{13}^2 = \frac{R^2C_2^2 + \dfrac{1}{\omega^2}}{C_2^2} \,.$$

Když bude $\frac{1}{\omega} \ll RC$, pak bude

$$Z_{12} \doteq Z_{13} \doteq R \,.$$



Obr. 92

Grafy mají společnou asymptotu rovnoběžnou s osou $\log f$ (obr. 92).

Když bude $\frac{1}{\omega} \gg RC$, pak

$$Z_{12} \doteq \frac{1}{\omega C_1}, \quad Z_{13} \doteq \frac{1}{\omega C_2}$$

čili

$$Z_{12} \doteq \frac{1}{2\pi f C_1}, \quad Z_{13} \doteq \frac{1}{2\pi f C_2},$$

tj.

$$Z_{12} \doteq \frac{1}{2\pi C_1} \cdot \frac{1}{f}, \quad Z_{13} \doteq \frac{1}{2\pi C_2} \cdot \frac{1}{f}$$

čili

$$\log Z_{12} \doteq \log K' - \log f,$$
$$\log Z_{13} \doteq \log K'' - \log f,$$

to znamená, že grafy mají rovnoběžné asymptoty klesající pod úhlem 45° (obr. 92).

Kondenzátory jsou tedy připojeny k těm zdířkám, pro které je graf závislosti $\log Z$ na $\log f$ klesající přímka. Ke zbývající zdířce je připojen rezistor.

Výpočet R, C_1 a C_2

Prvý způsob: Použijeme hodnot impedancí zjištěných při dvou různých frekvencích.

Platí (2)

$$Z_{12}^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C_1^2},$$

$$Z_{12}'^2 = R^2 + \frac{1}{\omega'^2 C_1^2};$$

odečtením dostáváme

$$Z_{12}^2 - Z_{12}'^2 = \frac{1}{C_1^2}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{\omega'^2}\right),$$

$$C_1^2 = \frac{\omega'^2 - \omega^2}{\omega'^2\omega^2(Z_{12}^2 - Z_{12}'^2)},$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi ff'}\sqrt{\frac{f'^2 - f^2}{Z_{12}^2 - Z_{12}'^2}}.$$

Podobně:

$$C_2 = \frac{1}{2\pi ff'}\sqrt{\frac{f'^2 - f^2}{Z_{13}^2 - Z_{13}'^2}}.$$

Jinou úpravou výchozích vztahů dostáváme

$$\omega'^2 Z_{12}'^2 - \omega^2 Z_{12}^2 = (\omega'^2 - \omega^2)\,R^2,$$

$$R = \sqrt{\frac{\omega'^2 Z_{12}'^2 - \omega^2 Z_{12}^2}{\omega'^2 - \omega^2}} = \sqrt{\frac{f'^2 Z_{12}'^2 - f^2 Z_{12}^2}{f'^2 - f^2}} .$$

Druhý způsob (použitím hodnot impedancí zjištěných pro jedinou frekvenci):

Odečtením (3) od (2) dostaneme

$$Z_{12}^2 - Z_{13}^2 = \frac{1}{\omega^2 C_1^2} - \frac{1}{\omega^2 C_2^2} =$$

$$= \left(\frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\omega C_1} + \frac{1}{\omega C_2}\right) \tag{6}$$

a vydělením (6) rovnicí (1) vychází

$$\frac{1}{\omega C_1} - \frac{1}{\omega C_2} = \frac{Z_{12}^2 - Z_{13}^2}{Z_{23}} . \tag{7}$$

Sečtením (1) a (7)

$$2 \cdot \frac{1}{\omega C_1} = \frac{Z_{12}^2 - Z_{13}^2 + Z_{23}^2}{Z_{23}} ,$$

$$C_1 = \frac{2 Z_{23}}{\omega (Z_{12}^2 - Z_{13}^2 + Z_{23}^2)} .$$

Analogicky

$$C_2 = \frac{2 Z_{23}}{\omega (Z_{13}^2 - Z_{12}^2 + Z_{23}^2)} .$$

Úpravou (2) dostaneme

$$R = \sqrt{Z_{12}^2 - \frac{1}{\omega^2 C_1^2}} ,$$

což stačí pro numerický výpočet.

Můžeme také postupovat takto:

$$R^2 = Z_{12}^2 - \frac{1}{\omega^2 C_1^2} = Z_{12}^2 - \frac{(Z_{12}^2 - Z_{13}^2 + Z_{23}^2)^2}{4\,Z_{23}^2}\,,$$

$$R = \frac{\sqrt{2(Z_{12}^2 Z_{23}^2 + Z_{12}^2 Z_{13}^2 + Z_{13}^2 Z_{23}^2) - (Z_{12}^4 + Z_{13}^4 + Z_{23}^4)}}{2Z_{23}}\,.$$

Tento vztah obsahuje na pravé straně pouze impedance, pro numerické počítání je však zbytečně složitý.

Třetí způsob (graficko-početní z obr. 92):

Společná asymptota grafů Z_{12} a Z_{13} umožňuje přímo přečíst na svislé ose velikost rezistance R. Šikmé asymptoty protínají tuto společnou asymptotu ve dvou bodech M, N, kterým přísluší frekvence f_M a f_N. Platí

$$\log R = \log K' - \log f_M\,,$$

$$K' = f_M\,.\,R\,,$$

$$\frac{1}{2\pi C_1} = f_M\,.\,R\,,$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_M\,.\,R}\,.$$

Analogicky

$$C_2 = \frac{1}{\omega_N\,.\,R}\,.$$

4. V našem případě dostáváme přímku jako graf impedance Z_{AB}. Kondenzátory jsou tedy připojeny ke zdířkám A, B a rezistor ke zdířce C. Tedy:

$$Z_{12} = Z_{AC}\,,\quad Z_{13} = Z_{BC}\,,\quad Z_{23} = Z_{AB}\,.$$

5. Numerický výpočet:

1. způsob:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^8 - 10^6}{10^8 \,.\, 10^6 (3{,}94^2 - 1{,}48^2) \,.\, 10^6}} \text{ F} = 43{,}4 \text{ nF},$$

$$C_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^8 - 10^6}{10^8 \,.\, 10^6 (2{,}16^2 - 1{,}44^2) \,.\, 10^6}} \text{ F} = 98{,}2 \text{ nF},$$

$$R = \sqrt{\frac{10^8 \,.\, 1{,}48^2 \,.\, 10^6 - 10^6 \,.\, 3{,}94^2 \,.\, 10^6}{10^8 - 10^6}}\ \Omega =$$

$$= 10^3 \sqrt{\frac{203}{99}}\ \Omega = 1{,}43 \text{ k}\Omega .$$

2. způsob:

$$C_1 = \frac{2 \,.\, 5{,}29 \,.\, 10^3}{2\pi \,.\, 10^3 (3{,}94^2 - 2{,}16^2 + 5{,}29^2) \,.\, 10^6} \text{ F} = 43{,}4 \text{ nF},$$

$$C_2 = \frac{2 \,.\, 5{,}29 \,.\, 10^3}{2\pi \,.\, 10^3 (2{,}16^2 - 3{,}94^2 + 5{,}29^2) \,.\, 10^6} \text{ F} = 98{,}3 \text{ nF},$$

$$R = \sqrt{3{,}94^2 \,.\, 10^6 - \frac{10^{18}}{4\pi^2 \,.\, 10^6 \,.\, 43{,}4^2}}\ \Omega = 1{,}44 \text{ k}\Omega$$

nebo

$$R = \sqrt{2{,}16^2 \,.\, 10^6 - \frac{10^{18}}{4\pi^2 \,.\, 10^6 \,.\, 98{,}3^2}}\ \Omega = 1{,}43 \text{ k}\Omega$$

nebo

$$R = \sqrt{1{,}48^2 \,.\, 10^6 - \frac{10^{18}}{4\pi^2 \,.\, 10^8 \,.\, 43{,}4^2}}\ \Omega = 1{,}43 \text{ k}\Omega$$

nebo

$$R = \sqrt{1{,}44^2 \, . \, 10^6 - \frac{10^{18}}{4\pi^2 \, . \, 10^8 \, . \, 98{,}3^2}} \; \Omega = 1{,}43 \, \mathrm{k\Omega} \, .$$

3. způsob:

$R \doteq 1{,}42 \, \mathrm{k\Omega}$,

$$f_M \doteq 2{,}6 \, \mathrm{kHz} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2\pi \, . \, 2{,}6 \, . \, 10^3 \, . \, 1{,}42 \, . \, 10^3} \, \mathrm{F} = 43{,}1 \, \mathrm{nF} \, ,$$

$$f_N \doteq 1{,}1 \, \mathrm{kHz} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2\pi \, . \, 1{,}1 \, . \, 10^3 \, . \, 1{,}42 \, . \, 10^3} \, \mathrm{F} = 102 \, \mathrm{nF} \, .$$

Výsledky získané různými způsoby se téměř shodují.

6. Proud jdoucí voltmetrem se uplatní pouze při malých frekvencích (po 1 kHz), kdy je srovnatelný s proudem, který odebírá černá skříňka. Projevuje se to zakřivením grafů směrem dolů. Při frekvencích od 1 kHz do 10 kHz můžeme proud jdoucí voltmetrem zanedbat.